

S. 804. D

MÉMOIRES
D E
MATHÉMATIQUE
E T
DE PHYSIQUE.

Tome X.

MÉMOIRES

MATHÉMATIQUE

S. 804. D. 10?
ET

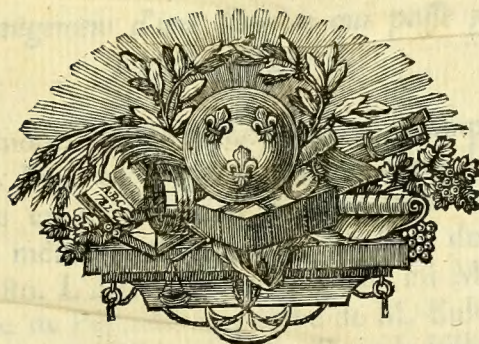
DE PHYSIQUE.

Tome X.

MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
PAR DIVERS SAVANS, ET LUS DANS SES ASSEMBLÉES.

TOME X.



A PARIS,

De l'Imprimerie de MOUTARD, Imprimeur-Libraire de la REINE,
de MADAME, de Madame Comtesse d'ARTOIS, & de L'ACADÉMIE
ROYALE DES SCIENCES, rue des Mathurins, Hôtel de Cluni.

M. DCC. LXXXV.





P R É F A C E.

CE volume renferme quatre Pièces couronnées par l'Académie, & treize Mémoires.

Un d'Histoire Naturelle des Animaux.

Un de Minéralogie.

Trois de Chimie.

Un de Météorologie.

Deux d'Astronomie.

Un de Mécanique.

Et quatre d'Analyse.

P R I X.

Sur le dérangement d'une Comète qui passe près d'une Planète. Page 1.

CE Mémoire & l'Addition qui l'accompagne ont obtenu un Prix en 1778. Le Prix étoit double, & l'Académie en a réservé la moitié, & a de nouveau proposé la même question, avec un Prix double pour l'année 1780. L'Auteur de cette Pièce est M. Fuss, de l'Académie de Pétersbourg, élève de M. Euler, dont il a épousé la petite-fille en 1784. Dans le billet cacheté, où M. Fuss avoit déposé son nom, il déclaroit que si sa Pièce avoit quelque mérite, il le devoit aux conseils utiles que M. Euler lui avoit donnés, & prioit de rendre cette déclaration publique. M. Fuss

étoit alors très-jeune ; & si la jeunesse est le temps où la modestie est le plus un devoir, c'est aussi l'époque de la vie où il est plus rare & plus méritoire de le remplir.

Sur les Perturbations des Comètes. Page 65.

L'ACADÉMIE, en proposant ce Prix de nouveau, désiroit une méthode générale de calculer les Perturbations des Comètes, & telle qu'on pût l'appliquer facilement à la Comète de 1532, qu'on croit être la même que celle de 1661, & qui par conséquent doit reparoître dans quelques années. Le Prix étoit double, & il a été remporté par M. de la Grange, Associé étranger de l'Académie, & Directeur de la Classe de Mathématiques dans celle de Berlin.

La plus grande difficulté de ce problème naît de l'impossibilité de se servir de la même méthode d'approximation, pour toutes les parties de l'orbite ; & la manière nouvelle dont M. de la Grange a envisagé le problème, lui a donné le moyen de vaincre cette difficulté, en employant successivement trois méthodes, l'une pour la partie inférieure de l'orbite, l'autre pour la partie supérieure, & la troisième pour le point de cette partie supérieure, où la distance plus petite de la Planète perturbatrice rendroit fautive l'application de la seconde méthode.

Sur les Comètes de 1532 & de 1661. Page 333.

LE succès de l'application des méthodes de calcul aux Perturbations d'une Comète, dépend nécessairement de l'exactitude des observations de cette Comète

dans ses différentes apparitions ; & il est aisé de sentir que des observations faites en 1532 & en 1661, avoient besoin d'être discutées. Ainsi, après s'être assurée d'une méthode de calculer les Perturbations, applicable à la Comète de 1532 & de 1661, l'Académie a jugé qu'il seroit utile de s'occuper de l'examen de ces observations. Elle a proposé cet examen pour sujet du Prix de 1782, & il a été remporté par M. Méchain, aujourd'hui Membre de l'Académie.

Le calcul des Perturbations de la Comète de 1532 à 1661, & par conséquent la prédiction de l'époque de son retour, d'après la théorie, est enfin le sujet d'un Prix qui sera décerné en 1786. On voit par-là avec quelle suite l'Académie s'est occupée de cette grande question, jusqu'ici sans utilité bien apparente, mais dont la solution est du moins une des preuves les plus brillantes de la hardiesse & des forces de l'esprit humain. On permet aux Compagnies savantes, comme aux Corps politiques, de songer quelquefois à la splendeur de l'Empire, & avec d'autant plus de raison, que dans les Sciences cette splendeur ne s'achète jamais aux dépens du bien général ; & que si les questions qu'on y propose, ne sont souvent que curieuses, les méthodes inventées pour les résoudre finissent presque toujours par avoir une utilité réelle.

Sur la Théorie des Machines simples, en ayant égard aux effets du frottement & de la roideur des cordages.

Page 161.

CETTE question a été proposée successivement en 1779 & en 1781, & le Prix, qui étoit double, a été

rempoſté par M. Coulomb, Capitaine au Corps Royal du Génie , & aujourd'hui Membre de l'Académie.

Ce ſujet , indépendamment de l'utilité qu'on pouvoit eſpérer , dans la Mécanique pratique , d'une connoiſſance plus exacte des effets des frottemens & des cordages , avoit encore l'avantage d'offrir une nouvelle occaſion d'appliquer le calcul à la recherche des loix de la Nature , données ſeulement par l'obſervation & par l'expérience. Cet Art important eſt encore peu connu & peu avancé , & il ne faut pas en être étonné ; il ne pouvoit faire de progrès réels , avant que l'on eût éclairci les principales difficultés de la Théorie générale du mouvement. M. Coulomb a ſatisfait également aux vûes que l'Académie s'étoit propoſées , & pour l'utilité pratique , & pour le progrès des connoiſſances phyſiques.

HISTOIRE NATURELLE DES ANIMAUX.

Sur les Albatros , par M. Forſter. Page 563.

CES oiſeaux , que M. Forſter a obſervés dans ſes voyages autour du Monde , avec le Capitaine Cook , exiſtent dans l'hémisphère auſtral : on en peut diſtinguer trois eſpèces ; la première , qui eſt de la groſſeur d'un cygne , & la ſeconde , qui eſt à peu près de celle d'une oie , & qui de plus a une raie dorée ſur le bec , habitent la partie tempérée de cet hémisphère. Plus au nord , on trouve la troiſième eſpèce , égale en grandeur à la ſeconde , & diſtinguée par des paupières blanches.

Ces

Les Albatros sont très-voraces, & armés d'un bec propre à saisir & à déchirer leur proie ; leurs ailes sont très-grandes ; ils volent long-temps & avec une grande rapidité ; ils s'élèvent facilement de la surface de l'eau ; mais lorsqu'ils sont à terre , ils ne peuvent prendre leur vol qu'en se laissant tomber d'une éminence : en général ils ne volent qu'à peu de distance de la surface de l'eau , même quand ils vont au loin : par ce moyen , non seulement ils se tiennent plus près de la mer , où ils cherchent leur nourriture , mais ils sont plus en sûreté. Leur sternum est très-court , & des oiseaux de proie plus foibles qu'eux les attaquent avec avantage lorsqu'ils peuvent gagner le dessous. M. Forster a vu de ces oiseaux à sept cent cinquante lieues des terres ; & en comparant leur vol à la marche du vaisseau , il a jugé qu'ils faisoient quinze lieues par heure. Ils sont très-avides ; & dans les gros temps sur-tout , où ils trouvent plus difficilement de la nourriture , on les prend aisément à l'ameçon. Dépouillée de la peau , leur chair est mangeable , & M. Forster la préféroit aux salaisons.

MINÉRALOGIE.

Sur les Volcans éteints du Brisgaw , par M. le Baron Dietrich , Correspondant de l'Académie. Page 435.

LES Volcans éteints , qui étoient à peine soupçonnés il y a trente ans , ne peuvent plus être regardés comme un phénomène isolé ; ils occupent une partie considérable

de la surface du globe , s'y trouvent dispersés dans presque toutes les régions, n'existent que dans des chaînes de montagnes, dont la forme & la composition sont à peu près les mêmes. L'observation de ces Volcans annonce qu'ils ont cessé de brûler dans des époques très-éloignées les unes des autres. Dans plusieurs cantons où on les apperçoit, il ne s'est conservé aucune mémoire du temps où ils ont été brûlans. Il paroît que la cause qui produit les Volcans, tient à la constitution générale du globe ; qu'elle agit successivement dans différens points, pour y perdre ensuite toute son activité. Les causes de ces grands phénomènes sont encore absolument inconnues ; mais si jamais nous pouvons espérer de les découvrir, c'est à force de multiplier les observations particulières. Ainsi , quoique l'on connoisse aujourd'hui un grand nombre de Volcans éteints , la découverte de ceux d'un pays où ils n'avoient pas été observés, est toujours importante pour l'Histoire Naturelle ; ce sont des matériaux précieux que la postérité saura un jour mettre en œuvre. Dans les sciences de faits, la véritable Philosophie ne consiste point à rejeter toute théorie ; mais à savoir attendre, & reconnoître le temps où il sera permis d'en former une.

C H I M I E.

Analyse du Marbre de Campan , par M. Bayen.

Page 397.

ON donne communément le nom de Marbre à une espèce de pierre calcaire , dure , susceptible de poli,

diversement colorée, opaque ou n'ayant que très-peu de transparence ; mais en soumettant les marbres à l'analyse chimique , on observe entre eux des différences plus réelles que celles de leur couleur & des accidens qu'ils offrent à la vue. Le marbre blanc , le marbre noir de Picardie , sont presque absolument formés de terre calcaire, colorée dans ces derniers par une petite portion de terre ferrugineuse. Dans le Marbre Campan au contraire , on trouve plus d'un quart d'une substance schisteuse, & quelques parties de terre alumineuse. M. Bayen propose , d'après ces observations , de classer les marbres d'après les produits de l'analyse , plutôt que par leurs apparences extérieures , en réservant ces apparences pour établir ensuite des subdivisions. Cette méthode est celle de la plupart des Chimistes qui ont étudié la Minéralogie , & plusieurs Naturalistes l'ont adoptée.

Sur la formation du Soufre , par M. le Veillard.

Page 551.

CE Mémoire est destiné à prouver , d'abord par des observations , & ensuite par des expériences directes , que le Soufre peut se former par la voie humide , & sans le secours de la chaleur. M. le Veillard a trouvé que des mélanges de sels vitrioliques , & de substances inflammables , lorsqu'ils sont susceptibles de fermentation putride , produisent d'abord du foie de Soufre ; mais il faut que ces mêmes mélanges ne soient pas exposés à l'air libre , pour que le Soufre s'y trouve séparé de l'alkali. Ces expériences lui ont confirmé ce que l'inspection des eaux froides sulfureuses de Montmorency , & de celles de quelques égouts lui avoit déjà fait soupçonner.

Sur un Gas inflammable , retiré du phosphore par les Alkalis , par M. Gengembre. Page 651.

CE Gas, dont on doit la connoissance à M. Gengembre, & qui se sépare du phosphore en le combinant avec un alkali, a la propriété singulière de s'enflammer spontanément lorsqu'il se mêle avec l'air vital; propriété qui le distingue des autres substances aériformes susceptibles d'inflammation.

M É T É O R O L O G I E.

Observations Thermométriques , par M. Marcorelle, Correspondant de l'Académie. Page 589.

CES observations ont pour objet de comparer les degrés de température marqués sur les thermomètres exposés aux rayons du Soleil & à l'ombre, dans les mêmes lieux & aux mêmes heures; ainsi que la diminution de la chaleur du Soleil pendant les éclipses.

A S T R O N O M I E.

Sur une méthode de déterminer le mouvement d'une Planète, d'après l'observation d'une de ses taches , par M. Cagnoli. Page 467.

CE problème d'Astronomie a été résolu de plusieurs manières; mais la méthode que propose M. Cagnoli

est absolument élémentaire & très-simple , & elle peut par conséquent être utile aux Astronomes.

Sur l'Astronomie des Chinois.

CE Mémoire renferme un catalogue des constellations Chinoises , comparées avec celles que nos Astronomes emploient , & la liste des Comètes que les Chinois ont observées depuis l'an 613, avant notre Ere , jusqu'en 1222 , temps où vivoit l'Ecrivain dont M. de Guignes le fils a traduit l'Ouvrage. Les connoissances vastes dans les Langues & dans l'Histoire des peuples Orientaux, dont M. de Guignes a donné depuis longtemps de si brillantes preuves , doivent inspirer la plus grande confiance dans le travail de son fils. Non content d'avoir appris à connoître les Chinois dans le peu de Livres que nous avons d'eux , M. de Guignes le fils a voulu , depuis la composition de ce Mémoire , aller les étudier dans leur propre pays ; & ce voyage nous donne des espérances fondées , que nous connoîtrons enfin cette Nation célèbre sur laquelle nous avons tant écrit , qui a été jugée si diversement par nos Philosophes & nos Politiques , & dont les mœurs , les Loix , le Gouvernement , les Arts , nous laissent encore tant de doutes à éclaircir.

M É C A N I Q U E.

Sur une nouvelle Presse , par M. Anisson. Page 613.

LA Presse qui est en usage dans les Imprimeries , est défectueuse à beaucoup d'égards ; on ne peut espérer

de belles impressions qu'avec beaucoup de peines & de soins ; d'où il résulte que les Ouvrages communs ne seront jamais beaux , & que les beaux Ouvrages seront toujours très-chers. Or le véritable intérêt du Public dans les Arts , est que les choses d'un usage commun se perfectionnent , que l'on puisse obtenir des Ouvrages bien faits à bon marché. La Presse de M. Anisson a paru exempte des défauts de la Presse ordinaire ; elle demande peu de soins , même pour faire très-bien. A la vérité sa première construction est plus chère ; mais elle fait plus d'ouvrage , & la perfection y est portée au point de pouvoir tirer six fois sur la même feuille sans doubler aucune lettre.

A N A L Y S E.

*Sur l'attraction des Sphéroïdes , par M. le Gendre ,
aujourd'hui Membre de l'Académie. Page 411.*

L'ATTRACTION des Sphéroïdes elliptiques de révolution sur un point quelconque , est proportionnelle à leur masse , pourvu que leur centre & les deux foyers de l'ellipse génératrice soient les mêmes.

On peut donc connoître l'attraction de ces Sphéroïdes sur un point quelconque : en effet , d'après le théorème précédent , il suffit de chercher celle d'un autre Sphéroïde , engendré par une ellipse , ayant les mêmes foyers , & passant par ce point , & l'on fait déterminer cette attraction , lorsque le point attiré est sur la surface du Sphéroïde.

Tel est le théorème nouveau démontré par M. le Gendre dans ce Mémoire ; il y emploie la méthode des séries ; mais la démonstration n'en est pas moins rigoureuse , parce qu'elle ne dépend point de la valeur , mais de la forme de ces suites.

*Sur la Courbure des Surfaces , par M. Meusnier ,
aujourd'hui Membre de l'Académie. Page 577.*

M. EULER a donné le premier une méthode pour déterminer la Courbure des Surfaces ; celle que propose M. Meusnier est différente , & elle le conduit à ce théorème curieux , que tout élément de Surface est produit par la révolution d'un petit arc de cercle , autour d'un axe donné , propriété analogue à celle des lignes courbes dont tous les élémens peuvent être considérés comme de petits arcs de cercle.

Il a joint à cette méthode plusieurs autres remarques intéressantes sur la théorie des Surfaces.

*Sur les Développées & les points singuliers des courbes
à double courbure , par M. Monge. Page 511.*

CETTE théorie importante dans la Géométrie , & même pour quelques-unes de ses applications , avoit été négligée. M. Monge s'en est occupé avec succès , & la donne ici toute entière avec beaucoup de simplicité , de méthode & d'élégance.

*Sur le Calcul aux différences finies , par M. Charles.
Page 573.*

DES considérations sur la nature des intégrales des

équations aux différences finies , sur les loix auxquelles les fonctions arbitraires qui entrent dans ces intégrales doivent être assujetties , sur l'étendue des solutions qui en résultent , sur leur construction géométrique , forment le fond de ce Mémoire. Les discussions qu'il renferme touchent par quelques points à la métaphysique du Calcul. Ainsi toutes les conclusions de l'Auteur ne seront généralement pas admises ; mais elles méritent d'être discutées ; & l'on peut dire de ce genre de question , qu'il est utile pour le progrès de la science , que les Savans s'en occupent quelquefois , quoiqu'il fût peut-être dangereux qu'ils s'en occupassent trop longtemps.



RECHERCHES
SUR
LE DÉRANGEMENT
D'UNE COMÈTE
QUI PASSE PRÈS D'UNE PLANÈTE.

Tome X.

A



RECHERCHES

S U R

LE DÉRANGEMENT D'UNE COMÈTE

QUI PASSE PRÈS D'UNE PLANÈTE.

RÉFLEXIONS PRÉLIMINAIRES.

AVANT que d'entreprendre ces Recherches en général ; pour les rendre applicables à toutes les Comètes qui pourroient approcher d'une Planète, j'ai cru nécessaire d'examiner un cas déterminé où une Comète approcheroit tant de la Terre qu'elle la toucheroit presque, sans pourtant la choquer actuellement, attendu que les effets qui résulteroient d'un choc réel, ne sauroient être douteux.

Pour faciliter cette recherche, j'ai supposé une Comète dont la marche seroit dirigée droit vers le Soleil, dans le plan même de l'écliptique, & qui y rencontreroit à peu près la Terre sans pourtant la choquer. Or, à la Terre j'ai supposé un mouvement circulaire autour du Soleil à sa distance moyenne de 24000 demi-diamètres de la Terre, conformément à la

parallaxe du Soleil conclue du dernier passage de Vénus ; & en conséquence de cette détermination , j'ai pris la masse du Soleil 360000 fois plus grande que celle de la Terre : ensuite j'ai supposé à la Comète une masse égale à celle de la Terre , pour en conclure aussi l'effet que la Comète produiroit sur le mouvement de la Terre.

Cela posé , j'ai vu d'abord que l'action mutuelle entre la Terre & la Comète ne commençoit à devenir sensible qu'environ deux jours avant leur conjonction , où j'ai supposé le lieu de la Terre au commencement du Bélier. Depuis ce terme , j'ai poursuivi tant la Terre que la Comète par des intervalles de temps que j'ai pris plus petits , à mesure que la distance entre ces deux corps diminuoit.

Cette hypothèse m'a mis en état de calculer pour chacun de ces intervalles , tant le lieu, que le mouvement de chacun , sans avoir été obligé de recourir à l'intégration des équations que la théorie du mouvement fournit. C'est donc après avoir fait tout ce calcul , que je mets ici le résultat dans la Table suivante , où l'on peut voir , pour chaque intervalle de temps , 1°. la longitude de la Terre avec sa distance au Soleil ; 2°. la longitude héliocentrique de la Comète , avec sa distance au Soleil , & 3°. la longitude géocentrique de la Comète , avec sa distance à la Terre.

Temps.		Longitude de la Terre.	Distance de la Terre au Soleil.	Longitude Héliocentri- que de la Comète.	Distance de la Comète au Soleil.	Longitude Géocentri- que de la Comète.	Distance de la Comète à la Terre.
J.	H.	D. M. S.		D. M. S.		S. D. M.	
0	0	0 0 0	24000,00	1 58 17	25154,08	1 7 12	1430,697
1	0	0 59 8	24000,00	1 58 17	24580,60	1 7 13 $\frac{1}{6}$	715,302
1	12	1 28 43	24000,01	1 58 17	24291,32	1 7 12	357,724
1	18	1 43 31	24000,02	1 58 17	24146,00	1 7 9	178,928
1	24	1 50 54	24000,03	1 58 17	24073,23	1 7 3 $\frac{1}{6}$	89,521
1	22 $\frac{1}{2}$	1 54 36	24000,04	1 58 17	24036,22	1 7 20 $\frac{1}{10}$	44 808
2	1 $\frac{1}{2}$	2 2 0	24000,06	1 58 17	23963,77	7 7 37 $\frac{2}{5}$	44,657
2	3	2 5 42	24000,10	1 58 17	23927,24	7 7 22	89,298
2	6	2 13 6	24000,11	1 58 17	23854,04	7 7 20	170,780
2	12	2 27 52	24000,14	1 58 17	23707,51	7 7 17	357,240
3	0	2 57 27	24000,10	1 58 16	23413,05	7 7 16	714,957
4	0	3 56 37	24000,01	1 58 16	22818,74	7 7 15	1429,903

Cette Table nous fait voir :

1°. Que les dérangemens causés dans le mouvement tant de la Terre que de la Comète, ne sont pas à beaucoup près aussi considérables qu'on auroit pu s'imaginer, vu qu'il a paru à plusieurs Philosophes qu'une telle rencontre pourroit causer un bouleversement total tant dans la Terre que dans la Comète, ou qu'au moins ces deux corps devroient demeurer attachés ensemble que l'un devenoit quasi un satellite de l'autre, lequel sentiment se trouve à présent suffisamment réfuté; car nous voyons :

2°. Que la Comète s'éloigne presque aussi rapidement de la Terre après la conjonction, qu'elle s'en étoit approchée avant; de sorte que deux jours après la conjonction, où l'action mutuelle n'est presque plus sensible, tant la Terre que la Comète se trouvent presque entièrement rétablies dans le même mouvement qu'elles auroient poursuivi sans l'action mutuelle, puisque l'effet de cette action, pendant les deux derniers jours, détruit presque entièrement celui qui a été produit pendant les premiers.

3°. Quoique la différence entre le mouvement avant & après la conjonction soit très-petite en elle-même, elle ne laisse pas de produire des changemens assez considérables, tant de la Terre que de la Comète. Car d'abord le demi-axe de l'orbite de la Terre, deviendra un peu plus grand : de sorte que le temps d'une révolution en pourroit bien être augmenté de plus de six heures ; mais l'excentricité n'en fera pas changée considérablement : ou il faut se souvenir que nous avons supposé nulle l'excentricité avant l'action mutuelle.

4°. Pour ce qui regarde le mouvement de la Comète après cette action, sa direction n'en sera presque point altérée ; mais au lieu que son temps périodique a été supposé infini avant l'action, il se trouvera réduit après à vingt-sept siècles environ.

5°. En considérant bien les phénomènes rapportés dans cette Table, on s'apercevra aisément que, pendant chaque intervalle, l'action mutuelle entre la Terre & la Comète a été presque entièrement indépendante de l'action du Soleil, & que

réci-proquement l'action du Soleil n'a pas été troublée par l'action mutuelle de la Terre & de la Comète. Cette observation est de la dernière importance, vu qu'elle nous met en état de déterminer, tant l'action du Soleil que l'action mutuelle, chacune séparément, sans que l'une soit dérangée par l'autre, pourvu qu'on suppose les intervalles de temps assez petits.

PLAN de la Méthode qu'on suivra dans ces Recherches.

Je remarque d'abord qu'on ne sauroit employer la méthode dont on se sert ordinairement pour déterminer le dérangement causé par l'action mutuelle des Planètes. Car cette méthode demande qu'on transforme la formule irrationnelle qui exprime la distance entre les deux Planètes, dans une série convergente, dont il suffiroit de prendre seulement quelques termes, en négligeant tous les suivans. Or une telle transformation ne sauroit avoir lieu, que quand la distance entre les deux Planètes ne varie point très-énormément; &, par cette raison, c'est une chose assurée qu'on ne sauroit appliquer cette méthode pour déterminer le dérangement que les deux Planètes, Jupiter & Saturne, produisent mutuellement dans leur mouvement, vu que la plus grande distance entre ces deux Planètes surpasse bien quatre fois la plus petite; d'où il est impossible de trouver une série assez convergente, pour qu'il fût de n'en considérer qu'environ trois ou quatre termes, ce qui est sans doute la raison pourquoi on a si peu réussi jusqu'ici à déterminer le dérangement que la Terre & Vénus se causent réciproquement, puisque la plus grande distance peut devenir au delà de six fois plus grande que la plus petite: d'où il s'ensuit que les Tables solaires de feu M. l'Abbé de la Caille ne sauroient être que très-défectueuses sur l'inégalité que l'action de Vénus cause dans le mouvement de la Terre, comme M. Euler l'a prouvé très-évidemment dans le Tome XVI des Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, où il s'est servi d'une méthode tout-à-fait différente & indépendante de la résolution mentionnée dans une série; & la Table qu'il a ajoutée sur la

fin, diffère tout à fait de celle qu'on trouve dans les Tables de M. de la Caille. Cette différence est sans doute la raison pourquoi les Tables du dernier, selon son propre aveu, diffèrent quelquefois jusqu'à trente secondes de la vérité.

Comme cette méthode, que je rejette, comme on voit, avec raison, est encore moins applicable aux Comètes, dont la distance à une Planète peut varier à l'infini; je me servirai de la même méthode que feu M. Clairaut a employée pour déterminer le retardement de la Comète de 1759, & je tâcherai de la rendre plus aisée, en remarquant d'abord, qu'on n'a pas besoin de comparer toute l'orbite de la Comète avec le mouvement de la Planète auprès de laquelle elle passe; mais qu'il suffit de considérer la portion sur laquelle l'action de la Planète devient sensible, qui est, comme je l'ai fait voir, très-petite lorsque la Comète passe auprès de la Terre; mais en cas qu'elle passeroit auprès de Jupiter ou de Saturne, elle pourra durer beaucoup plus long-temps.

Quoi qu'il en soit, je partagerai tout le temps où la Comète demeure assujettie à l'action de la Planète en plusieurs intervalles, & je calculerai pour chacun l'effet que tant l'action du Soleil que celle de la Planète y produit. De cette manière je pourrai déterminer l'action du Soleil indépendamment de celle de la Planète, & réciproquement l'effet de la Planète, indépendamment de celui du Soleil; de sorte que, vers la fin de cet intervalle, on n'aura qu'à combiner ces deux effets pour connoître le vrai état de la Comète à la fin de cet intervalle, qui donnera l'état initial pour l'intervalle de temps suivant. Je me sers ici du terme *état initial de la Comète*, pour y comprendre non seulement le lieu qu'elle occupe à un temps donné, mais aussi son mouvement; ainsi tout reviendra à résoudre cette question: L'état de la Comète étant donné pour le commencement d'un intervalle, déterminer son état pour la fin de ce même intervalle, & on n'aura qu'à assembler tous les changemens qu'aura produits tant l'action du Soleil que celle de la Planète.

De cette manière on trouvera l'état de la Comète pour l'intervalle suivant, d'où l'on n'aura qu'à faire les mêmes opérations, jusqu'à ce qu'on sera parvenu au dernier intervalle, où l'action de la Comète devient tout à fait insensible. Depuis ce temps on déterminera l'orbite de la Comète qui résulte de la seule action du Soleil, selon les règles connues; & en comparant tous les élémens de cette nouvelle orbite avec ceux de l'orbite qu'elle a tenue avant l'action de la Planète, on connoitra tous les changemens que l'action de la Planète aura produits, 1°. dans la ligne des nœuds, 2°. dans son inclinaison à l'orbite de la Planète, 3°. tant la position que la grandeur de son axe principal, d'où l'on tirera en même temps 4°. son temps périodique, & 5°. l'excentricité de son orbite.

ARTICLE I.

Détermination de l'état de la Comète, avant que de subir l'action de la Planète.

PUISQU'IL s'agit de déterminer le dérangement d'une Comète causé par l'action de quelque Planète, il faut supposer que le mouvement de cette Comète, avant que d'éprouver l'action de la Planète, soit parfaitement connu. Qu'on rapporte donc cette orbite connue au plan de l'orbite de la Planète, en y marquant la ligne des nœuds avec l'inclinaison de l'orbite, afin qu'on en puisse calculer tant la longitude que la latitude de la Comète sur le plan de l'orbite de la Planète pour un temps proposé. Que le plan de la planche représente donc le plan de l'orbite de la Planète sur lequel se trouve le centre du Soleil en S, d'où soit tirée la ligne droite S γ vers le commencement du Belier, qui représentera l'axe fixe, auquel je rapporterai tant le lieu de la Planète que de la Comète par des coordonnées perpendiculaires entre elles.

Soit

Soit donc pour un temps quelconque la Comète en z , *FIGURE I.*
 d'où l'on tire sur l'autre plan fixe la perpendiculaire zy , &
 de y sur l'axe, la perpendiculaire yx , en nommant $Sx = x$;
 $xy = y$, & $yz = z$, & ces trois coordonnées détermineront
 le lieu de la Comète pour le temps proposé. Et pour le
 rapporter à une mesure fixe, j'exprimerai constamment par
 l'unité la distance moyenne de la Terre au Soleil. Or, pour
 avoir une mesure fixe du temps, je prendrai un jour pour
 l'unité, au lieu que dans les recherches purement mécaniques,
 on est accoutumé d'exprimer le temps en secondes. Ainsi
 j'exprimerai ici le temps en jours chacun de 24 heures, &
 conformément à cette unité j'exprimerai toutes les vitesses par
 l'espace qui en seroit parcouru en un jour. Cela posé, pour
 déterminer le mouvement de notre Comète, qu'on calcule
 pour le jour suivant son lieu par les coordonnées x' , y' , z' ,
 & les formules $x'-x$, $y'-y$ & $z'-z$ donneront les vitesses de la
 Comète, selon les directions des trois coordonnées; ou bien,
 posant le temps écoulé depuis une certaine époque = τ jours,
 ces mêmes vitesses seront aussi exprimées par ces formules
 $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$.

Par une manière semblable je représenterai le mouvement
 de la Planète, qui se trouve en Y , pendant que la Comète
 est en z ; d'où tirant l'appliquée YX , je nommerai $SX = X$
 & $XY = Y$, pour avoir le lieu de la Planète, & son mouvement
 sera exprimé par les formules $\frac{dX}{d\tau}$ & $\frac{dY}{d\tau}$. De cette manière
 l'état de la Comète sera déterminé par les six élémens
 suivans: x , y , z & $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$, pendant que l'état de la
 Planète ne demande que ces quatre: X , Y & $\frac{dX}{d\tau}$, $\frac{dY}{d\tau}$.

Maintenant ayant fixé le temps où l'on juge que l'action
 de la Comète commence à devenir sensible, je suppose qu'on
 ait trouvé pour l'état de la Comète $x=a$, $y=b$ & $z=c$;
 puis $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$, & $\frac{dz}{d\tau} = \gamma$. Or, pour la Planète, je

supposeraï les élémens de son état pour le même temps, $X=A$, $Y=B$; $\frac{dX}{d\tau}=U$, $\frac{dY}{d\tau}=Z$. Donc, s'il n'y avoit point de forces à l'action desquelles la Comète seroit sujette, son mouvement se feroit uniformément selon la même direction, & pour un temps quelconque de τ jours après l'époque établie, on auroit pour l'état de la Comète $x=a+\alpha\tau$, $y=b+\beta\tau$, $z=c+\gamma\tau$. (On trouvera vers la fin une démonstration complète de cette supposition). Les vitesses demeurant les mêmes, favoir : $\frac{dx}{d\tau}=\alpha$, $\frac{dy}{d\tau}=\beta$, $\frac{dz}{d\tau}=\gamma$. De même manière, si la Planète continuoit son mouvement uniforme en ligne droite, on auroit pour le même temps : $X=A+U\tau$, $Y=B+Z\tau$, les vitesses étant $\frac{dX}{d\tau}=U$, $\frac{dY}{d\tau}=Z$. Cela posé, je chercherai les dérangemens causés dans le mouvement uniforme & rectiligne, tant par l'action du Soleil que par celle de la Planète, au moins pour quelque intervalle de temps assez petit, pour que ces deux actions ne se troublent pas sensiblement.

Par cette même méthode, on pourroit aussi déterminer le dérangement qui seroit causé dans le mouvement de la Planète même par l'action de la Comète. Mais puisque l'Académie Royale n'exige pas ces recherches, je regarderai la masse de la Comète comme si petite, que la Planète n'en souffre aucun changement sensible.

ARTICLE II.

Détermination de l'action du Soleil sur l'état de la Planète, pendant un intervalle de temps assez petit.

JE considère d'abord la Planète elle-même en tant que son mouvement est courbé par l'action du Soleil ; & , quoique ce changement puisse être déterminé exactement par les Tables astronomiques, il sera bon pour mon dessein de le déterminer plutôt par approximation, pour établir une harmonie avec la

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMÈTE. 11

détermination du mouvement de la Comète. Car, puisqu'il ne s'agit que d'un petit intervalle de temps, cette approximation tiendra lieu d'une détermination exacte.

Ayant donc établi l'époque où l'action de la Planète sur la Comète commence, soit le temps écoulé après cette époque de τ jours, & prenant θ pour le moyen mouvement du Soleil, qui répond à ce temps de τ jours, & supposant la distance moyenne de la Terre au Soleil = 1, les principes du mouvement nous fournissent pour le mouvement de la Planète ces formules différentio-différentielles :

$$d d X = - \frac{X d \theta^2}{V^3} \text{ \& } d d Y = - \frac{Y d \theta^2}{V^3}.$$

en marquant par V la distance de la Planète au Soleil, de sorte que $V = \sqrt{X X + Y Y}$. Mais puisque par les Tables du moyen mouvement du Soleil on a $\theta = \tau. 59', 8''$, en réduisant cet angle en parties du rayon on aura $\theta = 0,0172028. \tau$, & partant $d \theta = 0,0172028. d \tau$, dont le carré donne $d \theta^2 = 0,0002959. d \tau^2$. Or, pour abrégér, je mettrai au lieu de cette fraction décimale la lettre M , de sorte que $M = 0,0002959$ & $1 M = 6,4711984$, d'où l'on aura ces deux équations à résoudre :

$$\frac{d d X}{d \tau^2} = - \frac{M X}{V^3} \text{ \& } \frac{d d Y}{d \tau^2} = - \frac{M Y}{V^3}.$$

Mais nous avons vu ci-dessus, que si le mouvement de la Planète demeurait uniforme, on auroit $X = A + U \tau$ & $Y = B + Z \tau$; donc, puisque l'action du Soleil est fort petite, les valeurs de X & de Y ne différeront quasi rien de celles-ci, & sur-tout dans les formules différentio-différentielles, puisque les coefficients sont si extrêmement petits, qu'on les pourra substituer au lieu de X & de Y ; ce qu'on pourra faire aussi dans la distance V , d'où l'on aura $V^2 = X^2 + Y^2 = A^2 + B^2 + 2 (A U + B Z) \tau + (U^2 + Z^2) \tau \tau$, où il faut remarquer que le premier membre $A^2 + B^2$ est non seulement beaucoup plus grand que les suivans, puisqu'on prend le temps τ assez petit : mais que les coefficients de ces membres sont aussi peu considérables par rapport au premier; de sorte que, pourvu qu'on

ne prenne pas le temps τ bien grand, la formule $\frac{1}{V^3}$ sera résoluble dans une série extrêmement convergente, dont il suffira, pour la plupart, de prendre les deux ou tout au plus les trois premiers termes, à cause de la petitesse du coefficient M.

Supposons donc que la résolution du dénominateur donne $\frac{1}{V^3} = H + K\tau + L\tau^2$, de sorte que $H = \frac{1}{(AA+BB)^{\frac{3}{2}}}$; $K = \frac{-3(AU+BZ)}{(AA+BB)^{\frac{5}{2}}}$, $L = \frac{-3(U^2+Z^2)}{2(AA+BB)^{\frac{7}{2}}} + \frac{15(AU+BZ)^2}{2(AA+BB)^{\frac{9}{2}}}$.

Cela posé, nous aurons

$$\text{I. } \frac{d^2 X}{d\tau^2} = -MAH - MUH\tau - MUK\tau\tau \\ - MAK\tau - MALK\tau\tau.$$

$$\text{II. } \frac{d^2 Y}{d\tau^2} = -MBH - MZH\tau - MZK\tau\tau \\ - MBK\tau - MBL\tau\tau.$$

Multiplions donc ces deux formules par $d\tau$ & l'intégration, puisque prenant $d\tau = 0$, il faut qu'il devienne $\frac{dX}{d\tau} = U$, & $\frac{dY}{d\tau} = Z$, nous donnera ces deux formules.

$$\text{I. } \frac{dX}{d\tau} = U - MAH\tau - \frac{1}{2}M(UH + AK)\tau\tau.$$

$$\text{II. } \frac{dY}{d\tau} = Z - MBH\tau - \frac{1}{2}M(ZH + BK)\tau\tau.$$

Où dans l'application à des cas particuliers on s'apercevra aisément jusqu'à quel degré on peut augmenter le temps, pour que l'erreur ne devienne pas sensible. Multiplions ces dernières formules encore par $d\tau$, & après l'intégration, puisque posant $\tau = 0$, il faut qu'il devienne $X = A$ & $Y = B$, on trouvera les valeurs suivantes :

$$\text{I. } X = A + U\tau - \frac{1}{2}MAH\tau\tau - \frac{1}{6}M(UH + AK)\tau^3.$$

$$\text{II. } Y = B + Z\tau - \frac{1}{2}MBH\tau\tau - \frac{1}{6}M(ZH + BK)\tau^3.$$

Maintenant on n'a qu'à donner à τ une grandeur convenable au cas qu'on veut traiter, & on aura les justes valeurs de ces quatre élémens X , Y , $\frac{dX}{d\tau}$, $\frac{dY}{d\tau}$, qui détermineront l'état de la

Planète pour le commencement du second intervalle de temps ; & en faisant les mêmes opérations on parviendra au troisième intervalle , & ainsi de suite jusqu'à ce que l'action de la Planète sur la Comète aura entièrement cessé. Or, en faisant ces opérations on aura l'avantage de pouvoir rectifier à chaque intervalle le lieu de la Planète pour l'intervalle suivant, par les Tables astronomiques de son mouvement, en cas qu'on le jugera nécessaire ; mais on verra, par cette même comparaison, qu'on pourra établir les intervalles de temps assez considérables, avant que la rectification devienne sensible ; ou il sera bon d'observer , que s'il s'agissoit de la Terre , on pourroit bien établir ces intervalles d'un ou même de quelques jours : or si c'étoit Jupiter ou même Saturne , on ne risqueroit rien en prenant ces intervalles de plusieurs jours. Mais si c'étoit de Vénus ou de Mercure qu'il s'agissoit , on seroit sans doute obligé de les raccourcir considérablement ; cependant le travail n'en seroit point augmenté , puisque, dans ces cas, l'action de la Planète sur la Comète ne dureroit que très-peu de temps.

ARTICLE III.

Détermination de l'action du Soleil sur l'état de la Comète, pendant un intervalle de temps assez petit.

CETTE détermination s'exécutera de la même manière que dans l'article précédent pour la Planète, avec la seule différence, que l'état de la Comète est déterminé par les trois coordonnées x, y, z , avec les formules différentielles $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$, qui en représentent les vitesses ; & nous avons déjà exprimé les valeurs de ces six élémens par les lettres a, b, c & α, β, γ pour le commencement du premier intervalle, qui auront été tirées de la Théorie du mouvement, que la Comète aura tenu avant que d'entrer dans la sphere d'activité de la Planète. Or les

formules différentio-différentielles qui renferment l'action du Soleil sur la Comète, seront :

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Mx}{v^3}; \quad \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{My}{v^3}; \quad \frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Mz}{v^3},$$

où v marque la distance de la Comète au Soleil, de sorte que $vv = xx + yy + zz$.

Maintenant, puisque la Comète est supposée à peu près aussi éloignée du Soleil que la Planète, pendant que l'action de celle-ci est assez considérable, l'action du Soleil sur la Comète le fera fort peu; de sorte qu'on pourra établir les mêmes intervalles de temps. Cela remarqué, on aura pour le premier de ces intervalles assez exactement, :

$$x = a + \alpha\tau, \quad y = b + \beta\tau, \quad z = c + \gamma\tau; \quad \frac{dx}{d\tau} = \alpha, \quad \frac{dy}{d\tau} = \beta, \quad \frac{dz}{d\tau} = \gamma;$$

c'est pourquoi en employant ces valeurs on aura

$$vv = aa + bb + cc + 2(\alpha a + \beta b + \gamma c)\tau + (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)\tau\tau$$

où le premier membre sera toujours beaucoup plus grand que les suivans; donc par la même résolution que j'ai employée

ci-dessus, je poserai pour abréger $\frac{1}{v^3} = h + k\tau + l\tau\tau$, de sorte

$$\text{que } h = \frac{1}{(aa + bb + cc)}, \quad k = -\frac{3(\alpha a + \beta b + \gamma c)}{(aa + bb + cc)^{\frac{3}{2}}}, \quad l = -\frac{3(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}{2(aa + bb + cc)^{\frac{5}{2}}} \\ + \frac{15(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)^2}{2(aa + bb + cc)^{\frac{7}{2}}} \quad \text{d'où nous aurons les formules suivantes :}$$

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -M\alpha h - M\alpha h\tau - M\alpha k\tau\tau \\ - M\alpha k\tau - M\alpha l\tau\tau.$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -M\beta h - M\beta h\tau - M\beta k\tau\tau \\ - M\beta k\tau - M\beta l\tau\tau.$$

$$\text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = -M\gamma h - M\gamma h\tau - M\gamma k\tau\tau \\ - M\gamma k\tau - M\gamma l\tau\tau.$$

qui étant intégrées, donneront pour les trois vîteses de la Comète,

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha - M\alpha h\tau - \frac{1}{2}M(\alpha h + \alpha k)\tau\tau$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \beta - M\beta h\tau - \frac{1}{2}M(\beta h + \beta k)\tau\tau$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \gamma - M\gamma h\tau - \frac{1}{2}M(\gamma h + \gamma k)\tau\tau;$$

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMÈTE. 15

lesquelles étant encore multipliées par dt , & intégrées, donneront :

$$x = a + \alpha \tau - \frac{1}{2} M a h \tau \tau - \frac{1}{2} M (\alpha h + a k) \tau^3$$

$$y = b + \beta \tau - \frac{1}{2} M b h \tau \tau - \frac{1}{2} M (\beta h + b k) \tau^3$$

$$z = c + \gamma \tau - \frac{1}{2} M c h \tau \tau - \frac{1}{2} M (\gamma h + c k) \tau^3.$$

Ayant donc calculé ces six valeurs, pour avoir l'état de la Comète, au commencement du second intervalle, on n'a qu'à donner à τ la quantité qu'on aura établie pour le premier intervalle, en tant qu'on ne tient compte que de l'action du Soleil. Mais avant que de passer à l'intervalle suivant, il faut encore corriger cet état par l'action de la Planète pendant le premier intervalle, laquelle découvrira le dérangement causé dans le mouvement de la Comète; c'est en quoi consiste la recherche principale que je dois entreprendre pour satisfaire à la question proposée.

Il est vrai qu'on pourroit aussi tirer immédiatement des Tables astronomiques les six élémens que je viens de déterminer pour le premier intervalle de temps; mais la réduction à nos trois coordonnées x , y , z , & sur-tout la détermination des trois vitesses, selon les mêmes directions, causeroit beaucoup plus d'embarras. Or, cet expédient ne sauroit plus servir pour les intervalles suivans, où l'on est obligé de tenir compte de l'effet que l'action de la Planète aura produit dans tous les intervalles précédens.

ARTICLE IV.

Détermination de l'action de la Planète sur l'état de la Comète pendant un intervalle de temps assez petit.

CONSIDÉRONS d'abord la force dont la Planète en Y attire la Comète qui se trouve en z ; & avant tout, il faut connoître le rapport qu'il y a entre la masse de la Planète & celle du Soleil. Soit donc pour cet effet M à m , comme la masse du Soleil à la masse de la Planète, ainsi qu'en cas

que la Planète fût la Terre ou Vénus, on auroit $m = \frac{M}{360000}$; ou si c'étoit Jupiter, on auroit $m = \frac{M}{1067}$, & pour Saturne $m = \frac{M}{3021}$. Ayant établi cette lettre, qu'on considère la distance entre la Planète & la Comète Y τ , en la posant $= w$, de sorte que $ww = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + \tau\tau$. Cela posé, l'action de la Planète sur la Comète sera exprimée par ces trois formules différentio-différentielles.

$$\text{I. } \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{m(x-X)}{w^3}. \quad \text{II. } \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{m(y-Y)}{w^3}. \quad \text{III. } \frac{d^2\tau}{d\tau^2} = -\frac{m\tau}{w^3}.$$

Maintenant il est clair que, pour le premier intervalle de temps, on aura à fort peu près comme ci-dessus $X = A + U\tau$, $Y = B + Z\tau$, $X = a + \alpha\tau$, $Y = b + \beta\tau$, $\tau = c + \gamma\tau$. Ces valeurs seront d'autant plus exactes, puisque la Comète n'est supposée que peu éloignée de la Planète, & que par-là l'action du Soleil est à peu près la même sur l'une & l'autre; de sorte qu'elle ne troublera presque point du tout l'action de la Planète sur la Comète, sur-tout quand on ne prend pas trop grands les intervalles de temps. Substituons donc dans nos formules ces valeurs,

$$\begin{aligned} x - X &= a - A + (\alpha - U)\tau \\ y - Y &= b - B + (\beta - Z)\tau \\ \tau &= c + \gamma\tau, \end{aligned}$$

& nous aurons :

$$ww = \left\{ \begin{aligned} &((a - A)^2 + (b - B)^2 + c^2 \\ &+ 2((a - A)(\alpha - U) + (b - B)(\beta - Z) + c\gamma))\tau \\ &+ ((\alpha - U)^2 + (\beta - Z)^2 + (\gamma - L)^2)\tau\tau. \end{aligned} \right.$$

Or, pour abréger, je poserai

$$ww = E + 2F\tau + G\tau\tau,$$

de sorte que les valeurs E, F & G sont connues; & il faut remarquer que les quantités E & G sont toujours

jours positives, pendant que F peut devenir tantôt positif, tantôt négatif. Outre cela, on verra facilement que le produit EG est toujours plus grand que FF. Mais on ne sauroit supposer comme auparavant, que le premier membre E soit beaucoup plus grand que les autres, sur-tout quand la distance entre la Comète & la Planète sera devenue assez petite, & partant, la résolution dans une série infinie ne sauroit plus être employée; cependant rien n'empêche qu'on ne puisse intégrer ces formules sans ce secours.

Or, comme ces formules ne diffèrent entr'elles que par les numérateurs, qui sont pour la première, $-m((a-A) + (\alpha-U)\tau)$; pour la seconde, $-m((b-B) + (\beta-Z)\tau)$, & pour la troisième, $-m(c + \gamma\tau)$, je mettrai, pour abrégé, pour chacun de ces numérateurs, la formule $p + q\tau$; de sorte qu'il s'agit d'intégrer premièrement la formule $\frac{(p+q\tau)d\tau}{(E+2F\tau+G\tau\tau)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'intégrale soit $\frac{P+Q\tau}{\sqrt{E+2F\tau+G\tau\tau}}$, où l'on aura $P = \frac{Eg-Fp}{FF-EG}$ & $Q = \frac{Fq-Gp}{FF-EG}$. Mais il y faut ajouter une constante telle, que posant $\tau = 0$, l'intégrale évanouisse; puisque, dans l'action du Soleil, on a déjà tenu compte des valeurs initiales pour le commencement du premier intervalle; ainsi cette intégrale sera $\frac{P+Q\tau}{\sqrt{(E+2F\tau+G\tau\tau)}} - \frac{P}{\sqrt{E}}$. Maintenant pour la première formule, ayant $p = -m(a-A)$ & $q = -m(\alpha-U)$, on prendra $P = -\frac{mE(a-U) + mF(a-A)}{FF-EG}$ & $Q = -\frac{mF(a-U) + mG(a-A)}{FF-EG}$, d'où l'on aura . . . $\frac{dx}{d\tau} = \frac{P+Q\tau}{\sqrt{(E+2F\tau+G\tau\tau)}} - \frac{P}{\sqrt{E}}$. Pour la seconde formule, parce qu'il est $p = -m(b-B)$ & $q = -m(\beta-Z)$, on aura $P = -\frac{mE(\beta-Z) + mF(b-B)}{FF-EG}$ & $Q = -\frac{mF(\beta-Z) + mG(b-B)}{FF-EG}$, d'où il s'ensuit $\frac{dy}{d\tau} = \frac{P+Q\tau}{\sqrt{(E+2F\tau+G\tau\tau)}} - \frac{P}{\sqrt{E}}$. Enfin, pour la troisième formule, ayant $p = -mc$ & $q = -m\gamma$, on a

$$P = - \frac{mE\gamma + mFc}{FF - EG} \quad \& \quad Q = - \frac{mF\gamma + mGc}{FF - EG} \quad \& \quad \text{de là}$$

$$\frac{d\tau}{d\tau} = \frac{P + Q\tau}{\sqrt{(E + 2F\tau + G\tau\tau)}} - \frac{P}{\sqrt{E}}.$$

Pour intégrer encore une fois ces formules multipliées par $d\tau$, cherchons en général l'intégrale de cette formule :

$$\sqrt{\frac{(P + Q\tau)d\tau}{E + 2F\tau + G\tau\tau}}; \quad \& \quad \text{pour cet effet, posons d'abord } P + Q\tau = K + H(F + G\tau), \quad \text{de sorte que } P = K + FH \quad \& \quad Q = GH, \quad \&$$

partant $H = \frac{Q}{G} \quad \& \quad K = \frac{GP - FG}{G}$, & notre formule se résoudra en ces deux parties :

$$\frac{H d\tau}{\sqrt{(E + 2F\tau + G\tau\tau)}} + \frac{H(F + G\tau)d\tau}{\sqrt{(E + 2F\tau + G\tau\tau)}}$$

où l'intégrale de la dernière partie est ouvertement $H \sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}$, de sorte qu'il ne reste que la première partie $\frac{K d\tau}{\sqrt{(E + 2F\tau + G\tau\tau)}}$ dont l'intégrale se trouve $-\frac{K}{\sqrt{G}}$

$$l\left(F + G\tau - \sqrt{G(E + 2F\tau + G\tau\tau)}\right) + \frac{K}{\sqrt{G}} l(F - \sqrt{EG}),$$

prenant la constante telle que l'intégrale évanouisse en posant $\tau = 0$: de sorte que l'intégrale cherchée sera

$$\int \frac{(P + Q\tau)d\tau}{\sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}} = \frac{Q}{G} \sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau} - \frac{Q\sqrt{E}}{G} + \frac{GP - FQ}{G\sqrt{G}}$$

$$l\left(\frac{F - \sqrt{EG}}{F + G\tau - \sqrt{G(E + 2F\tau + G\tau\tau)}}\right).$$

Au lieu de cette formule, écrivons, pour abrégér le caractère, Ω , & nous aurons les valeurs suivantes $x = \Omega - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}$, $y = \Omega - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}$, & $z = \Omega - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}$, pourvu qu'on donne aux lettres P & Q les valeurs marquées ci-dessus, tant pour x , que pour y & pour z , d'où chacun de ces cas tirera sa propre valeur de Ω .

Après avoir trouvé toutes ces valeurs qui découlent de l'action de la Planète, on n'a qu'à les ajouter aux valeurs de $x, y, z, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$, qui ont été trouvées dans l'article précédent; & donnant à τ sa juste valeur pour le premier

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMÈTE. 19

intervalle, on aura les six élémens de l'état de la Comète pour le commencement du second intervalle. Pour ce qui regarde le membre logarithmique, puisque $E G > F F$, il conviendra de le représenter en sorte $\frac{\sqrt{EG-F}}{\sqrt{G(E+2F+G\tau\tau)-F-G\tau}}$, ou bien en sorte $\frac{F+G\tau+\sqrt{G(E+2F+G\tau\tau)-F-G\tau}}{F+\sqrt{EG}}$.

Au reste, puisque l'intégration a réussi si exactement, & que les membres affectés par la petite fraction m , sont ordinairement très-petits, on ne sera pas obligé de raccourcir les intervalles de temps où l'action de la Planète est fort variable, & on pourra régler les intervalles sur le mouvement de la Planète, en sorte que la portion parcourue pendant un tel intervalle, ne comprenne pas une courbure trop considérable, & peut-être pourra-t-on les régler jusqu'à 5 degrés.

ARTICLE V.

Explication plus détaillée des calculs qu'on aura à faire pour chaque intervalle.

APRÈS avoir établi les intervalles de temps depuis le commencement de l'action sensible de la Planète jusqu'à sa fin, le calcul fait pour chaque intervalle, selon les formules que je viens de donner, fournira pour le commencement de l'intervalle suivant, tant les quatre élémens A, B, U, Z , par lesquels l'état de la Planète est déterminé, que les six élémens a, b, c & α, β, γ , qui déterminent l'état de la Comète. On trouvera pour un temps quelconque de τ jours, depuis le commencement de cet intervalle, les élémens suivans.

I. Pour la Planète.

Qu'on cherche d'abord les lettres H & K par les formules

$$H = \frac{1}{(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ \& } K = -\frac{3(AU + BZ)}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ \& l'on aura :}$$

Cij

$$\frac{dX}{d\tau} = U - MAH\tau - \frac{1}{2}M(UH + AK)\tau\tau$$

$$\frac{dY}{d\tau} = Z - MBH\tau - \frac{1}{2}M(ZH + BK)\tau\tau.$$

$$X = A + U\tau - \frac{1}{2}MAH\tau\tau - \frac{1}{6}M(UH + AK)\tau^3,$$

$$Y = B + Z\tau - \frac{1}{2}MBH\tau\tau - \frac{1}{6}M(ZH + BK)\tau^3.$$

II. Pour la Comète.

On cherche d'abord les valeurs $h = \frac{1}{(aa + bb + cc)^{\frac{1}{2}}}$ &

$$k = -\frac{3(a\alpha + b\beta + c\gamma)}{(aa + bb + cc)^{\frac{3}{2}}} \quad E = (a - A)^2 + (b - B)^2 + cc;$$

$$F = (a - A)(\alpha - U) + (b - B)(\beta - Z) + c\gamma \quad \&$$

$$G = (\alpha - U)^2 + (\beta - Z)^2 + \gamma\gamma, \text{ d'où l'on tire la distance}$$

$$\text{de la Comète à la Planète ou la lettre } w = \sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}.$$

Outre cela, qu'on cherche ces valeurs :

$$P = \frac{mE(\alpha - U) - mF(a - A)}{EG - FF}; \quad Q = \frac{mF(\alpha - U) - mG(a - A)}{EG - FF}$$

$$P' = \frac{mE(\beta - Z) - mF(b - B)}{EG - FF}; \quad Q' = \frac{mF(\beta - Z) - mG(b - B)}{EG - FF}$$

$$P'' = \frac{mE\gamma - mFc}{EG - FF}; \quad Q'' = \frac{mF\gamma - mGc}{EG - FF}$$

d'où l'on aura :

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha - Ma h\tau - \frac{1}{2}M(\alpha h + ak)\tau\tau + \frac{P + Q\tau}{w} - \frac{P}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \beta - Mb h\tau - \frac{1}{2}M(\beta h + bk)\tau\tau + \frac{P' + Q'\tau}{w} - \frac{P'}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \gamma - Mc h\tau - \frac{1}{2}M(\gamma h + ck)\tau\tau + \frac{P'' + Q''\tau}{w} - \frac{P''}{\sqrt{E}}$$

$$x = a + \alpha\tau - \frac{1}{2}Ma h\tau\tau - \frac{1}{6}M(\alpha h + ak)\tau^3$$

$$+ \frac{Q}{G}(w - \sqrt{E}) + \frac{GP - FQ}{G\sqrt{G}} l\left(\frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}}\right) - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}$$

$$y = b + \beta\tau - \frac{1}{2}Mb h\tau\tau - \frac{1}{6}M(\beta h + bk)\tau^3$$

$$+ \frac{Q'}{G}(w - \sqrt{E}) + \frac{GP' - FQ'}{G\sqrt{G}} l\left(\frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}}\right) - \frac{P'\tau}{\sqrt{E}}$$

$$z = c + \gamma\tau - \frac{1}{2}Mc h\tau\tau - \frac{1}{6}M(\gamma h + ck)\tau^3$$

$$+ \frac{Q''}{G}(w - \sqrt{E}) + \frac{GP'' - FQ''}{G\sqrt{G}} l\left(\frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}}\right) - \frac{P''\tau}{\sqrt{E}}.$$

Or ici il faut remarquer que le caractère l signifie le loga-

rythme hyperbolique de la quantité qui est mise après, où l'on n'a qu'à multiplier le logarithme tabulaire par le nombre 2,30258509 pour avoir ce logarithme.

Maintenant, après avoir calculé toutes ces valeurs, on n'a qu'à mettre pour τ , le nombre de jours que dure l'intervalle dont il s'agit, pour avoir les élémens de l'intervalle suivant, qu'on désignera de nouveau par les lettres A, B, U, Z pour la Planète, & par a, b, c & α, β, γ pour la Comète; & ainsi on fera, selon les mêmes règles, le calcul pour tous les intervalles qu'on aura jugé à propos d'établir, jusqu'à ce qu'on sera parvenu au dernier qui donnera l'état où la Comète se trouve après que l'action de la Planète aura entièrement cessé: de là on n'a qu'à déterminer l'orbite que la Comète décrira après ce temps-là, pour la comparer avec celle qu'elle a décrite avant l'action de la Planète. C'est ce que je me propose dans l'Article suivant.

ARTICLE VI.

Détermination de l'orbite de la Comète, après que son mouvement sera dérangé par l'action de la Planète.

IL faut tirer pour cet effet du dernier intervalle de temps la valeur des lettres a, b, c & α, β, γ qui détermine l'état de la Comète, c'est-à-dire, son lieu & son mouvement lorsqu'elle est sortie de la sphère d'activité de la Planète, & c'est de ces six élémens qu'on pourra déterminer la nouvelle orbite de la manière suivante.

On commencera par déterminer le plan de cette orbite, ou *FIGURE II.* bien son intersection avec le plan de l'orbite de la Planète, avec son inclinaison. Soit pour le commencement de cette époque ou la fin du dernier intervalle, la Comète en τ & les trois coordonnées pour ce lieu $Sx = a, xy = b, yz = c$.

Or, pour le jour suivant, soit la Comète en z' , & par les vitesses connues, selon nos trois directions fixes, on aura pour ce lieu $Sx' = a + \alpha$, $x'y' = b + \beta$ & $y'z' = c + \gamma$ en mettant $\tau = 1$. Cela posé, le plan de l'orbite de la Comète sera déterminé, tant par le centre du Soleil S , que par les deux points z & z' . Pour cet effet, qu'on tire sur le plan de la planche qui représente celui de l'orbite de la Planète par les points y & y' , la droite $Vy y'$, & l'on aura l'intervalle $Vx = \frac{b\alpha}{\beta}$ & $Vy = \frac{bV}{\beta} \frac{\alpha\alpha + \beta\beta}{\alpha\alpha + \beta\beta}$. Maintenant, tirons par les points z & z' la ligne $Tz z'$ qui tombe en T sur la droite Vy , & puisque $yy' = \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}$, on fera $\gamma : \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta} = c : yT$, de sorte que $yT = \frac{\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}}{\gamma}$, laquelle étant retranchée de $Vy = \frac{bV}{\beta} \frac{\alpha\alpha + \beta\beta}{\alpha\alpha + \beta\beta}$ donne l'intervalle $VT = \frac{b\gamma - c\beta}{\beta\gamma} \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}$.

Donc puisque le point T est dans le même plan avec les deux points z & z' , la droite ST prolongée sera l'intersection de l'orbite de la Comète avec celle de la Planète. Il s'agit donc de trouver la position de cette ligne, ou bien l'angle $\gamma S \Omega$ qui est la longitude de la ligne des nœuds, que nous nommerons $= \Psi$. Ayant donc pour cet effet, dans le triangle SVT , le côté $SV = \frac{a\beta - b\alpha}{\beta}$ & $VT = \frac{b\gamma - c\beta}{\beta\gamma} \sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}$ avec l'angle xVT , dont la tangente est $\frac{\beta}{\alpha}$, le sinus $= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha\alpha + \beta\beta}}$ & le cosinus $= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha\alpha + \beta\beta}}$. Si nous baïssons du point T à l'axe la perpendiculaire TR , nous aurons $TR = \frac{b\gamma - c\beta}{\beta\gamma}$ & $VR = \frac{\alpha(b\gamma - c\beta)}{\beta\gamma}$; donc $SR = \frac{a\beta - b\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(b\gamma - c\beta)}{\beta\gamma} = \frac{a\gamma - c\alpha}{\gamma}$, par conséquent $\text{tag. } \Psi = \frac{b\gamma - c\beta}{a\gamma - c\alpha}$.

Ayant trouvé la ligne des nœuds $S\Omega$ qu'on y tire du point y , la perpendiculaire yp , qui fera $yp = b \cos. \Psi - a \sin. \Psi$.

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMÈTE. 23

Maintenant si l'on tiroit la droite $p\zeta$, il est clair que l'angle $yp\zeta$ mesurerait l'inclinaison de l'orbite de la Comète à celle de la Planète, de sorte que posant cette inclinaison $= \omega$, on aura $\text{tang. } \omega = \frac{c}{b \cos. \psi - a \sin. \psi}$.

Après avoir déterminé ces deux principaux élémens pour le mouvement de la Comète, considérons pour un temps quelconque de τ jours, après cette époque, les trois coordonnées pour le lieu de la Comète x, y & z ; & nous avons vu ci-dessus que le mouvement de la Comète, par la seule action du Soleil, est compris dans ces trois équations différentio-différentielles :

I. $\frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Mx}{v^3}$, II. $\frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{My}{v^3}$, III. $\frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Mz}{v^3}$,
 où v exprime la distance de la Comète au Soleil, de sorte que $v = \sqrt{xx + yy + zz}$, & partant $x dx + y dy + z dz = v dv$. Cela posé, qu'on fasse cette combinaison. I. $2 x dx +$ II. $2 y dy +$ III. $2 z dz$ qui nous donnera

$$\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{d\tau^2} = -\frac{2Mx dx + 2My dy + 2Mz dz}{v^3}$$

$$= -\frac{2M dv}{v^2}, \text{ dont l'intégrale est } \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\tau^2} = C + \frac{2M}{v},$$
 où il faut déterminer la constante C , en sorte que pour le commencement de l'époque il devienne $\frac{dx}{d\tau} = \alpha, \frac{dy}{d\tau} = \beta, \frac{dz}{d\tau} = \gamma$: donc puisqu'au commencement on a $v = \sqrt{aa + bb + cc}$, cette constante sera $C = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - \frac{2M}{\sqrt{aa + bb + cc}}$.
 Posons, pour abrégér, $\sqrt{aa + bb + cc} = f$ & $\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma} = \zeta$, pour avoir $C = \zeta\zeta - \frac{2M}{f}$, & notre équation intégrale deviendra $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2M}{f} + \frac{2M}{v}$.

A présent, considérons cette combinaison : I. $x +$ II. $y +$ III. z pour avoir cette équation : $\frac{x dx + y dy + z dz}{d\tau^2} = -\frac{M(x x + y y + z z)}{v^3}$

$= -\frac{M}{v}$, à laquelle on ajoute celle que nous venons de trouver, & on aura $\frac{x dx + dy^2 + z dz + d\tau}{d\tau^2}$
 $= \zeta\zeta - \frac{2M}{f} + \frac{M}{v}$, laquelle, à cause de $x dx + y dy + z dz = v dv$, se réduit à cette forme : $\frac{v dv}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2M}{f} + \frac{M}{v}$. Multiplions cette équation par $2 v dv$ pour la rendre intégrale, & l'intégrale se trouvera $\frac{v v dv^2}{d\tau^2} = C + \zeta\zeta vv - \frac{2 M v v}{f} + 2 M v$.

Pour déterminer maintenant la constante C par l'état initial, il faut considérer, que posant $\tau = 0$, il en doit résulter $\frac{v dv}{d\tau} = \frac{x dx + y dy + z dz}{d\tau} = a\alpha + b\beta + c\gamma$; & puisqu'alors il devient $v = f$, cette constante sera $C = (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 - \zeta\zeta ff$; or, à cause de $\zeta\zeta ff = (a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma)$ on aura $C = (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 - (a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = -(a\beta - b\alpha)^2 - (a\gamma - c\alpha)^2 - (b\gamma - c\beta)^2$. Au lieu de cette quantité négative, écrivons simplement $-gg$, de sorte que $C = -gg$, & partant notre équation intégrale fera $\frac{v v dv^2}{d\tau^2} = -gg + \zeta\zeta vv - \frac{2 M v v}{f} + 2 M v$, d'où nous tirons $d\tau^2 = \frac{v v dv^2}{-gg + \zeta\zeta vv - \frac{2 M v v}{f} + 2 M v}$. Posons

encore pour abréger $\frac{2 M}{f} - \zeta\zeta = n$, & prenant la racine carrée, nous aurons $d\tau = \sqrt{\frac{\pm v dv}{-gg + 2 M v - n v v}}$, où l'on devroit prendre le signe $-$ si l'on vouloit rapporter la Comète à son aphélie, mais puisqu'il convient de la rapporter à son périhélie, on prendra le signe $+$, en sorte qu'on aura $d\tau = \sqrt{\frac{v dv}{-gg + 2 M v - n v v}}$. Voilà donc une équation qui ne renferme que les deux variables v & τ , d'où l'on pourra déterminer l'une par l'autre.

Maintenant

Maintenant, pour déterminer les autres élémens, ayant tiré du Soleil la droite $Sz = v$, qu'on nomme l'angle $\Omega Sz = \phi$, qui étant pris dans le plan de l'orbite de la Comète en désignera l'argument de latitude, il est connu qu'on aura alors $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dv^2 + v v d\phi^2$, puisque l'une & l'autre formule exprime le quarré de l'élément de la courbe; & par tant notre première équation intégrale donnera $\frac{dv^2 + v v d\phi^2}{d\tau^2}$
 $= \zeta \zeta - \frac{2M}{f} + \frac{2M}{v}$, ou bien $dv^2 + v v d\phi^2 = \left(\zeta \zeta - \frac{2M}{f} + \frac{2M}{v} \right)$
 $\left(\frac{v v d\phi^2}{-gg + 2Mv - \eta v v} \right)$, d'où, en retranchant de part & d'autre
 $d v^2 (\zeta \zeta v v + \eta v v - 2 \frac{M v v}{f} + g g)$
 $d v^2$, il reste $v v d\phi^2 = \frac{f}{-gg + 2Mv - \eta v v}$
 $\frac{d v^2 (gg + (\frac{\zeta \zeta f + \eta f - 2M}{f}) v v)}{-gg + 2Mv - \eta v v}$ — qui, à cause de $\eta = \frac{2M}{f} - \zeta \zeta$,
se réduit à cette forme $v v d\phi^2 = \frac{gg d v^2}{-gg + 2Mv - \eta v v}$, d'où
l'on tire $d\phi = \frac{g d v}{v \sqrt{-gg + 2Mv - \eta v v}}$, où l'on se souviendra que
 $gg = ff \zeta \zeta - (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2$, ou bien
 $gg = (a\beta - b\alpha)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2$.

Ayant trouvé cette équation, introduisons les élémens ordinaires, par lesquels on détermine les mouvemens des Planètes par des sections coniques, & soit p le demi-paramètre de l'orbite, e l'excentricité, & ξ son anomalie vraie, pour avoir
 $v = \frac{p}{1 + e \cos \xi}$, en comptant l'anomalie vraie ξ , depuis le périhélie, d'où l'on aura $\frac{dv}{v} = \frac{e d\xi \sin \xi}{1 + e \cos \xi}$. Ensuite la formule irrationnelle
deviendra $\frac{1}{1 + e \cos \xi} \sqrt{(-gg(1 + e \cos \xi)^2 + 2Mp(1 + e \cos \xi) - \eta p p)}$, ou bien $\frac{1}{1 + e \cos \xi} \sqrt{(-gg + 2Mp - \eta p p - 2e g g \cos \xi + 2M e p \cos \xi - e e g g \cos^2 \xi)}$. Maintenant, qu'on fasse évanouir le terme $\cos \xi$, ce qui donne $2M e p - 2e e g g = 0$, ou bien $p = \frac{g g}{M}$. Outre cela, qu'on fasse

2 M $p - g g - n p p = e e g g$, & mettant pour n sa valeur, on aura $2 M p - g g - \frac{2 M f p}{f} + \zeta \zeta p p = e e g g$; ce qui, à cause de $p = \frac{g g}{M}$, donne $g g - \frac{2 g^4}{M f} + \frac{\zeta^2 g^4}{M M} = e e g g$, ou bien $1 - \frac{2 g g}{M f} + \frac{\zeta \zeta g g}{M M} = e e$; de sorte que l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{2 g g}{M f} + \frac{\zeta \zeta g g}{M M}}$, & la formule irrationnelle devien-

dra $1 + e \cos \xi = \sqrt{e^2 g^2 - e^2 g^2 \cos^2 \xi} = \frac{e g \sin \xi}{1 + e \cos \xi}$; d'où, en substituant ces valeurs, nous aurons $d \phi = d \xi$, ou bien $\phi = \xi + \text{const}$: on voit se former ici que la valeur de l'angle ϕ est connue pour le commencement de notre époque, savoir, égal à l'angle $\Omega S \zeta$; donc, si nous posons cet angle initial $= \delta$, & l'anomalie vraie pour le commencement $= \theta$, cette constante sera $= \delta - \theta$ de sorte que $\phi = \xi + \delta - \theta$.

Pour développer mieux ces valeurs, ayant trouvé ci-dessus la longitude du nœud $\gamma S \Omega = \Psi$, de sorte que $\tan \psi = \frac{b \gamma - c \beta}{a \gamma - c \alpha}$ & de la ligne $\gamma p = b \cos \psi - a \sin \psi$, on aura de la même manière $S p = a \cos \psi + b \sin \psi$; donc, puisque la distance $S \zeta$ étoit $= \sqrt{a a + b b + c c} = f$, nous aurons $\cos \delta = \frac{S p}{S \zeta} = \frac{a \cos \psi + b \sin \psi}{f}$, de sorte que par cette formule on connoît l'angle δ . Or pour θ qui marque l'anomalie vraie pour le commencement, puisqu'alors il devient $v = f$, notre formule principale nous donne $f = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, d'où nous

FIGURE III. tirons $\cos \theta = \frac{p - f}{e f}$. Ayant donc trouvé ces deux angles δ & θ , puisqu'au commencement l'angle $\Omega S \zeta$ étoit $= \delta$, si nous tirons la droite $S \Pi$ vers le périhélie de la Comète, à cause de l'angle $\Pi S \zeta = \theta$, on aura l'angle $\Omega S \Pi = \delta - \theta$, qui exprime la distance du périhélie à la ligne des nœuds: or, en chaque cas, on jugera aisément si la ligne $S \Omega$ est tirée vers le nœud ascendant ou descendant.

Ayant donc trouvé le demi paramètre de l'orbite $= \frac{g g}{M}$ & l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{\eta g g}{M M}}$, notre équation $v = \frac{p}{1 + e \cos \xi}$, en prenant $\xi = 0$, nous donnera la distance du périhélie au Soleil $= \frac{p}{1 + e}$; mais prenant $\xi = 180^\circ$, nous aurons la distance de l'aphélie au Soleil $= \frac{p}{1 - e}$; d'où l'on conclut le grand axe de l'orbite $\frac{2p}{1 - e e}$, dont la moitié ou bien la distance moyenne de la Comète au Soleil fera $\frac{p}{1 - e e}$. Or, puisque $p = \frac{g g}{M}$ & $1 - e e = \frac{\eta g g}{M M}$, cette distance moyenne, ou bien le demi-grand axe de l'orbite fera $\frac{M}{\eta}$; & de là on pourra aisément déterminer le temps périodique de la Comète, qui contiendra autant d'années que cette formule $\frac{M}{\eta} \sqrt{\frac{M}{\eta}}$ contient d'unités. Or cette détermination ne sauroit avoir lieu, que lorsque l'excentricité e est moindre que 1, ce qui arrive toutes les fois que η est une quantité positive, ou bien $\frac{2M}{f} > \zeta \zeta$. Mais s'il arrivoit qu'il fût $\frac{2M}{f} < \zeta \zeta$, l'orbite de la Comète seroit une hyperbole qui n'auroit point de temps périodique.

Reflexions sur la méthode qu'on vient d'exposer.

D'abord, je conviens que cette méthode n'est point peu embarrassante, à cause de la pluralité d'éléments qui y entrent dans le calcul de chaque intervalle. Mais il est certain que toutes les autres méthodes qu'on pourroit employer ne demandent pas moins de calcul, sur-tout quand on veut aussi déterminer les dérangemens causés dans le plan de l'orbite de la Comète, c'est-à-dire, dans la position de la ligne des nœuds, & dans l'inclinaison au plan de l'orbite de la Planète, puisqu'alors le nombre des éléments ne sauroit être plus petit. Mais aussi cette méthode renferme des avantages très-réels sur

toutes les autres qu'on pourroit imaginer , & cela par les raisons suivantes.

1°. De quelque méthode qu'on voudra se servir , on est toujours obligé de partager tout le calcul en certains morceaux , en établissant des intervalles de temps , pour chacun desquels on doit faire le calcul à part , pour en connoître tous les dérangemens causés dans les élémens de l'orbite de la Comète pendant chaque intervalle. Or , ordinairement on regarde ces intervalles comme constans , ce qui s'écarte bientôt considérablement de la vérité , à moins qu'on n'établisse les intervalles très-petits ; d'où il est clair que , puisque je tiens compte ici de la variabilité de tous les élémens dans chacun des intervalles , le calcul en doit devenir beaucoup plus exact , quoiqu'on fasse les intervalles considérablement plus grands que dans les autres méthodes , ce qui abrégera beaucoup le calcul tout entier.

2°. Cette circonstance a principalement lieu dans les intervalles où la distance entre la Planète & la Comète devient très-variable , où dans les autres méthodes on est obligé de subdiviser ces intervalles en plusieurs autres , comme on peut voir par le calcul rapporté ci-dessus , où j'ai été contraint de ne donner à ces intervalles de temps qu'une heure & demie ; & si j'eusse voulu poursuivre , il m'auroit fallu les faire plus petits encore. Or , dans la méthode présente , cet inconvénient cesse entièrement ; car , puisque tous les élémens y sont supposés variables , l'intégration fournira toujours les vrais dérangemens causés pendant chaque intervalle , quelque grande que puisse être la variabilité dans la distance de la Planète à la Comète , pourvu que le mouvement des principaux élémens demeure sensiblement uniforme ; ce qui ne manquera pas d'arriver , à moins qu'on ne fasse ces intervalles énormément grands. Ainsi , par cette raison , je puis soutenir qu'en employant la méthode présente , le calcul pourra toujours devenir très-considérablement plus aisé.

3°. Mais le plus grand avantage de cette méthode consiste en ce qu'elle peut également être appliquée à trouver les dérangemens que la Comète peut causer dans le mouvement de la Planète, sans que le calcul en devienne plus embarrassant ; au lieu qu'en se servant de quelque autre méthode, l'une & l'autre détermination demande des opérations particulières, puisqu'on y est obligé de regarder le mouvement de l'une comme connu, pendant qu'on cherche celui de l'autre. Or, en suivant la même route qui vient d'être exposée ici, il sera facile d'arranger l'analyse, en sorte qu'elle nous découvre en même temps tout le dérangement causé, tant dans la Comète, que dans la Planète, comme je ferai voir tout à l'heure.

4°. Or, comme le cas n'arrive que très - rarement qu'on connoisse le mouvement d'une Comète assez exactement pour qu'il vaille la peine d'en chercher le dérangement causé par quelque Planète, je crois que ma méthode pourra être employée avec le meilleur succès pour déterminer le dérangement causé dans le mouvement de deux Planètes par leur action mutuelle ; & cet avantage est d'autant plus grand, que les méthodes dont on s'est servi jusqu'ici s'écartent plus de la vérité ; & j'ai déjà remarqué au commencement sur les inégalités de la Terre, qui sont causées par l'action de Vénus, qu'elles peuvent différer au delà de 30 secondes de celles qui se trouvent dans les Tables de feu M. l'Abbé de la Caille. La raison de ce défaut est ouvertement celle que la plus grande & la plus petite distance entre la Terre & Vénus diffèrent trop entr'elles, pour que la résolution dans une série convergente puisse avoir lieu. Or, comme une si grande inégalité ne se trouve pas dans les distances de la Terre à Jupiter, les inégalités causées par cette Planète, rapportées dans les Tables de M. de la Caille, ne s'écartent pas tant de la vérité. Cependant elles demandent aussi une rectification tirée de cette méthode, qui, selon toute apparence, ne sera pas peu considérable.

50 Les Planètes Jupiter & Saturne se trouvent principalement dans le cas où la méthode ordinaire ne sauroit être que très-défectueuse, par la même raison qui est déjà rapportée ci-dessus ; & c'est ouvertement la cause pourquoi les Astronomes ont si peu réussi jusqu'ici à déterminer les dérangemens que ces deux Planètes se causent par leur action mutuelle. Or la méthode présente ne sauroit manquer de suppléer parfaitement à ce défaut, & elle fournira en même temps ce grand avantage, que les mêmes opérations découvriront à la fois le dérangement tant de l'une que de l'autre de ces deux Planètes ; & pour cet effet il sera nécessaire de poursuivre les deux Planètes, au moins par quelques révolutions entières, en partageant le temps en plusieurs intervalles, selon qu'on le jugera à propos, où l'on ne fera cependant pas obligé de mettre ces intervalles si petits, comme les autres méthodes l'exigent.

Je ne saurois mieux finir ces recherches, qu'en appliquant ma méthode à déterminer en général les dérangemens de deux Planètes ou Comètes, dont le mouvement est troublé par leur action mutuelle.

Determination générale des dérangemens que deux Planètes ou Comètes se causent par leur action mutuelle.

Quand deux Planètes ou Comètes, dont je marquerai l'une par la lettre Π , & l'autre par π , ne se meuvent pas dans le même plan, il est nécessaire sans doute de chercher non seulement les changemens qui seront causés dans la position & longueur de leurs grands axes & de leur excentricité, mais il faut aussi principalement avoir égard au changement causé dans le plan de leurs orbites pendant chaque intervalle de temps établi. Par cette raison, on ne sauroit plus rapporter le mouvement de l'un de ces deux corps au plan de l'orbite de l'autre, vu que celui-ci est également variable. Il sera donc absolument nécessaire de rapporter tous les deux mouvemens

à un plan fixe qui passe par le centre du Soleil, & il fera bon de l'établir, en sorte qu'il passe quasi par le milieu entre les deux orbites sensibles. Or, pour qu'il soit effectivement fixe, il n'y a d'autre moyen que de le faire passer par deux Etoiles qui occupent le même lieu au Ciel.

Que la planche représente donc ce plan fixe où le point *S* marque le centre du Soleil, d'où l'on tire vers un point fixe du Soleil l'axe *S* τ , & que la Planète Π , à un temps quelconque, soit en *Z*, & l'autre π en ζ , d'où ayant baissé les perpendiculaires *Z* *Y* & ζ *y* au plan de la planche, & de là à l'axe τ *S*, les perpendiculaires *Y* *X* & *y* *x*, qu'on nomme les coordonnées pour le corps Π : *S* *X* = *X*, *X* *Y* = *Y*, *Y* *Z* = *Z*, & pour l'autre corps π : *S* *x* = *x*, *x* *y* = *y* & *y* ζ = ζ , & le mouvement de l'un & de l'autre sera déterminé par les vitesses, suivant les mêmes directions, qui sont $\frac{dX}{d\tau}$, $\frac{dY}{d\tau}$, $\frac{dZ}{d\tau}$ & $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{d\zeta}{d\tau}$. Ensuite qu'on pose les distances *S* *Z* = $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ = *V* : *S* ζ = $\sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2}$ = *v* & *Z* ζ = $\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (\zeta-Z)^2}$ = *w*. Puis en exprimant le temps τ en jours, soit comme ci-dessus *M* = 0,0002959, ou bien *I* *M* = 6,4711984 : outre cela, qu'on prenne la fraction *N*, en sorte qu'il y ait *M* à *N*, comme la masse du Soleil à la masse du corps Π & *n*, en sorte qu'il soit *M* à *n*, comme la masse du Soleil à la masse du corps π . Cela posé, on aura pour le mouvement de l'un & de l'autre corps ces équations :

Pour le corps Π .

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{ddX}{d\tau^2} &= -\frac{MX}{V^3} + \frac{n(x-X)}{w^3} \\ \text{II. } \frac{ddY}{d\tau^2} &= -\frac{MY}{V^3} + \frac{n(y-Y)}{w^3} \\ \text{III. } \frac{ddZ}{d\tau^2} &= -\frac{MZ}{V^3} + \frac{n(\zeta-Z)}{w^3} \end{aligned}$$

Pour le corps π .

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} &= -\frac{Mx}{v^3} - \frac{N(x-X)}{w^3} \\ \text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} &= -\frac{My}{v^3} - \frac{N(y-Y)}{w^3} \\ \text{III. } \frac{dd\zeta}{d\tau^2} &= -\frac{M\zeta}{v^3} - \frac{N(\zeta-Z)}{w^3} \end{aligned}$$

Ayant maintenant établi autant d'intervalles de temps qu'on jugera à propos, soient pour le commencement d'un

intervalle quelconque les élémens pour Π , $X = A$, $Y = B$, $Z = C$ & $\frac{dX}{d\tau} = A$, $\frac{dY}{d\tau} = B$, $\frac{dZ}{d\tau} = C$; de la même manière pour l'autre corps π : $x = a$, $y = b$, $z = c$ & $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$, $\frac{dz}{d\tau} = \gamma$. En suivant les mêmes opérations rapportées ci-dessus, qu'on prenne ces valeurs : $H = \frac{1}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}$; $K = -\frac{3(AA + BB + CC)}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}$; $h = \frac{1}{(aa + bb + cc)^{\frac{1}{2}}}$; $k = -\frac{3(aa + bb + cc)}{(aa + bb + cc)^{\frac{3}{2}}}$; ensuite qu'on fasse pour l'un & pour l'autre corps $E = (a - A)^2 + (b - B)^2 + (c - C)^2$; $F = (b - B)(\beta - B) + (a - A)(\alpha - A) + (c - C)(\gamma - C)$ & $G = (\alpha - A)^2 + (\beta - B)^2 + (\gamma - C)^2$, de sorte qu'il devienne $w = \sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}$. Enfin, on calcule encore ces formules :

$$P = \frac{E(\alpha - A) - F(a - A)}{EG - FF} ;$$

$$Q = \frac{F(\alpha - A) - G(a - A)}{EG - FF} ;$$

$$P' = \frac{E(\beta - B) - F(b - B)}{EG - FF} ;$$

$$Q' = \frac{F(\beta - B) - G(b - B)}{EG - FF} ;$$

$$P'' = \frac{E(\gamma - C) - F(c - C)}{EG - FF} ;$$

$$Q'' = \frac{F(\gamma - C) - G(c - C)}{EG - FF} .$$

Ayant calculé toutes ces valeurs, on aura pour le mouvement de nos corps, pendant l'intervalle proposé à un temps de τ jours, après le commencement, les vitesses exprimées ainsi :

Pour le corps Π .

$$\frac{dX}{d\tau} = A - MAH\tau - \frac{1}{2}M(AH + AK)\tau\tau - \frac{n(P + Q\tau)}{w} + \frac{nP}{\sqrt{E}} .$$

$$\frac{dY}{d\tau} = B - MBH\tau - \frac{1}{2}M(BH + BK)\tau\tau - \frac{n(P' + Q'\tau)}{w} + \frac{nP'}{\sqrt{E}} .$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = C - MCH\tau - \frac{1}{2}M(CH + CK)\tau\tau - \frac{n(P'' + Q''\tau)}{w} + \frac{nP''}{\sqrt{E}} .$$

Pour

Pour le corps π .

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \alpha - M a h \tau - \frac{1}{2} M (\alpha h + a k) \tau \tau + \frac{N(P+Q)\tau}{w} - \frac{NP}{\sqrt{E}}. \\ \frac{dy}{d\tau} &= \beta - M b h \tau - \frac{1}{2} M (\beta h + b k) \tau \tau + \frac{N(P'+Q')\tau}{w} - \frac{NP'}{\sqrt{E}}. \\ \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - M c h \tau - \frac{1}{2} M (\gamma h + c k) \tau \tau + \frac{N(P''+Q'')\tau}{w} - \frac{NP''}{\sqrt{E}}.\end{aligned}$$

Or pour les lieux on aura les expressions suivantes :

Pour le corps Π .

$$\begin{aligned}X &= A + A \tau - \frac{1}{2} M A H \tau \tau - \frac{1}{2} M (A H + A K) \tau^3 \\ &\quad - \frac{nQ}{G} (w - \sqrt{E}) - \frac{n(GP-FQ)}{G\sqrt{G}} l \left(\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}} \right) + \frac{nP\tau}{\sqrt{E}}. \\ Y &= B + B \tau - \frac{1}{2} M B H \tau \tau - \frac{1}{2} M (B H + B K) \tau^3 \\ &\quad - \frac{nQ'}{G} (w - \sqrt{E}) - \frac{n(GP'-FQ')}{G\sqrt{G}} l \left(\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}} \right) + \frac{nP'\tau}{\sqrt{E}}. \\ Z &= C + C \tau - \frac{1}{2} M C H \tau \tau - \frac{1}{2} M (C H + C K) \tau^3 \\ &\quad - \frac{nQ''}{G} (w - \sqrt{E}) - \frac{n(GP''-FQ'')}{G\sqrt{G}} l \left(\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}} \right) - \frac{nP''\tau}{\sqrt{E}}.\end{aligned}$$

Pour le corps π .

$$\begin{aligned}x &= a + a \tau - \frac{1}{2} M a h \tau \tau - \frac{1}{2} M (\alpha h + a k) \tau^3 \\ &\quad + \frac{NQ}{G} (w - \sqrt{E}) + \frac{N(GP+FQ)}{G\sqrt{G}} l \left(\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}} \right) - \frac{NP\tau}{\sqrt{E}}. \\ y &= b + \beta \tau - \frac{1}{2} M b h \tau \tau - \frac{1}{2} M (\beta h + b k) \tau^3 \\ &\quad + \frac{NQ'}{G} (w - \sqrt{E}) + \frac{N(GP'-FQ')}{G\sqrt{G}} l \left(\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}} \right) - \frac{NP'\tau}{\sqrt{E}}. \\ z &= c + \gamma \tau - \frac{1}{2} M c h \tau \tau - \frac{1}{2} M (\gamma h + c k) \tau^3 \\ &\quad + \frac{NQ''}{G} (w - \sqrt{E}) - \frac{N(GP''-FQ'')}{G\sqrt{G}} l \left(\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}} \right) - \frac{NP''\tau}{\sqrt{E}}.\end{aligned}$$

Après avoir calculé toutes ces valeurs, on n'a qu'à donner à τ le nombre de jours qu'on veut assigner à chaque intervalle, & ces mêmes formules donneront les élémens néces-

faïtes pour le commencement de l'intervalle suivant, qu'on marquera de rechef par les lettres $A, B, C, A, B, C; a, b, c, \& \alpha, \beta, \gamma$, d'où l'on fera, selon les mêmes règles, le calcul pour l'intervalle suivant. Et ainsi on continuera le travail aussi loin qu'on le jugera nécessaire, en cas que l'action mutuelle devienne enfin insensible; & alors on tirera aisément des dernières valeurs tous les élémens nécessaires pour la détermination de l'orbite de chacun des deux corps Π & π .

Quand on veut appliquer cette méthode à la recherche des dérangemens que les deux Planètes Jupiter & Saturne se causent réciproquement, on les poursuivra par de tels intervalles de temps, pendant deux ou même plusieurs révolutions entières; & pourvu qu'on ait bien établi les élémens initiaux $A, B, C, A, B, C; a, b, c, \& \alpha, \beta, \gamma$, ces mêmes calculs montreront pour chaque temps le vrai lieu des deux Planètes, qu'on n'aura qu'à comparer ensuite avec les lieux calculés par les Tables astronomiques ordinaires; & les différences qu'on y remarquera fourniront le plus sûr moyen de corriger ces Tables, vu qu'on en conclura aisément toutes les corrections qu'il faut accorder pour toutes les positions différentes des deux corps entre elles. Ce qui est, selon toute apparence, l'unique moyen de parvenir enfin à une parfaite connoissance de tous les dérangemens qui se trouvent dans le mouvement de ces deux Planètes.

Rectification des formules précédentes par l'action que les deux Planètes exercent sur le Soleil.

Jusqu'ici, nous n'avons pas considéré les forces dont les deux Planètes agissent sur le Soleil, pour les transporter en sens contraire sur les Planètes, afin qu'on puisse regarder

le Soleil comme immobile. Car puisque ces forces agiroient également sur les deux Planètes, leur position respective, & partant aussi leur action mutuelle, dont il s'agit ici principalement, n'en sauroient être altérées. D'ailleurs, ces forces sont si petites, que l'effet sur le mouvement d'une Comète qui en pourroit résulter, est absolument nul. Mais quand il s'agit des dérangemens que deux Planètes se causent mutuellement, puisque leur action dure toujours, & que l'effet en est quasi accumulé, on ne sauroit négliger ces petites forces. Aussi rien n'est plus facile que d'en tenir compte, sans que le calcul en devienne plus pénible; on n'a pour cet effet qu'à prendre les termes affectés par la lettre M, qui résultent de l'action du Soleil sur la Planète, & écrire, au lieu de M, ou la lettre N pour le corps Π , ou la lettre n pour le corps π , & ajouter encore ces termes aux formules de l'article précédent. Or, comme ces nouveaux termes seront extrêmement petits, on n'en prendra que les premières parties, comme les plus considérables. On ajoutera donc à toutes les formules données dans l'article précédent, les additions suivantes :

<i>Aux formules</i>	<i>on ajoutera ces termes :</i>
$\frac{dX}{d\tau}$ & $\frac{dx}{d\tau}$	$- N A H \tau - n a h \tau.$
$\frac{dY}{d\tau}$ & $\frac{dy}{d\tau}$	$- N B H \tau - n b h \tau.$
$\frac{dZ}{d\tau}$ & $\frac{dz}{d\tau}$	$- N C H \tau - n c h \tau.$
X & x	$-\frac{1}{2} N A H \tau \tau - \frac{1}{2} n a h \tau \tau.$
Y & y	$-\frac{1}{2} N B H \tau \tau - \frac{1}{2} n b h \tau \tau.$
Z & z	$-\frac{1}{2} N C H \tau \tau - \frac{1}{2} n c h \tau \tau.$

Et ayant apporté les corrections, on pourra être assuré qu'on n'aura rien négligé pour rendre ces formules aussi exactes qu'il est possible.

S U P P L É M E N T.

Quoique les formules que je viens de donner n'aient pas besoin d'une explication plus détaillée pour les appliquer à tous les cas possibles, il ne sera pourtant pas superflu d'en faire tout le calcul numérique pour un cas déterminé. J'imaginerai donc pour cet effet une Comète à peu près semblable à celle dont j'ai parlé au commencement, qui passera fort près de la Terre, avec la seule différence que cette Comète ne se mouvra pas entièrement dans le plan de l'écliptique, pour avoir occasion d'appliquer aussi les formules qui servent à déterminer le plan de son orbite; & puisqu'il ne s'agit pas ici des dérangemens que la Comète pourroit produire dans le mouvement de la Terre, j'en regarderai la masse comme nulle, de sorte que $n = 0$. Donc, puisque la Terre occupe la place de la Planète, dont la masse est environ 360000 fois plus petite que celle du Soleil, à cause de $M = 0,0002959$, ou bien $1M = 6,4711984$, nous aurons $1N = 0,9148959$: où il faut remarquer que la caractéristique 0 est déjà trop grande de 10; ou bien on pourra représenter ce logarithme en sorte $1N = 90,9148959$, de sorte que la caractéristique 90 doit être diminuée de 100. Cela remarqué, j'établirai les élémens du calcul pour l'état initial où l'action de la Terre sur la Comète peut devenir sensible, de la manière suivante:

Elémens pour l'état initial.

$A = 1,0000000.$	$B = 0,0000000.$	$C = 0,0000000.$
$a = 1,0470833.$	$b = 0,0358333.$	$c = 0,0250000.$
$\overline{a} = A = 0,0470833.$	$\overline{b} = B = 0,0358333.$	$\overline{c} = C = 0,0250000.$

Elémens pour les vitesses.

$$\begin{array}{rcl} A = 0,0000000. & B = 0,0172028. & C = 0,0000000. \\ \alpha = -0,0237500. & \beta = -0,0008333. & \gamma = -0,0118750. \\ \alpha - A = -0,0237500. & \beta - B = -0,0180361. & \gamma - C = -0,0118750. \end{array}$$

Maintenant je dresserai sur ces élémens le calcul suivant ; selon l'Article V , après avoir remarqué que je prends ici l'écliptique même pour le plan fixe , auquel je rapporterai le mouvement de la Planète ; & j'aurai d'abord $H = 1$; $K = 0$; $h = 0,8688064$; $l h = 9,9389229$; $k = 0,0597915$; $l k = 8,7766397$, ensuite pour la distance $w = \sqrt{E + 2 F \tau + G \tau \tau}$ $E = 0,0041259$; $F = -0,0020614$; $G = 0,0010304$; $l E = 7,6155155$; $l F = (-) 7,3141601$; $l G = 7,0129931$. Or la formule w nous fait déjà voir que la Comète sera la plus proche de la Terre après le commencement de l'époque au temps $\tau = -\frac{F}{G} = 2,00063$ jours , & alors cette distance sera $w = \frac{\sqrt{EG - FF}}{\sqrt{G}} = 0,00133814$, ou bien les valeurs suivantes : $EG - FF = 0,000000001845$; $l (EG - FF) = 1,2659964$ & $F + \sqrt{EG} = 0,00000044$; mais , puisque cette valeur est presque évanouissante , & qu'une petite erreur pourroit devenir très-considérable , on remarquera que $F + \sqrt{EG} = \frac{EG - FF}{\sqrt{EG - F}}$, d'où , à cause de $\sqrt{EG - F} = 0,0041232$, on tire plus exactement $F + \sqrt{EG} = 0,000000447466$, & $l (F + \sqrt{EG}) = 3,0507599$. Ces valeurs étant trouvées , on en tire les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} P = - 505,3549 & \left| & l P = (-) 2,7035965. \\ P' = - 297,0895 & \left| & l P' = (-) 2,4728872. \\ P'' = 1376,7206 & \left| & l P'' = (+) 3,1388458. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 Q = 241,0785. & l Q = (+) 2,3821586. \\
 Q' = 139,7777. & l Q' = (+) 2,1454381. \\
 Q'' = -693,8970. & l Q'' = (-) 2,8412949.
 \end{array}$$

Après avoir trouvé ces valeurs, développons premièrement les six formules pour le mouvement de la Terre, & nous trouvons,

$$\frac{dX}{d\tau} = 0 - 0,0002959.\tau.$$

$$\frac{dY}{d\tau} = 0,0172028 - 0.\tau - 0,00000025.\tau\tau.$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = 0.$$

$$X = 1,000000 + 0.\tau - 0,0001479.\tau\tau.$$

$$Y = 0 + 0,0172028.\tau - 0.\tau\tau - 0,0000008.\tau^3.$$

$$Z = 0.$$

Ensuite pour la Comète ne développons d'abord que les termes qui ne contiennent pas la lettre N, & nous aurons :

$$\frac{dx}{d\tau} = -0,0237500 - 0,00026922\tau - 0,0000062106.\tau^2 + N S.$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -0,0008333 - 0,0000092131\tau - 0,00000020989.\tau^2 + N S'.$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -0,0118750 - 0,0000064278\tau + 0,00000130542.\tau^2 + N S''.$$

$$x = 1,0470833 - 0,0237500.\tau - 0,000134608\tau\tau - 0,0000010702\tau^3 + N f S d\tau.$$

$$y = 0,0358333 - 0,0008333.\tau - 0,000004607\tau\tau - 0,0000000700\tau^3 + N f S' d\tau.$$

$$z = 0,0250000 - 0,0118750.\tau - 0,000003214\tau\tau + 0,0000004351\tau^3 + N f S'' d\tau.$$

Ici, il est nécessaire de remarquer que ces valeurs auroient pu être tirées des élémens ordinaires du mouvement de la Terre & de la Comète, puisque le dérangement, causé par l'action de la Terre, n'est pas encore tiré en considération. Or, pour trouver ce dérangement, il faut encore calculer les valeurs suivantes :

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMÈTE. 39

$$S = \frac{P + Q\tau}{w} - \frac{P}{\sqrt{E}}; S' = \frac{P' + Q'\tau}{w} - \frac{P'}{\sqrt{E}}; S'' = \frac{P'' + Q''\tau}{w} - \frac{P''}{\sqrt{E}},$$

où l'on se souviendra que $w = \sqrt{E + 2F\tau + G\tau^2}$, & $l\sqrt{E} = 8,8077277$: outre cela nous aurons :

$$\int S d\tau = \frac{Q}{G} (w - \sqrt{E}) + \frac{GP - FQ}{G\sqrt{G}} l \frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}} - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}.$$

$$\int S' d\tau = \frac{Q'}{G} (w - \sqrt{E}) + \frac{GP' - FQ'}{G\sqrt{G}} l \frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}} - \frac{P'\tau}{\sqrt{E}}.$$

$$\int S'' d\tau = \frac{Q''}{G} (w - \sqrt{E}) + \frac{GP'' - FQ''}{G\sqrt{G}} l \frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}} - \frac{P''\tau}{\sqrt{E}}.$$

Et pour les coefficients :

$$l \frac{GP - FQ}{G\sqrt{G}} = (-) 2,8560917,$$

$$l \frac{GP' - FQ'}{G\sqrt{G}} = (-) 2,7351938;$$

$$l \frac{GP'' - FQ''}{G\sqrt{G}} = (-) 2,5546097,$$

$$l \frac{P}{\sqrt{E}} = (-) 3,8958388;$$

$$l \frac{P'}{\sqrt{E}} = (-) 3,6651295,$$

$$l \frac{P''}{\sqrt{E}} = (+) 4,3310881.$$

Où l'on remarquera que les caractéristiques de ces logarithmes ne sont pas défectives. Maintenant l'on ne sauroit aller plus loin avant que d'avoir fixé l'étendue de l'intervalle, ou bien le temps τ : or, puisque l'action de la Terre n'est sensible que pendant 4 jours ou environ, nous pourrions nous contenter d'un seul intervalle, en prenant $\tau = 4$, puisque d'un côté le mouvement de la Terre & de la Comète ne s'écarte guère sensiblement de l'uniformité rectiligne, & d'un autre côté, puisque le Soleil agit presque également sur les deux corps, de sorte que la courbure qui en résulte ne change

rien dans l'action mutuelle : outre cela , le dérangement lui-même est ouvertement trop petit , pour qu'il en puisse résulter la moindre altération dans les membres affectés par la lettre M. Nous pourrions donc hardiment poser $\tau = 4$; mais , pour la commodité du calcul , nous poserons $\tau = -\frac{2F}{G} = 4,001262$, afin qu'il devienne $w = \sqrt{E}$, d'où nous trouverons aisément les valeurs S, S', S". Savoir. $S = \frac{Q\tau}{\sqrt{E}} = 15017,510$; $S' = \frac{Q'\tau}{\sqrt{E}} = 8707,178$; $S'' = \frac{Q''\tau}{\sqrt{E}} = -43224,920$. Pour les formules intégrales , commençons par le membre logarithmique , qui , à cause de $\tau = -\frac{2F}{G}$, deviendra $l \frac{\sqrt{EG-F}}{\sqrt{EG+F}}$ $= l \frac{0,00412322}{0,000000447466} = l 12699,3320$ qui , étant converti en logarithme hyperbolique , donnera $3,9644766.2,3025851$ $= 9,1285400$; donc , posant pour abrégér $l \frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}}$ $= T$, nous aurons $l T = 0,9604013$, d'où nous tirons :

$$\int S d\tau = T \left(\frac{GP-FQ}{G\sqrt{G}} \right) - \frac{P\tau}{\sqrt{E}} = + 24926,283.$$

$$\int S' d\tau = T \left(\frac{GP'-FQ}{G\sqrt{G}} \right) - \frac{P'\tau}{\sqrt{E}} = + 13545,297.$$

$$\int S'' d\tau = T \left(\frac{GP''-FQ''}{G\sqrt{G}} \right) - \frac{P''\tau}{\sqrt{E}} = - 89033,550.$$

Ayant donc trouvé ces valeurs , nous en tirons pour la nouvelle orbite de la Comète les élémens suivans :

$$\frac{dx}{d\tau} = - 0,0249266 + 0,0000124 = - 0,0249142.$$

$$\frac{dy}{d\tau} = - 0,0008736 + 0,0000072 = - 0,0008664.$$

$$\frac{dz}{d\tau} = - 0,0118798 - 0,0000355 = - 0,0119153.$$

$$x = + 0,9497659 + 0,0000205 = + 0,9497864.$$

$$y = + 0,0324207 + 0,0000111 = + 0,0324318.$$

$$z = - 0,0225385 - 0,0000732 = - 0,0226117.$$

Détermination

Détermination de l'orbite de la Comète.		Avant l'action de la Terre.	Après l'action de la Terre.
Elémens.	$a =$	+ 0,9497659	+ 0,9497864
	$b =$	+ 0,0324207	+ 0,0324318
	$c =$	— 0,0225385	— 0,0226167
Vitesses.	$\alpha =$	— 0,0249266	— 0,0249142
	$\beta =$	— 0,0008736	— 0,0008664
	$\gamma =$	— 0,0118798	— 0,0119153
Log. tang. $\psi = l \left(\frac{b\gamma - c\beta}{a\gamma - c\alpha} \right) =$		8,5337554	8,5337249
d'où la longitude du nœud descendant $\psi =$		1° 57' 28"	1° 57' 27"
Log. tang. $\omega = l \frac{c}{b \cos. \psi - a \sin. \psi} =$		12,7047016	12,8846072
& de là l'inclinaison $\omega =$		89° 53' 12"	89° 55' 29"
$aa + bb + cc = ff =$		0,9036141	0,9036571
$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = \zeta\zeta =$		0,0007632	0,0007634
$ff\zeta\zeta - (aa + b\beta + c\gamma)^2 = gg =$		0,0001404	0,0001413
$\frac{2M}{f} - \zeta\zeta = \eta =$		— 0,0001406	— 0,0001408
Et de ces valeurs, on tire les élémens suivans :			
I. Le demi-grand axe de l'orbite $\frac{M}{\eta} =$		— 2,10496	— 2,10156
où le signe — marque que l'orbite est hyperbo- lique.			
II. Le demi-paramètre de l'orbite $\frac{gg}{M} = p =$		+ 0,47463	+ 0,47750
III. L'excentricité $e = \frac{\sqrt{1 - \eta gg}}{M} =$		1,10701	+ 1,10780
IV. Distance du périhélie au Soleil $= \frac{p}{1 + e} =$		0,22526	+ 0,22654
V. Log. cos. $\delta = l \frac{a \cos. \psi + b \sin. \psi}{f} =$		9,9998826	9,9998811
VI. Log. cos. $\theta = l \frac{p - f}{ef} =$		(—) 9,6554171	— 9,6524941
Et partant $\delta =$		1° 19' 56"	1° 20' 26"
$e\theta =$		116 53 26	116 41 46
VII. La distance du périhélie au nœud descendant =		64 26 38	64 38 40

C'est suivant les préceptes de l'Article VI que nous avons déterminé ces élémens , tant pour la première que pour la nouvelle orbite de la Comète , après avoir remarqué que la première partie des doubles élémens $\frac{d x}{d \tau}$, $\frac{d y}{d \tau}$, $\frac{d z}{d \tau}$ & x , y , z , ait lieu s'il n'y a point de perturbation , & que la seconde renferme l'effet de l'action de la Terre. Nous les avons mises séparément , afin qu'on puisse voir combien tous ces élémens ont été troublés par la force attractive de la Terre , & c'est sur ces doubles élémens que nous avons ajouté le présent calcul.

Quoiqu'un cas , tel que nous venons de considérer , favoit , qu'une Comète se meut dans une hyperbole , ne sauroit jamais avoir lieu , il servira pourtant à faire voir toutes les opérations arithmétiques qu'on aura à faire dans chaque cas proposé. Or , principalement on en peut voir combien peu l'orbite d'une Comète sera jamais altérée par l'action de quelque Planète auprès de laquelle elle passè ; tout le changement qui en peut résulter n'étant considérable que par rapport au temps périodique , où le moindre changement arrivé dans l'excentricité est de très-grande conséquence. Au reste , comme je n'ai établi ici qu'un seul intervalle , on comprend aisément que si une Comète passoit près de Jupiter ou de Saturne , on pourroit bien être obligé d'établir deux ou bien trois intervalles : mais , quoi qu'il en soit , le calcul entier sera toujours beaucoup plus aisé à exécuter & moins laborieux que selon les méthodes connues jusqu'à présent.



RÉFLEXIONS GÉNÉRALES.

L'essentiel de la méthode que je viens d'employer, consiste en ce que , pendant chaque intervalle de temps, j'ai regardé le mouvement de l'une & de l'autre Planète comme uniforme & rectiligne , quoique le vrai mouvement se fasse dans une ligne courbe , de sorte qu'on néglige dans chaque intervalle ce qui pourroit résulter de la courbure & de l'inégalité du mouvement. Donc , puisqu'il s'agit principalement de découvrir l'effet de l'action mutuelle , qui est renfermée dans les termes affectés par les lettres N & n , on peut avoir lieu de douter si ce qu'on néglige dans les premiers membres de nos équations différentielles du second degré , c'est-à-dire , dans les termes $-\frac{Nx}{v^3}$, $-\frac{Ny}{v^3}$, $-\frac{Nz}{v^3}$, ne sauroit surpasser ce qui résulte des petits termes ; ce qui rendroit sans doute cette méthode tout à fait incertaine. Pour lever ce doute important , j'ajouterai ici le théorème suivant , dont la démonstration fera voir clairement qu'on peut toujours se servir hardiment de cette supposition , sans risquer qu'elle porte jamais à faux , pourvu qu'on établisse les intervalles assez petits.

Théorème fondamental.

Ayant autant d'équation différentio - différentielles qu'on voudra de cette forme : $\frac{d \cdot d \cdot x}{d \tau^2} = P$, $\frac{d \cdot d \cdot y}{d \tau^2} = Q$, $\frac{d \cdot d \cdot z}{d \tau^2} = R$, où les quantités x , y , z peuvent être des fonctions quelconques du temps τ , dont l'élément $d\tau$ est supposé constant , & qu'on sache qu'au commencement, où $\tau = 0$, les valeurs de ces quantités ont été $x = a$, $y = b$, $z = c$: & de plus leurs valeurs

différentielles $\frac{d x}{d \tau} = \alpha$, $\frac{d y}{d \tau} = \beta$, $\frac{d z}{d \tau} = \gamma$. Il suffit de mettre dans les formules P, Q, R ces valeurs $x = a + \alpha \tau$, $y = b + \beta \tau$ & $z = c + \gamma \tau$, pour tirer de ces équations les vraies valeurs des quantités x , y , z , jusqu'à la quatrième puissance de τ ; de sorte qu'en ne donnant à τ qu'une valeur médiocre, le terme qui en renferme la quatrième puissance puisse être négligé sans aucune erreur.

Démonstration.

Soient les vraies valeurs qui conviennent aux quantités x , y , z , celles-ci :

$$x = a + \alpha \tau + p \tau \tau + p' \tau^3 + p'' \tau^4 + \&c.$$

$$y = b + \beta \tau + q \tau \tau + q' \tau^3 + q'' \tau^4 + \&c.$$

$$z = c + \gamma \tau + r \tau \tau + r' \tau^3 + r'' \tau^4 + \&c.$$

Dont il est certain que les termes constituent une série extrêmement convergente, pourvu que le temps τ ne surpasse point certaines limites. Supposons à présent qu'on substitue effectivement ces justes valeurs dans les formules P, Q, R, & qu'il en résulte ces quantités :

$$P = A + A \tau + P \tau \tau + P' \tau^3 + P'' \tau^4 + \&c.$$

$$Q = B + B \tau + Q \tau \tau + Q' \tau^3 + Q'' \tau^4 + \&c.$$

$$R = C + C \tau + R \tau \tau + R' \tau^3 + R'' \tau^4 + \&c.$$

Et on comprend aisément que les deux premiers termes A, A; B, B; C, C de ces formules seront uniquement déterminés par les valeurs a , α ; b , β ; c , γ , sans que les valeurs suivantes inconnues p , p' ; q , q' ; r , r' , &c. y entrent, puis-

que ces lettres sont affectées par de plus hautes puissances de τ ; & partant les deux premiers termes de ces formules seront absolument connus , de sorte qu'on aura les équations suivantes :

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = A + A \tau + P \tau\tau + P' \tau' + P'' \tau^2 + \&c.$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = B + B \tau + Q \tau\tau + Q' \tau' + Q'' \tau^2 + \&c.$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = C + C \tau + R \tau\tau + R' \tau' + R'' \tau^2 + \&c.$$

D'où la première intégration fournit les formules suivantes :

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha + A \tau + \frac{1}{2} A \tau\tau + \frac{1}{3} P \tau^3 + \frac{1}{4} P' \tau^4 + \frac{1}{5} P'' \tau^5 + \&c.$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \beta + B \tau + \frac{1}{2} B \tau\tau + \frac{1}{3} Q \tau^3 + \frac{1}{4} Q' \tau^4 + \frac{1}{5} Q'' \tau^5 + \&c.$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \gamma + C \tau + \frac{1}{2} C \tau\tau + \frac{1}{3} R \tau^3 + \frac{1}{4} R' \tau^4 + \frac{1}{5} R'' \tau^5 + \&c.$$

Et de là par la seconde intégration ,

$$x = a + \alpha \tau + \frac{1}{2} A \tau\tau + \frac{1}{6} A \tau^3 + \frac{1}{24} P \tau^4 + \frac{1}{120} P' \tau^5 + \frac{1}{720} P'' \tau^6 + \&c.$$

$$y = b + \beta \tau + \frac{1}{2} B \tau\tau + \frac{1}{6} B \tau^3 + \frac{1}{24} Q \tau^4 + \frac{1}{120} Q' \tau^5 + \frac{1}{720} Q'' \tau^6 + \&c.$$

$$\zeta = c + \gamma \tau + \frac{1}{2} C \tau\tau + \frac{1}{6} C \tau^3 + \frac{1}{24} R \tau^4 + \frac{1}{120} R' \tau^5 + \frac{1}{720} R'' \tau^6 + \&c.$$

Donc , pourvu qu'on prenne l'intervalle de τ assez petit pour que les termes qui renferment les quantités inconnues P , Q , R deviennent absolument insensibles dans le calcul , on pourra être assuré qu'en effaçant les termes , on pourra toujours compter sur la justesse des valeurs x , y , ζ & $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{d\zeta}{d\tau}$. De là on pourra aussi aisément connoître jusqu'à quel degré on doit diminuer le temps τ de chaque inter-

valle. Pour s'assurer davantage de cette vérité, on n'a qu'à jeter les yeux sur le calcul précédent pour la Comète supposée; on y verra clairement que les termes des valeurs x, y, z qui renferment τ sont déjà si petits, que tous les suivans ne sauroient être de la moindre conséquence; & partant tous les doutes qui pourroient se présenter contre cette méthode seront suffisamment dissipés.



S U P P L É M E N T A U M É M O I R E

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMETE QUI PASSE PRÈS D'UNE PLANETE.

COMME dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie Royale des Sciences , intitulé : *Recherches sur le dérangement d'une Comète qui passe près d'une Planete*, je n'ai pas rempli tous les points de cette matière épineuse & importante , n'y ayant développé que le cas où une Comète passe fort près d'une Planète, le gracieux accueil & le jugement honorable que cet illustre Corps a bien voulu accorder à mon Ouvrage , quoiqu'imparfait encore , autant que l'importance du sujet , m'encouragent à y joindre ce Supplément , où je me propose de développer le cas où les forces perturbatrices sont extrêmement petites , par rapport à la force principale dont la Comète est attirée vers le Soleil , ayant reconnu depuis , que les plus petites forces perturbatrices peuvent produire , avec le temps , des dérangemens assez considérables dans les orbites des Comètes ; & je me flatte que ces deux Mémoires joints ensemble , satisferont au but que l'illustre Académie a eu en vue en proposant cette question , dont l'importance lui a paru mériter la réitération.

Je remarque d'abord , conformément à la critique judicieuse de l'Académie Royale , que , lorsqu'une Comète se trouve à une très-grande distance du Soleil , tant s'en faut qu'on puisse négliger l'action des Planètes perturbatrices , qu'il peut arriver plutôt que l'attraction du Soleil en soit très-confi-

FIGURE I.

dérablement altérée, être réduite à rien, ou même devenir négative. Et pour mettre cette circonstance dans tout son jour, je suppose que le Soleil étant en \odot , une Comète se trouve en C , à une très-grande distance $\odot C = z$ du Soleil, pendant que Jupiter soit placé de l'autre côté, à la distance $\odot J = 1$. Soit ensuite la masse du Soleil = 1 & celle de Jupiter = M , & la Comète, dont la masse peut être négligée, sera premièrement poussée vers le Soleil par la force $= \frac{1}{z^2}$, & dans la même direction, par l'action de Jupiter, par la force $= \frac{M}{(1+z)^2}$. Ensuite, puisque Jupiter exerce sur le Soleil une force $= \frac{M}{1}$, pour maintenir le Soleil en repos, il faut appliquer cette force à la Comète en sens contraire, de sorte que la Comète sera repoussée du Soleil par la force $= M$, & poussée conjointement vers le Soleil par la force $= \frac{1}{z^2} + \frac{M}{(z+1)^2} - M$.

Or, puisqu'on estime la masse de Jupiter à celle du Soleil, en raison de 1 à 1024, si nous supposons la distance de la Comète au Soleil 32 fois plus grande que celle de Jupiter, ou bien $z = 32$, cette force qui agit sur la Comète sera $= \frac{1}{32^2 \cdot 33^2}$, & prenant z tant soit peu plus grand que 32, il est clair que cette force deviendra même négative. Ensuite, supposant que Jupiter se trouve de l'autre côté en J , de sorte que $\odot J = 1$, la Comète seroit attirée vers le Soleil, premièrement par les deux forces $\frac{1}{z^2}$ & $\frac{M}{(z-1)^2}$, & en second lieu, puisque Jupiter exerce sur le Soleil une force égale à M , celle-ci étant appliquée à la Comète en sens contraire, agira suivant la direction $C \odot$, de sorte que la force entière qui agit sur la Comète, sera $= \frac{1}{z^2} + \frac{M}{(z-1)^2} + M$, & dans le cas $z = 32$ & $M = \frac{1}{1024} = \frac{1}{32^2}$, cette force deviendra $= \frac{1}{32^2} + \frac{1}{31^2 \cdot 32^2} + \frac{1}{32^2}$, qui par conséquent est plus de deux fois plus grande que la seule force du Soleil.

Mais

Mais il faut remarquer ici que , dans cette supposition $\tau = 32$, le grand axe de l'orbite cométaire devoit être au moins $= 32$, & partant le demi-grand axe au moins $= 16$, pendant que le demi-grand axe de Jupiter n'est que de 1 ; d'où l'on peut conclure que le temps périodique de la Comète seroit à celui de Jupiter comme $16 \sqrt{16} : 1$; ou bien comme $64 : 1$; par conséquent , comme le temps périodique de Jupiter est de 12 années , il est clair que ce cas ne sauroit avoir lieu que très-rarement & point du tout , à moins que le temps périodique de la Comète ne soit plus grand que de 768 années ; & pour de telles Comètes ce temps périodique doit être entièrement incertain.

Après ces réflexions préliminaires sur l'action que les Planètes perturbatrices exercent sur le Soleil , je reprends mon sujet ; & pour mieux déterminer les dérangemens que les orbites des Comètes peuvent souffrir par l'action des Planètes , je supposerai , comme j'ai déjà dit , les forces perturbatrices extrêmement petites par rapport à la force principale dont la Comète est attirée vers le Soleil. Et puisque les lieux des Comètes doivent être rapportés pour chaque instant au lieu du Soleil , je rapporterai d'abord le mouvement de la Comète à un plan fixe , qui passe par le Soleil ; comme celui de l'écliptique , en déterminant son lieu pour chaque instant par trois coordonnées perpendiculaires entre elles , & en regardant le Soleil comme étant dans un perpétuel repos.

Soit donc \odot le centre du Soleil , que je considère comme immobile , en appliquant toutes les forces qui agissent sur lui , suivant des directions contraires à la Comète même , qui par conséquent doivent toujours être combinées avec les forces qui agissent immédiatement sur la Comète. Cela remarqué , qu'après un temps quelconque t , écoulé depuis une certaine époque , la Comète se trouve au point Z , dont le lieu soit déterminé par les trois coordonnées $\odot X = x$, $XY = y$, $YZ = z$, & , pour abrégé , je nommerai la distance au Soleil $\odot Z = v$, en sorte que $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$ soit maintenant la force

FIGURE II.

principale dont la Comète est poussée vers le Soleil = $\frac{A}{v^3}$, où A désigne la masse du Soleil, & quelles que soient les petites forces qui agissent encore outre cela sur la Comète, qu'on les décompose pour chaque instant, selon les directions des coordonnées, & qu'il soit la force suivant $ZP = L$, suivant $ZQ = M$, & suivant $ZR = N$. Cela posé, les principes du mouvement, en prenant l'élément du temps $d\tau$ constant, nous fournissent ces trois équations :

$$\text{I. } \frac{\Delta d d x}{d t^2} = - \frac{A x}{v^3} + L.$$

$$\text{II. } \frac{\Delta d d y}{d t^2} = - \frac{A y}{v^3} + M.$$

$$\text{III. } \frac{\Delta d d z}{d t^2} = - \frac{A z}{v^3} + N.$$

Pour ramener les quantités constantes A & Δ avec le temps t à des mesures absolues, nous n'avons qu'à appliquer les formules générales au cas du mouvement de la Terre autour du Soleil. Pour cet effet, considérons l'orbite de la Terre comme un cercle dont le rayon = 1, & que pendant le temps t elle ait parcouru un angle = τ . On aura donc $v = 1$, $x = \cos. \tau$, $y = \sin. \tau$ & $z = 0$. Donc puisque l'angle τ est proportionnel au temps t , sa différentielle $d\tau$ sera aussi constante, & partant $d d x = -d\tau \cos. \tau$ & $d d y = -d\tau \sin. \tau$: de là, en supposant nulles les forces perturbatrices L, M, N , les deux premières équations donneront $\frac{\Delta d \tau^2}{d t^2} = A$, & partant $\frac{\Delta}{d t^2} = \frac{A}{d \tau^2}$, substituant cette valeur dans nos trois équations, & en divisant par A , & mettant $\frac{L}{A} = p, \frac{M}{A} = q, \frac{N}{A} = r$: attendu que les forces perturbatrices renferment toujours la masse d'une certaine Planète, dont le rapport à la masse du Soleil A peut être regardé comme connu, en sorte que ces trois quantités p, q, r sont aussi des quantités déterminées & *per hypothesin* très-petites, les trois équations qui déterminent le mouvement de la Comète seront :

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{x}{v^3} + p.$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{y}{v^3} + q.$$

$$\text{III. } \frac{dz}{d\tau^2} = -\frac{z}{v^3} + r.$$

En combinant ces trois équations, on en tire les trois suivantes :

$$\text{I. } \frac{xdx dy - yddx}{d\tau^2} = qx - py.$$

$$\text{II. } \frac{ydz - zd dy}{d\tau^2} = ry - qz.$$

$$\text{III. } \frac{zdx - xdz}{d\tau^2} = pz - rx.$$

à l'occasion desquelles j'observe premièrement, qu'elles sont intégrables : en second lieu, qu'elles sont entièrement affinées entre elles, que deux contiennent la troisième, comme on peut voir en multipliant la première par z & la seconde par x , ou la seconde par x & la troisième par y , ou enfin, la première par z & la troisième par y , & en les sommant deux à deux : en troisième lieu, que les quantités $qx - py$, $ry - qz$ & $pz - rx$ expriment certains momens des forces perturbatrices par rapport aux trois axes auxquels les coordonnées sont parallèles ; de sorte que,

par rapport à l'axe, en sens, le moment de forces soit :

$$\odot C \dots AB \dots qx - py.$$

$$\odot A \dots BC \dots ry - qz.$$

$$\odot B \dots CA \dots pz - rx.$$

Or, si nous désignons ces momens par les caractères correspondans C, A, B, nous aurons par l'intégration :

$$\text{I. } \frac{xdy - ydx}{d\tau} = \int C d\tau = R.$$

$$\text{II. } \frac{ydz - zd y}{d\tau} = \int A d\tau = P.$$

$$\text{III. } \frac{zdx - xdz}{d\tau} = \int B d\tau = Q.$$

G ij

où il y a encore une remarque fort importante à faire : savoir, que les formules $x dy - y dx$, $y dz - z dy$, $z dx - x dz$, se rapportent à la projection de l'orbite cométaire sur les trois plans principaux des axes, desquels nous avons dit ci-dessus que les momens des forces s'y rapportent : car il y aura

l'élément de projection sur le plan, en sens.

$$\frac{x dy - y dx}{2} \dots\dots A \odot B \dots\dots AB.$$

$$\frac{y dz - z dy}{2} \dots\dots B \odot C \dots\dots BC.$$

$$\frac{z dx - x dz}{2} \dots\dots C \odot A \dots\dots CA.$$

Ce qui s'accorde parfaitement bien avec la première remarque sur les momens des forces ; car si les forces perturbatrices $p q r$ évanouissoient, ces élémens deviendroient proportionnels à l'élément du temps $d\tau$, comme les premiers principes l'enseignent.

Ayant donc trouvé trois équations différentielles du premier degré, mais dont deux renferment la troisième, tâchons d'en obtenir une quatrième, pour compenser cette dépendance. Or, en multipliant la première de nos équations différentielles initiales par $2 dx$, la seconde par $2 dy$, & la troisième par $2 dz$, leur somme nous fournira celle-ci :

$$\frac{2 dx dx + 2 dy dy + 2 dz dz}{d\tau^2} = - \frac{2}{v^3} (x dx + y dy + z dz)$$

+ $2(p dx + q dy + r dz)$, & en mettant l'élément de la courbe décrite $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$, à cause de $x dx + y dy + z dz = v dv$, il y aura par l'intégration, $\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{2}{v} + 2 \int p dx + q dy + r dz$, où la formule $p dx + q dy + r dz$ exprime la force tangentielle de la courbe multipliée par son élément ; d'où, si l'on met cette force tangentielle = T , il y aura $p dx + q dy + r dz = T ds$, & partant le carré de la vitesse $\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{2}{v} + 2 \int T ds$.

De plus, en multipliant la première de nos trois équations par x , la seconde par y , & la troisième par z , leur somme donnera $\frac{x d d x + y d d y + z d d z}{d \tau^2} = -\frac{1}{v} + p x + q y + r z$, à laquelle, si nous ajoutons l'intégrale que nous venons de trouver, savoir, $\frac{d s^2}{d \tau^2} = \frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d \tau^2} = \frac{2}{v} + 2 \int T d s$, il en résultera cette équation $\frac{x d d x + y d d y + z d d z + d x^2 + d y^2 + d z^2}{d \tau^2} = \frac{d \cdot v d v}{d \tau^2} = \frac{1}{v} + 2 \int T d s + p x + q y + r z$; & parce que la formule $p x + q y + r z$, divisée par v , exprime la force centrale qui résulte suivant la direction $\odot Z$; si nous nommons cette force $= K$, il y aura $\frac{d \cdot v d v}{d \tau^2} = \frac{1}{v} + K v + 2 \int T d s$, qui, étant multipliée par $2 v d v$, redevient intégrable, & l'intégrale fera $\frac{v v d v^2}{d \tau^2} = 2 v + 2 \int K v v d v + 4 \int v d v \int T d s$; d'où l'on tire $d \tau = \frac{v d v}{\sqrt{(2 v + 2 \int K v v d v + 4 \int v d v \int T d s)}}$.

Ayant donc déterminé l'élément du temps $d \tau$ par la variable v , nous allons voir quelle valeur on pourra tirer des trois équations différentielles du premier ordre, que nous avons obtenues par l'intégration : pour cet effet, nous les combinons en sorte que les coordonnées x, y, z sortent entièrement du calcul; ce qui se fait en ajoutant ensemble les carrés de ces trois équations. Or, à cause de $x x + y y = v v - z z$, $x x + z z = v v - y y$ & $y y + z z = v v - x x$, il y aura $v v (d x^2 + d y^2 + d z^2) - (x d x + y d y + z d z)^2 = d \tau^2 (P P + Q Q + R R)^2$, ou bien $v v d s^2 - v v d v^2 = d \tau^2 (P^2 + Q^2 + R^2)$. Or, si nous concevons que la Comète ait parcouru pendant le temps $d \tau$ dans son orbite le petit arc $d s$, il est clair qu'en nommant l'angle élémentaire décrit par ce mouvement $= d \phi$, il y aura $d s^2 - d v^2 = v v d \phi^2$, & de là notre équation fera $v v d \phi = d \tau \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$, & en mettant $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} = S$, il y aura $v v d \phi = S d \tau$.

Introduisons maintenant cet angle élémentaire $d\phi$ dans l'équation $\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{z}{v} + 2\int Tds$, & à cause de $ds^2 = dv^2 + vv d\phi^2$, il y aura $\frac{dv^2 + vv d\phi^2}{d\tau^2} = \frac{z}{v} + 2\int Tds$, de sorte que nous ayons à présent deux équations entre les trois variables v, τ & ϕ , dont la première nous donne $d\phi = \frac{S d\tau}{vv}$, & l'autre, en mettant $2\int Tds = T$, nous donne $dv^2 + vv d\phi^2 = \frac{z d\tau^2}{v} + T d\tau^2$; ou bien, à cause de $d\phi = \frac{S d\tau}{vv}$, il y aura $d\tau^2 (2v + Tvv - SS) = vv dv^2$, & partant $d\tau = \frac{v dv}{\sqrt{(2v + Tvv - SS)}} \text{ \& } d\phi = \frac{S dv}{v\sqrt{(2v + Tvv - SS)}}$.

Quoique nous ayons trouvé deux valeurs pour l'élément du temps $d\tau$, qui semblent assez différentes entre elles, on verra néanmoins bientôt qu'elles conviennent parfaitement, si l'on met, au lieu de SS , la valeur $PP + QQ + RR = \frac{vv ds^2}{d\tau^2} - \frac{vv dv^2}{d\tau^2}$, qui, à cause de $\frac{vv ds^2}{d\tau^2} = 2v + 2v\int Tds = 2v + Tvv \text{ \& } \frac{vv dv^2}{d\tau^2} = 2v + 2\int Kvv dv + 4\int v dv\int Tds$, substituée dans le dénominateur irrationnel de l'expression $d\tau$, la rend telle que nous l'avons assignée ci-dessus.

Reprenons maintenant nos trois équations différentielles :
 I. $\frac{y d\tau - \tau dy}{d\tau} = P$. II. $\frac{\tau dx - x d\tau}{d\tau} = Q$. III. $\frac{xdy - y dx}{d\tau} = R$,
 & en faisant I. $x +$ II. $y +$ III. z , il y aura $Px + Qy + Rz = 0$; où il est évident que, parce que les quantités P, Q, R ne peuvent pas varier sensiblement pendant un intervalle de temps très-petit, si on les prend pour constantes, cette équation pourra servir à déterminer le plan dans lequel la Comète se meut pendant ce petit espace de temps.

FIGURE III. Or, pour déterminer la mobilité de ce plan, soit $A \odot B$ le plan de l'écliptique, & $\odot N$ l'intersection que le plan cherché dans lequel la Comète se meut, fait avec le plan de l'écliptique, & il est clair que, parce que la Comète existe dans le

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMETE. 55

plan $\odot N$, il y aura dans toute la longueur de cette ligne $z = 0$, & partant sa position sera exprimée par l'équation $Px + Qy = 0$. Soit l'angle $A \odot N$, qui désigne la variation de la ligne des nœuds $= \zeta$, & il est clair que, parce que la fraction $\frac{y}{x}$ exprime la tangente de cet angle, il y aura $\text{tang. } \zeta = \frac{y}{x} = -\frac{P}{Q}$. Quant à l'inclinaison de ce plan à l'écliptique, il est évident que si l'on met $x = 0$, il y aura $Qy + Rz = 0$, & partant, si l'on fait dans la figure $\odot P = y$, il fera la perpendiculaire $PQ = z = -\frac{Qy}{R}$. Et si l'on tire du point P la perpendiculaire PR sur la ligne des nœuds, l'angle PRQ fera l'angle d'inclinaison que nous nommerons $= \eta$, & parce que la tangente est exprimée par $\frac{PQ}{PR} = -\frac{Q}{R \cos. \zeta}$, à cause de $PR = y \cos. \zeta$. Or nous avons $\text{tang. } \zeta = -\frac{P}{Q}$, & partant $\cos. \zeta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$, d'où l'on tire $\text{tang. } \eta = -\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{R}$, & partant $\sin. \eta = -\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}$ & $\cos. \eta = \frac{R}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}$.

Maintenant, constituons une certaine époque où la Comète se meuve dans le plan même de l'écliptique, & soit pour ce temps-là la valeur *constante* de nos trois intégrales $\int A d\tau = \alpha$, $\int B d\tau = \beta$ & $\int C d\tau = \gamma$, & après un temps τ écoulé depuis cette époque, nous aurons $\int A d\tau + \alpha = P$, $\int B d\tau + \beta = Q$ & $\int C d\tau + \gamma = R$. Or, à cause de $z = 0$, il y aura aussi $\alpha = 0$ & $\beta = 0$, afin qu'il soit $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, & partant nos valeurs P, Q, R seront $P = \int r y d\tau$, $Q = -\int r x d\tau$, $R = \gamma + \int d\tau (q x - p y)$, d'où, en substituant ces valeurs, il y aura pour cette époque $\text{tang. } \zeta = \frac{\int r y d\tau}{\int r x d\tau}$ & $\text{tang. } \eta = -\frac{\sqrt{(\int r y d\tau)^2 + (\int r x d\tau)^2}}{\gamma + \int d\tau (q x - p y)}$, où nous avons négligé dans le dénominateur l'intégrale $\int d\tau (q x - p y)$, qui évanouit devant la constante γ , parce que les quantités p & q sont censées être infiniment petites; ensuite il y aura $\sin. \zeta = \frac{\int r y d\tau}{\sqrt{(\int r y d\tau)^2 + (\int r x d\tau)^2}} = \frac{\int r y d\tau}{\gamma \text{ tang. } \eta}$,

& partant $\sin. \zeta \text{ tang. } \eta = \eta \sin. \zeta$ (à cause de η extrêmement petit) $= -\frac{fry d\tau}{\gamma}$, où il faut encore observer que la loi du changement instantané de ces deux élémens est telle que $d\eta = \eta d\zeta \cos. \psi$, ψ désignant l'argument de latitude.

Pour faire voir cela plus clairement, on n'a qu'à reprendre l'équation $\eta \sin. \zeta = -\frac{fry d\tau}{\gamma}$; & parce qu'il y a de même manière $\eta \cos. \zeta = -\frac{f r x d\tau}{\gamma}$, ces deux équations différenciées donnent $d\eta \sin. \zeta + \eta d\zeta \cos. \zeta = -\frac{r y d\tau}{\gamma}$, & . . .
 $d\eta \cos. \zeta - \eta d\zeta \sin. \zeta = -\frac{r x d\tau}{\gamma}$, qui étant multipliées, la première par $\sin. \zeta$, & la seconde par $\cos. \zeta$, & ensuite la première par $\cos. \zeta$, & la seconde par $\sin. \zeta$, fournissent ces deux équations, $d\eta = -\frac{r d\tau (y \sin. \zeta + x \cos. \zeta)}{\gamma}$,

FIGURE IV. & $\eta d\zeta = -\frac{r d\tau (y \cos. \zeta - x \sin. \zeta)}{\gamma}$. Or, en constituant le lieu de la Comète en Z infiniment peu au dessus de Y, & tirant la perpendiculaire YP, il aura ouvertement $\odot P = y \sin. \zeta + x \cos. \zeta$, & $YP = y \cos. \zeta - x \sin. \zeta$. Mais si l'on met l'angle N \odot Z = ψ , à cause de $\odot V = v$, il y aura $\odot P = y \sin. \zeta + x \cos. \zeta = v \cos. \psi$, & $YP = y \cos. \zeta - x \sin. \zeta = v \sin. \psi$, & partant $d\eta = -\frac{r v d\tau \cos. \psi}{\gamma}$, & $\eta d\zeta = -\frac{r v d\tau \sin. \psi}{\gamma}$, d'où il s'ensuit $d\eta = \eta d\zeta \cos. \psi$.

Pour réunir aux formules que nous venons de donner, & par lesquelles on est en état de déterminer, tant l'inclinaison de l'orbite cométaire à l'écliptique infiniment petite η , que la position de la ligne des nœuds ζ , ils nous font voir aussi que la mobilité de l'orbite dépend uniquement de la force perturbatrice r , qui agit perpendiculairement sur le plan de l'orbite, de sorte que la Comète demeureroit toujours dans le même plan, s'il n'y avoit que les forces p & q qui agissent sur lui, & qu'elle ne s'en écarte qu'en tant que la force r subsiste, dont l'action

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMETE. 57.

l'action est consumée par cette altération ; en sorte que , dans la détermination de l'inégalité du mouvement que nous allons entreprendre , il n'y ait que l'action des forces p & q à considérer , qui , si elles cessent d'agir , laisseroient à la Comète son mouvement uniforme , qui n'est dérangé qu'en tant que p & q agissent sur lui.

Pour déterminer donc cette aberration du mouvement uniforme qui ne peut être bien sensible , parce que les forces p & q sont censées être très-petites , il faut connoître pour chaque intervalle de temps la section conique dans laquelle la Comète se meut pour cet instant. Pour cet effet , soit \odot , le centre du Soleil , Y le lieu de la Comète qui soit donné aussi bien que son mouvement , soit la distance $\odot Y = v$, & l'angle par lequel il est déjà avancé depuis la direction fixe $\odot A$, savoir , $\angle A \odot Y = \phi$. Que la Comète parcoure avec un mouvement quelconque l'espace $Y y$, si l'on résout ce mouvement , suivant les directions $Y v$ & $Y u$, nous nommerons les vitesses $\frac{dv}{d\tau} = u$ & $\frac{v d\phi}{d\tau} = v \xi$, d'où nous pourrions déterminer l'espece de section conique que la Comète parcourt , en déduisant de nos données v , ϕ , u & ξ , le semi-paramètre , l'excentricité , l'anomalie vraie & le mouvement des apsides , ce qui pourra se faire de la manière suivante.

Soit Π le lieu du perihélie , l'angle $\angle A \odot \Pi = \pi$, l'anomalie vraie $\angle \Pi \odot Y = \omega = \phi - \pi$, le semi-paramètre $= f$ & l'excentricité $= g$, & l'on fait qu'il y a $\odot Y = v = \frac{f}{1 + g \cos. \omega}$ & $d\tau = \frac{v v d\phi}{\sqrt{f}}$, d'où , à cause de $\frac{d\phi}{d\tau} = \xi$, il y aura $\sqrt{f} = v v \xi$, & partant $f = v^2 \xi^2$, & delà $1 + g \cos. \omega = \frac{v^3 \xi^2}{f}$, ou bien $g \cos. \omega = \frac{v^3 \xi^2}{f} - 1$, d'où il s'en suit $\tan g. \omega = \frac{u v v \xi}{v^3 \xi^2 - f}$. Ensuite , reprenant $v = \frac{f}{1 + g \cos. \omega}$, il y aura $d v = \frac{f g d \omega \sin. \omega}{(1 + g \cos. \omega)^2}$, & partant à cause de $d\tau = \frac{v v d\phi}{\sqrt{f}} = \frac{v v d\omega}{\sqrt{f}} = \frac{f d \omega \sqrt{f}}{(1 + g \cos. \omega)^2}$, il y aura $\frac{dv}{d\tau} = u = \frac{g \sin. \omega}{\sqrt{f}} = \frac{g \sin. \omega}{v v \xi}$, & partant $g = \frac{u v v \xi}{\sin. \omega}$.

FIGURE VI. Considérons maintenant l'action des forces perturbatrices p & q , & pour cet effet, introduisons nos deux coordonnées $\odot X = x$, $X Y = y$, & au lieu de deux forces $Y P = p$, & $Y Q = q$, introduisons-en deux autres qui agissent suivant les directions $Y m$ & $Y n$, & soit celle-ci $= n$ & l'autre $= m$, & il y aura, à cause de $A \odot Y = \phi$, la force $p = m \cos \phi - n \sin \phi$, & $q = m \sin \phi + n \cos \phi$, & nous aurons pour le mouvement que l'action de ces forces produit :

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\frac{x}{v^3} + m \cos \phi - n \sin \phi, \text{ \&}$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\frac{y}{v^3} + m \sin \phi + n \cos \phi,$$

ou bien, à cause de $x = v \cos \phi$ & $y = v \sin \phi$, il y aura, en substituant ces valeurs, aussi bien que leurs différentielles :

$$\text{I. } \frac{d^2 v \cos \phi - 2 v d\phi \sin \phi - v d^2 \phi \cos \phi - v d^2 \phi \sin \phi}{d\tau^2} = -\frac{\cos \phi}{v} + m \cos \phi - n \sin \phi.$$

$$\text{II. } \frac{d^2 v \sin \phi + 2 v d\phi \cos \phi - v d^2 \phi \sin \phi + v d^2 \phi \cos \phi}{d\tau^2} = -\frac{\sin \phi}{v} + m \sin \phi + n \cos \phi.$$

Or, de ces deux équations, on tire par les combinaisons : $\text{I.} \times \cos \phi + \text{II.} \times \sin \phi$ & $\text{II.} \times \cos \phi - \text{I.} \times \sin \phi$ les deux suivantes : $\frac{d^2 v - v d^2 \phi}{d\tau^2} = -\frac{1}{vv} + m$ & $\frac{2 v d\phi + v d^2 \phi}{d\tau^2} = n$, qui, à cause de $\frac{dv}{d\tau} = u$ & $\frac{d\phi}{d\tau} = \xi$, se réduisent à celles-ci $\frac{du}{d\tau} - v \xi^2 = -\frac{1}{vv} + m$ & $2 u \xi + \frac{v d\xi}{d\tau} = n$, d'où l'on tire $\frac{du}{d\tau} = v \xi^2 - \frac{1}{vv} + m$ & $\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{n - 2 v \xi}{v}$.

Or, pour déterminer les variations de l'orbite cométaire, il faut considérer que si le mouvement de la Comète a été dans la section conique que nous avons considérée ci-dessus, & qu'elle continuoît de s'y mouvoir si les forces perturbatrices m & n , que nous venons de substituer aux forces p & q , celloient

d'agir ; ces forces tendront continuellement à changer les éléments, en sorte qu'ils seront augmentés après chaque élément du temps $d\tau$ écoulé, de leurs différentielles.

Reprenons donc, premièrement, notre équation $f=v^4\xi^2$, qui, différenciée & divisée par $d\tau$, donne $\frac{df}{d\tau} = \frac{4v^3\xi dv}{d\tau} + \frac{2v^4\xi d\xi}{d\tau}$; ou bien, à cause de $\frac{dv}{d\tau} = u$ & $\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{n-2u\xi}{v}$, il y aura $\frac{df}{d\tau} = 2n v^3 \xi$, & partant $df = 2n v^3 \xi d\tau$. De la même manière, si nous différencions les équations $g \sin. \omega = u v v \xi$ & $g \cos. \omega = v^3 \xi^2 - 1$, & divisons par $d\tau$; nous aurons, après avoir substitué, au lieu de $\frac{du}{d\tau}$, $\frac{d\xi}{d\tau}$ & $\frac{dv}{d\tau}$, leurs valeurs, ces deux équations :

$$\text{I. } \frac{dg \sin. \omega + g d\omega \cos. \omega}{d\tau} = n u v + m v v \xi + v^3 \xi^2 - \xi.$$

$$\text{II. } \frac{dg \cos. \omega - g d\omega \sin. \omega}{d\tau} = 2 n v v \xi - n v v \xi^2,$$

qui, à cause de $v^3 \xi^2 - \xi = g \xi \cos. \omega$ & $u v v \xi^2 = g \xi \sin. \omega$, se réduisent à celles-ci :

$$\text{I. } \frac{dg \sin. \omega + g d\omega \cos. \omega}{d\tau} = n u v + m v v \xi + g \xi \cos. \omega.$$

$$\text{II. } \frac{dg \cos. \omega - g d\omega \sin. \omega}{d\tau} = 2 n v v \xi - g \xi \sin. \omega ;$$

& ces deux équations nous fournissent les deux suivantes, par les combinaisons :

$$\text{I.} \times \sin. \omega + \text{II.} \times \cos. \omega, \text{ \& I.} \times \cos. \omega - \text{II.} \times \sin. \omega.$$

$$\frac{dg}{d\tau} = m v v \xi \sin. \omega + n v (u \sin. \omega + 2 v \xi \cos. \omega) \text{ \& }$$

$$\frac{g d\omega}{d\tau} = m v v \xi \cos. \omega + n v (u \cos. \omega - 2 u \xi \sin. \omega) + g \xi ;$$

& enfin, à cause de $d\pi = d\phi - d\omega$ & $\frac{d\pi}{d\tau} = \xi - \frac{d\omega}{d\tau}$, il y

$$\text{aura pour le mouvement des abscisses } \frac{d\pi}{d\tau} = - \frac{m v v \xi \cos. \omega}{g} - \frac{n v (u \cos. \omega - 2 v \xi \sin. \omega)}{g}.$$

Remarquons, par rapport à ces différentielles, 1^o, que si les forces m & n cessioient d'agir, le paramètre de l'orbite ne su-

bît aucun changement aussi peu que l'excentricité comme la nature exige. Or, dans ce cas, il y auroit $\frac{g d\omega}{d\tau} = g\xi = \frac{g d\phi}{d\tau}$, ou bien $d\omega = d\phi$, c'est-à-dire que, parce que la ligne des abscisses seroit en repos, il y auroit l'angle π constant, & par conséquent $d\phi = d\omega$, ce qui s'ensuivroit aussi de la quatrième équation. 2°. En substituant, au lieu de v, u, ξ , leurs valeurs dans ces différentielles, nous aurons :

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{2nf\sqrt{f}}{1+g\cos\omega}.$$

$$\frac{dg}{d\tau} = m\sin\omega\sqrt{f} + n\sqrt{f}\left(\frac{g\sin\omega^2}{1+g\cos\omega} + 2\cos\omega\right).$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{m\cos\omega\sqrt{f}}{g} - \frac{n\sin\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{1+g\cos\omega}{1+g\cos\omega}\right) + \frac{(1+g\cos\omega)^2}{f\sqrt{f}}.$$

$$\frac{d\pi}{d\tau} = -\frac{m\cos\omega\sqrt{f}}{g} + \frac{n\sin\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{1+g\cos\omega}{1+g\cos\omega}\right).$$

Rassemblons maintenant tout ce que nous avons trouvé jusqu'ici, pour saisir d'un coup d'œil toutes les opérations que la détermination des dérangemens d'une Comète exige. Et parce que nous avons d'abord établi que les forces perturbatrices soient extrêmement petites par rapport à la force principale dont le corps est attiré vers le Soleil, en sorte qu'on puisse regarder son mouvement comme régulier dans une orbite elliptique pendant un espace de temps très-petit, nous avons établi une certaine époque pendant laquelle la Comète est supposée se mouvoir dans le plan $A \odot B$, & cette orbite factice dans laquelle la Comète continueroit son mouvement s'il n'y avoit point de forces perturbatrices qui agissent sur lui, nous a fourni les moyens de déterminer pour chaque élément de temps tous les changemens entre cette orbite imaginaire & la vraie orbite de la Comète. Car ayant constitué le lieu du périhélie en Π , l'angle $A \odot \Pi = \pi$, le semi-paramètre $= f$, l'excentricité $= g$, nous avons établi qu'après un espace de temps écoulé depuis l'époque fixée, la Comète se trouve dans l'orbite factice en Y , son anomalie vraie $A \odot Y = \omega$, & sa

FIGURE V.

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMÈTE. 61

longitude $A \odot Y = \pi + \omega$; on fait que sa distance au Soleil $\odot Y$ est $= \frac{f}{1 + g \cos \omega}$.

Pour déterminer ensuite les forces perturbatrices qui agissent FIGURE VII. sur la Comète, je considère un autre corps quelconque au dessus du plan $A \odot B$ en P , & après avoir abaissé sur le plan la perpendiculaire $P Q$, & joint les droites $P \odot$ & $Q \odot$, aussi bien que $P Y$ & $Q Y$, je suppose la masse du corps perturbant en $P = M$ & la masse du Soleil $= 1$. Cela établi, la force dont le corps agit sur le Soleil en sens $\odot P$, sera $= \frac{M}{P \odot^2}$, & la force qui agit sur la Comète en sens $Y P$ $= \frac{M}{Y P^2}$. Or la force suivant $\odot P$, qui doit être appliquée à la Comète en sens contraire $P \odot$, peut être résolue en deux autres, suivant les directions $P Q$ & $Q \odot$, & la force agissante en sens $Y P$ aussi en deux autres, suivant les directions $Q P$ & $Y Q$, & nous aurons :

1°. La force, suivant $P Q = M \frac{P Q}{P \odot^3}$.

2°. $Q \odot = M \frac{Q \odot}{P \odot^3}$.

De la même manière :

3°. La force, suivant $Q P = M \frac{Q P}{Y P^3}$.

4°. $P Q = M \frac{Y Q}{Y P^3}$.

Puis donc que la Comète est attirée en haut par la force 3, & en bas par la force 1, la force perturbatrice qui agit perpendiculairement, & que nous avons désignée ci-dessus pour la lettre r , sera $r = M P Q \left(\frac{1}{Y P^3} - \frac{1}{P \odot^3} \right)$, qui agit en haut lorsque $P \odot > Y P$, en bas lorsque $P \odot < Y P$, & évanouit lorsque $Y P = P \odot$.

Quant aux forces 2 & 4 qui agissent dans le plan même, si on les résout, la première suivant $Q R$ & $\odot R$, & l'autre suivant $Y R$ & $R Q$, on aura :

$$1^{\circ}. \text{ La force suivant } QR = M \frac{QR}{P \odot^3}.$$

$$2^{\circ}. \quad \quad \quad R \odot = M \frac{R \odot}{P \odot^3}.$$

$$3^{\circ}. \quad \quad \quad YR = M \frac{YR}{Y P^3}.$$

$$4^{\circ}. \quad \quad \quad RQ = M \frac{RQ}{Y P^3}.$$

Nous avons donc pour les forces perturbatrices m & n les valeurs $m = -M \frac{YR}{Y P^3} - M \frac{R \odot}{P \odot^3}$, & $n = MQR \left(\frac{1}{Y P^3} - \frac{1}{P \odot^3} \right)$.

Quant aux élémens de l'orbite, nous les avons déterminés, en sorte que si la longitude $= \phi$, la distance au Soleil $= r$, la vitesse $\frac{dr}{dt} = u$ & $\frac{v d\phi}{dr} = v\xi$, il y ait pour le semi-paramètre $f = v^2 \xi^2$, pour l'anomalie vraie ω , $\tan \omega = \frac{u v v \xi}{v^3 \xi^2 - 1}$, pour l'excentricité $g = \frac{u v v \xi}{\sin. \omega}$, & pour le lieu du périhélie ou le mouvement des abscisses $\pi = \phi - \omega$. Or, par l'action des forces perturbatrices, ces élémens seront changés en sorte qu'après chaque élément de temps $d\tau$, ils soient augmentés de leurs différentielles, c'est-à-dire, f de $df = \frac{2 n f d\tau \sqrt{f}}{1 + g \cos. \omega}$, g de $dg = m d\tau \sin. \omega \sqrt{f} + n d\tau \sqrt{f} \left(\frac{g \sin. \omega^2}{1 + g \cos. \omega} + 2 \cos. \omega \right)$, π de $d\pi = -\frac{m d\tau \cos. \omega \sqrt{f}}{g} + \frac{n d\tau \sin. \omega \sqrt{f}}{g} \left(\frac{2 + g \cos. \omega}{1 + g \cos. \omega} \right)$ & ω de $d\omega = \frac{(1 + g \cos. \omega)^2 d\tau}{f \sqrt{f}} - d\pi$.

Mais comme il n'est pas à espérer qu'on puisse parvenir directement aux intégrales de ces formules, on se verra obligé de recourir au même expédient dont j'ai fait usage, en calculant les élémens d'une Comète imaginaire dont j'ai parlé au commencement de mon Mémoire, & que j'ai aussi proposé pour calculer l'effet de l'action du Soleil & de la Planète sur la Comète, c'est-à-dire, d'établir plusieurs intervalles de temps, & de calculer pour chacun, tant les forces m , n , r , que l'angle ω , & les incréments des élémens de l'orbite, dont la

omme donnera les vrais incréments que ces élémens reçoivent, où l'on pourra sans hésiter prendre pour l'élément du temps $d\tau$ les intervalles assez petits, établis depuis l'époque fixée, comme j'ai fait dans mes premières recherches.

FIGURE VIII.

Enfin, quant à la ligne des nœuds & à l'inclinaison de l'orbite à l'écliptique, dont la variation ne dépend, comme nous avons déjà remarqué, que de la force perturbatrice r , si nous considérons l'orbite factice $A Y B$, dans laquelle la Comète se meut, & que nous supposons qu'elle se trouve en Y vers le temps τ écoulé depuis l'époque où elle est attirée en haut par la force $Y R = r$, soit $\odot X = x$, $X Y = y$, & les momens de la force r par rapport aux axes $\odot A$ & $\odot B$, seront $r y$ & $r x$. Supposé donc qu'on ne puisse intégrer actuellement, si l'on établit des intervalles de temps assez petits pour qu'ils puissent être exprimés sans erreur sensible par l'élément de temps $d\tau$, il faudra déterminer ces momens pour chacun de ces intervalles séparément, & leurs sommes pour tout l'espace de temps τ , seront $\int r x d\tau = P$ & $\int r y d\tau = Q$. Soit ensuite pour le temps τ , la ligne des nœuds en $\odot \Omega$, & l'angle $A \odot \Omega = \zeta$, & l'inclinaison $= \eta$, & nous avons trouvé ci-dessus $\cos. \zeta \sin. \eta = \frac{\int r x d\tau}{\gamma}$ & $\sin. \zeta \sin. \eta = \frac{\int r y d\tau}{|\gamma|}$, où γ désigne dans le mouvement régulier la valeur de $\frac{v v d\varphi}{d\tau} = v v \xi = \sqrt{f}$, d'où nous aurons $\cos. \zeta \sin. \eta = \frac{P}{\sqrt{f}}$, $\sin. \zeta \sin. \eta = \frac{Q}{\sqrt{f}}$, partant $\tan. \zeta = \frac{Q}{P}$ & $\sin. \zeta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$, d'où l'on tire
 $\sin. \eta = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{f}}$.

Par ce que nous venons de dire dans ce résumé, on voit clairement qu'on est en état d'assigner de cette manière pour un temps quelconque écoulé depuis l'époque fixée, l'espèce de courbe dans laquelle la Comète se meut pour lors, aussi bien que la situation du plan de cette orbite, par rapport au plan fixe $A \odot B$, ou à l'écliptique, qui étant une fois déterminées, conduiront facilement à la connoissance du vrai

64 RECH. SUR LE DÉRANG. D'UNE COMETE.

lieu de la Comète. Je me flatte donc d'avoir, satisfait ici d'une manière assez succinète à tous les points de la question proposée. J'aurois pu appliquer cette méthode à quelque Comète en particulier ; mais comme l'Académie Royale a déclaré expressément qu'elle n'exige pas ces applications de la théorie à des cas spéciaux, je finis ici mon Mémoire, en laissant aux Juges éclairés de cet illustre Corps, à décider jusqu'à quel point j'ai atteint le but qu'elle eut en vue en proposant cette matière importante,

F I N.

Fig. 1.

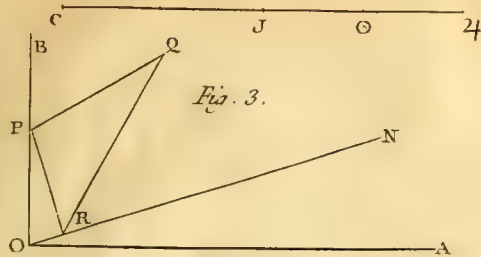


Fig. 3.

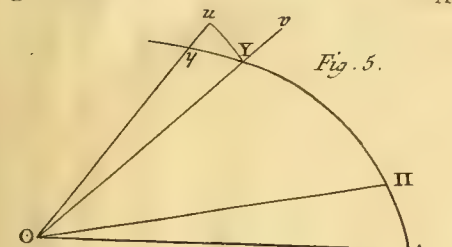


Fig. 5.

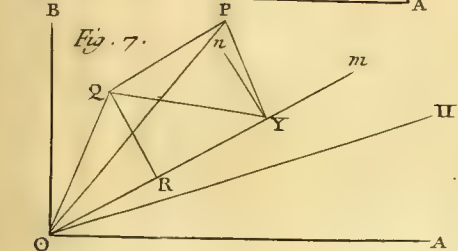


Fig. 7.

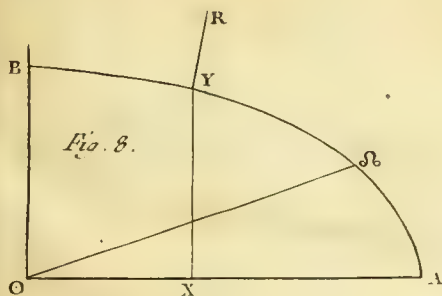


Fig. 8.

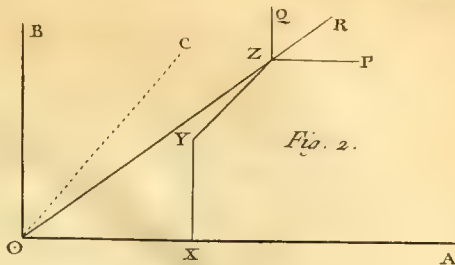


Fig. 2.

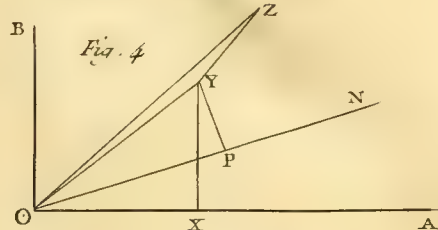


Fig. 4.

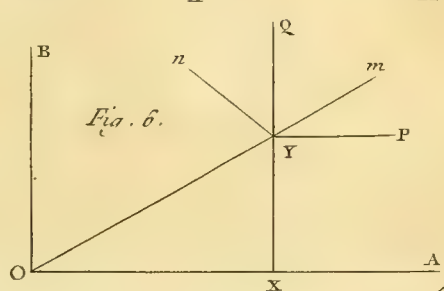


Fig. 6.

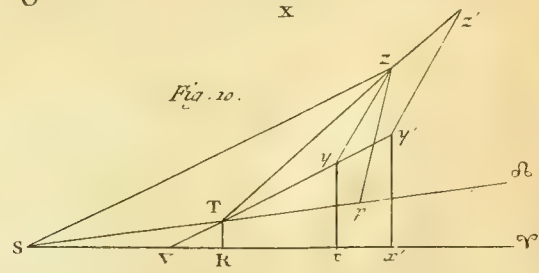


Fig. 10.

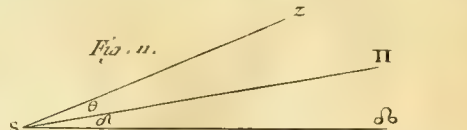


Fig. 11.

Fig. 12.

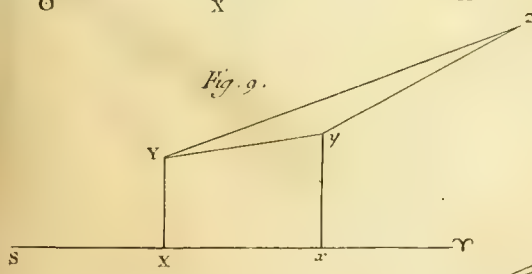
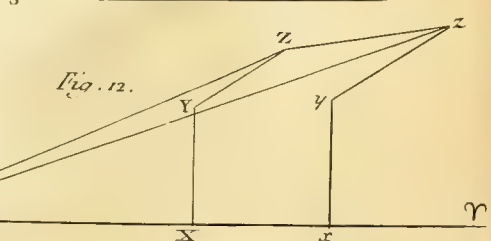
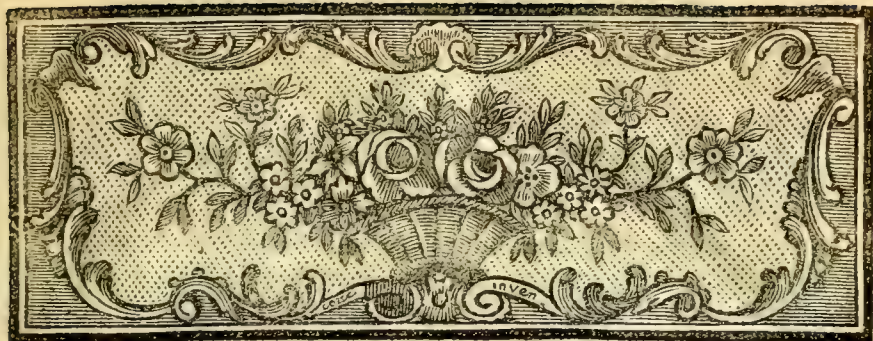


Fig. 9.





RECHERCHES

SUR

LA THÉORIE

DES PERTURBATIONS

QUE LES COMÈTES PEUVENT EPROUVER

PAR L'ACTION DES PLANÈTES.

Ces Recherches sont divisées en quatre Sections, que je vais parcourir sommairement.

Dans la première Section, je donne d'abord les équations générales du mouvement d'une Comète autour du Soleil, en ayant égard aux perturbations qu'elle peut éprouver par l'action d'une ou de plusieurs Planètes, & en rapportant les lieux tant de la Comète que des Planètes à des coordonnées rectangles. Je simplifie ensuite ces équations en partageant chacune d'elles en deux, dont l'une appartienne à l'orbite non altérée, & dont l'autre renferme l'effet des perturbations; & je fais voir qu'en négligeant, à l'exemple des grands Géomètres qui ont déjà traité la Théorie des Comètes, les carrés & les produits des forces perturbatrices, on peut considérer à part l'action de cha-

Tome X.

I

que Planète, & prendre la somme des effets de leurs différentes actions pour l'effet total de leurs actions réunies. Enfin, je montre comment on peut satisfaire aux équations différentielles des perturbations, dans le cas où la Comète seroit à une distance du Soleil infiniment grande par rapport à la distance de la Planète au Soleil. D'où résulte naturellement une transformation de ces mêmes équations, laquelle en facilite beaucoup l'intégration relativement à la partie supérieure de l'orbite de la Comète. Cette transformation tient lieu des méthodes syntétiques, proposées jusqu'ici pour simplifier le calcul des perturbations dans les régions supérieures de l'orbite ; & elle a en même temps l'avantage de conserver l'uniformité dans la marche du calcul.

La seconde Section est destinée uniquement à l'intégration des équations différentielles de l'orbite non altérée, & contient une solution complète du fameux problème que Newton a résolu le premier, & une foule d'Auteurs après lui. Je me flatte que mon analyse pourra paroître encore digne de l'attention des Géomètres par sa simplicité, & par sa généralité. Elle est d'ailleurs nécessaire pour les calculs de la Section suivante, & fournit différentes formules qui sont d'un grand usage dans tout le cours de cet Ouvrage.

Dans la troisième Section, je m'occupe de l'intégration des équations différentielles des perturbations. Je fais voir comment leurs intégrales se déduisent naturellement de celles des équations de l'orbite non altérée, en y faisant varier les constantes arbitraires qui représentent les élémens de l'orbite. Ce qui conduit directement à exprimer l'effet des perturbations par la variation des élémens de l'orbite considérée comme elliptique ; & ces variations se trouvent déterminées par des formules différentielles assez simples, dont chacune ne demande qu'une seule intégration. Je fais ensuite usage des transformations proposées dans la première Section pour les parties supérieures de l'orbite ; les formules différentielles dont il s'agit deviennent par-là composées d'une partie absolument intégrable, & d'une partie

non intégrable , mais qui est toujours d'autant plus petite que la Comète est plus éloignée du Soleil , en sorte qu'elle devient insensible lorsque la Comète est à une très-grande distance du Soleil. Je termine cette Section par les formules générales qui expriment l'altération de la durée des révolutions anomalistiques & périodiques de la Comète.

La quatrième Section contient l'application des méthodes & des formules données dans les Sections précédentes aux perturbations des Comètes , & en particulier à celles de la Comète de 1532 & de 1661. Toute la difficulté de cette application consiste dans l'intégration des formules différentielles qui déterminent les variations des élémens de l'orbite. Après avoir mis ces formules sous une forme plus simple & plus commode pour le calcul , je montre les obstacles qui s'opposent à leur intégration générale , & qui obligent d'avoir recours aux quadratures des courbes mécaniques. Comme la méthode de ces quadratures est assez connue par les Ouvrages de Cotes & de Stirling , je n'entre là-dessus dans aucun détail ; mais je remarque qu'il y a des cas où l'usage de cette méthode cesse d'être légitime , c'est lorsque la distance entre la Comète & la Planète perturbatrice est fort petite & approche de son *minimum*. Je donne pour ces sortes de cas une méthode particulière qui réduit l'intégration aux logarithmes ou aux arcs de cercles , & ne peut jamais être sujette à aucun inconvénient. Tout ce que nous venons de dire ne regarde que la partie inférieure de l'orbite de la Comète ; car pour la partie supérieure de cette orbite , dans laquelle la distance de la Comète au Soleil sera beaucoup plus grande que la distance de la Planète au Soleil , je fais voir que la partie des formules différentielles qui reste à intégrer , se partage de nouveau en deux parties ; l'une indépendante du lieu de la Planète , & qui est absolument intégrable ; l'autre qui contient les sinus ou cosinus de l'angle du moyen mouvement de la Planète , & qui n'est intégrable par aucune méthode connue , mais dont je démontre que l'intégrale est nécessairement beaucoup plus petite que celle de la première partie ; en sorte qu'on

peut la négliger entièrement; & au cas qu'on voulût pousser l'exactitude plus loin, je donne un moyen d'approcher de plus en plus de la vraie valeur de cette intégrale. D'où il s'ensuit que dans les régions supérieures de l'orbite des Comètes, on peut déterminer leurs perturbations par des formules analytiques, qui ne demandent que des substitutions numériques pour donner les résultats cherchés, comme dans le cas des Planètes. Je considère enfin la Comète des années 1532 & 1661, que les Astronomes attendent vers 1789 ou 1790, & je déduis des élémens de cette Comète toutes les données nécessaires pour le calcul de ses perturbations. Comme dans le programme de 1778, on n'exige pas que les Concurrents donnent les résultats numériques de ce calcul, je m'abstiens d'entrer dans aucun détail à cet égard; mais je me flatte qu'il n'y aura point de Calculateur tant soit peu intelligent qui ne soit en état d'appliquer à la Comète dont il s'agit, la théorie exposée dans cet Ouvrage.

Tels sont les principaux objets du travail que je soumetts au jugement de l'Académie; j'en serai suffisamment récompensé, si cette illustre Compagnie daigne l'honorer de quelque attention.



SECTION PREMIERE.

Equations différentielles du mouvement d'une Comète autour du Soleil, en ayant égard aux perturbations qu'elle peut éprouver par l'action des Planètes.

(1). **J**E prends la masse du Soleil pour l'unité, & je nomme m la masse de la Comète, μ , μ' , &c. les masses des Planètes perturbatrices. Il est clair que ces quantités m , μ , μ' , &c. doivent être des fractions très-petites, puisqu'elles expriment les rapports des masses de la Comète & des Planètes à la masse du Soleil : en effet, on fait que Jupiter, la plus grosse de toutes les Planètes, a environ mille fois moins de masse que le Soleil; & quant aux masses des Comètes, quoiqu'elles soient inconnues, on ne peut guère les supposer plus grandes que celle de Jupiter, autrement il pourroit résulter de leur attraction des dérangemens sensibles dans les orbites des Planètes; ce que les observations n'ont pas encore fait connoître, & ce qu'on ne suppose pas d'ailleurs qui arrive dans le problème des Comètes, tel qu'on l'a envisagé jusqu'à présent.

Nous regarderons donc dans la suite, & nous traiterons les quantités m , μ , μ' , &c. comme des quantités très-petites dont il sera permis de négliger les puissances & les produits de deux ou de plusieurs dimensions : cette supposition est conforme à ce que les Géomètres ont pratiqué jusqu'ici dans la théorie des Planètes principales, & dans celle des Comètes; & une plus grande exactitude ne seroit peut-être d'aucune utilité.

(2). Je rapporte les orbites que la Comète & les Planètes décrivent autour du Soleil à des coordonnées rectangles, prises du centre de cet astre, & parallèles à trois droites fixes, & perpendiculaires entre elles.

Et je nomme ces coordonnées x, y, z pour l'orbite de la Comète; ξ, η, ζ pour l'orbite de la Planète μ ; ξ', η', ζ' pour l'orbite de la Planète μ' , &c.

Je nomme de plus r la distance de la Comète au Soleil, ou le rayon vecteur de son orbite; ρ , le rayon vecteur de l'orbite de la Planète μ ; ρ' , le rayon vecteur de l'orbite de la Planète μ' , &c.

Enfin je désigne par R , la distance de la Planète μ à la Comète; par R' , la distance de la Planète μ' à la Comète, &c.

Il est clair qu'on aura :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \rho' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}, \&c.$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, R' = \sqrt{(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2 + (z - \zeta')^2}, \&c.$$

(3). Cela posé, si on décompose, suivant les directions des trois coordonnées rectanglées x, y, z , toutes les forces qui agissent sur la Comète pour lui faire décrire son orbite autour du Soleil, savoir, les attractions $\frac{1}{r^2}$, $\frac{\mu}{R^2}$, $\frac{\mu'}{R'^2}$, &c. exercées par le Soleil & par les Planètes sur la Comète, & les attractions $\frac{m}{r^2}$, $\frac{\mu}{\rho^2}$, $\frac{\mu}{\rho'^2}$, &c. exercées par la Comète & par les Planètes sur le Soleil, & qui doivent être transportées à la Comète en sens contraire; & qu'on égale la somme de toutes les forces qui agissent suivant la ligne x , & qui tendent à diminuer cette ligne, à $-\frac{d^2x}{dt^2}$, la somme de toutes les forces qui agissent suivant y à $-\frac{d^2y}{dt^2}$, & la somme de toutes les forces qui agissent suivant z à $-\frac{d^2z}{dt^2}$, $d t$ étant les élémens du temps supposés constans, on aura ces trois équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} + \mu \left(\frac{x-\xi}{R^3} + \frac{\xi}{\rho^3} \right) + \mu' \left(\frac{x-\xi'}{R'^3} + \frac{\xi'}{\rho'^3} \right) + \&c. = 0.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)y}{r^3} + \mu \left(\frac{y-\eta}{R^3} + \frac{\eta}{\rho^3} \right) + \mu' \left(\frac{y-\eta'}{R'^3} + \frac{\eta'}{\rho'^3} \right) + \&c. = 0.$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(1+m)z}{r^3} + \mu \left(\frac{z-\zeta}{R^3} + \frac{\zeta}{\rho^3} \right) + \mu' \left(\frac{z-\zeta'}{R'^3} + \frac{\zeta'}{\rho'^3} \right) + \&c. = 0.$$

DES PERTURBATIONS DES COMETES. 71

Lesquelles, d'après les principes connus de la Dynamique, serviront à déterminer le mouvement de la Comète par rapport au Soleil regardé comme immobile.

(4). On aura des équations semblables pour le mouvement de la Planète μ autour du Soleil, en tant qu'elle est dérangée par l'action de la Comète & des autres Planètes; pour cela, il n'y aura qu'à changer, dans les équations précédentes, les quantités m, x, y, z, r , appartenantes à l'orbite de la Comète, dans les quantités analogues $\mu, \xi, \eta, \zeta, \rho$, appartenantes à l'orbite de la Planète, & *vice versa*, celles-ci en celles-là.

Mais il faut considérer que pour notre objet il n'est pas nécessaire de tenir compte des termes affectés des quantités très-petites m, μ, μ' , &c. dans les équations de la Planète, parce que les quantités ξ, η, ζ dépendantes de ces équations ne se trouvent dans les équations de la Comète que dans des termes déjà affectés de la quantité très-petite μ .

On peut donc réduire les équations de la Planète μ aux deux premiers termes, savoir :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{(1+\mu) \xi}{\rho^3} = 0.$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{(1+\mu) \eta}{\rho^3} = 0.$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{(1+\mu) \zeta}{\rho^3} = 0.$$

Et l'on réduira, par des raisons semblables, les équations du mouvement de la Planète μ' à celles-ci :

$$\frac{d^2 \xi'}{dt^2} + \frac{(1+\mu') \xi'}{\rho'^3} = 0.$$

$$\frac{d^2 \eta'}{dt^2} + \frac{(1+\mu') \eta'}{\rho'^3} = 0.$$

$$\frac{d^2 \zeta'}{dt^2} + \frac{(1+\mu') \zeta'}{\rho'^3} = 0.$$

Et ainsi pour les autres Planètes perturbatrices.

Ces réductions sont fondées, comme l'on voit, sur la supposition que dans le calcul des perturbations des Comètes, on

néglige les perturbations des Planètes perturbatrices. Si cette supposition n'est pas rigoureusement exacte, elle est du moins permise dans la première approximation, à laquelle nous nous contenterons ici de borner nos recherches, à l'exemple des grands Géomètres qui ont traité avant nous le problème des Comètes.

(5). En considérant les expressions des quantités $r, \rho, \rho', \&c.$ $R, R', \&c.$ il est aisé de voir qu'on peut mettre les équations précédentes sous une forme plus simple, que voici :

Pour la Comète.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{(1+m)d \cdot \frac{1}{r}}{dx} + \mu \frac{d \cdot \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right)}{d\xi} + \mu' \frac{d \cdot \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R'} \right)}{d\xi'} + \&c.$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{(1+m)d \cdot \frac{1}{r}}{dy} + \mu \frac{d \cdot \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right)}{d\eta} + \mu' \frac{d \cdot \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R'} \right)}{d\eta'} + \&c.$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{(1+m)d \cdot \frac{1}{\rho}}{d\xi} + \mu \frac{d \cdot \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right)}{d\xi} + \mu' \frac{d \cdot \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R'} \right)}{d\xi'} + \&c.$$

Pour la Planète μ .

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{(1+\mu)d \cdot \frac{1}{\rho}}{d\xi}, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{(1+\mu)d \cdot \frac{1}{\rho}}{d\eta}, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{(1+\mu)d \cdot \frac{1}{\rho}}{d\zeta}.$$

Pour la Planète μ' .

$$\frac{d^2 \xi'}{dt^2} = \frac{(1+\mu')d \cdot \frac{1}{\rho'}}{d\xi'}, \quad \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = \frac{(1+\mu')d \cdot \frac{1}{\rho'}}{d\eta'}, \quad \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} = \frac{(1+\mu')d \cdot \frac{1}{\rho'}}{d\zeta'}.$$

Et ainsi des autres.

Dans ces formules, les expressions $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dx}$, $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dy}$, $\&c.$ dénotent, suivant la notation reçue parmi les Géomètres, les coefficients

coëfficiens de dx , dy , &c. dans la différentielle de $\frac{1}{r}$; & ainsi des autres expressions semblables.

(6). Si on suppose que dans le mouvement de la Comète on fasse abstraction des forces perturbatrices, il faudra rejeter dans les équations de la Comète les termes affectés de μ , μ' , &c. : on aura ainsi,

Pour l'orbite non altérée de la Comète.

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{(1+m)d \cdot \frac{1}{r}}{dx}, \quad \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{(1+m)d \cdot \frac{1}{r}}{dy}, \quad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{(1+m)d \cdot \frac{1}{r}}{dz}.$$

Nous pouvons supposer que les quantités x , y , z se rapportent à l'orbite non altérée, & sont par conséquent déterminées par les équations précédentes : dans cette supposition, il est clair que les vraies valeurs des quantités x , y , z , dans l'orbite troublée, ne peuvent différer des précédentes que par des quantités très-petites de l'ordre de μ , μ' , &c. qu'on peut désigner, pour plus de simplicité, par la caractéristique δ à la manière des différences ordinaires. Et la recherche des perturbations de la Comète se réduira à déterminer les valeurs des différences δx , δy , δz .

(7). Dorénavant donc les quantités x , y , z , r appartiendront toujours à l'orbite non altérée de la Comète, & devront par conséquent se déterminer par les équations du §. précédent. Dans l'orbite troublée, ces quantités deviendront $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $r + \delta r$, & devront être déterminées par les équations du §. 5, en mettant, dans ces équations, ces nouvelles quantités à la place des premières x , y , z , r . Or, comme les différences δx , δy , δz sont très-petites de l'ordre μ , μ' , &c. il suffira de conserver dans cette substitution, les premières dimensions de ces différences (par l'hyp. du §. 1.), dans les termes non affectés de μ , μ' , &c. ; & dans les termes affectés de ces quantités, on pourra négliger tout à fait les différences, dont il s'agit.

Ainsi donc le terme $\frac{d^2 x}{dt^2}$ de la première équation du §. 5 deviendra $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 \delta x}{dt^2}$, le terme $(1+m) \frac{d \frac{1}{r}}{dx}$ de la même équation deviendra

$$(1+m) \frac{d \frac{1}{r}}{dx} + (1+m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dz} \delta z \right),$$

& les autres termes demeureront les mêmes.

On transformera de même la seconde & la troisième équation du mouvement de la Comète ; & effaçant ensuite les termes qui se détruisent en vertu des équations du §. 6, on aura ces trois-ci, qui serviront à déterminer les valeurs des quantités δx , δy , δz , dues aux perturbations de la Comète.

Pour les perturbations de la Comète.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = (1+m) \cdot & \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dz} \delta z \right) \\ & + \mu \frac{d \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right)}{d\xi} + \mu' \frac{d \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R'} \right)}{d\xi'} + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta y}{dt^2} = (1+m) \cdot & \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dx} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dz} \delta z \right) \\ & + \mu \frac{d \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right)}{d\eta} + \mu' \frac{d \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R'} \right)}{d\eta'} + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = (1+m) \cdot & \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz dx} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz dy} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} \delta z \right) \\ & + \mu \frac{d \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right)}{d\zeta} + \mu' \frac{d \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R'} \right)}{d\zeta'} + \&c. \end{aligned}$$

C'est donc de l'intégration de ces équations que dépend la solution du problème des perturbations des Comètes. Nous

allons nous en occuper , après avoir fait quelques remarques générales sur la nature de ces équations.

(8). J'observe d'abord que comme ces équations ne renferment que les premières dimensions des variables δx , δy , δz , on peut chercher à part les valeurs de ces variables pour les différens termes affectés des quantités μ , μ' , &c., & qui viennent de l'action des différentes Planètes dont ces quantités sont les masses. Car il est visible que si on réunit ensuite ces différentes valeurs, on aura les valeurs complètes des variables δx , δy , δz , qui satisfont aux équations proposées.

En général, il est facile de concevoir que lorsqu'on néglige, ainsi que nous l'avons fait, les carrés & les produits des forces perturbatrices, l'effet total de ces forces doit être égal à la somme des effets que chacune en particulier produiroit si elle étoit seule.

(9). Je remarque ensuite que les termes multipliés par les masses μ , μ' , &c. des Planètes perturbatrices, deviennent d'autant plus petites que les quantités x , y , z sont plus petites, c'est-à-dire, que la Comète est plus près du Soleil. En effet, en supposant x , y , z des quantités très-petites vis-à-vis de ξ , η , ζ , on a à très-peu près (§. 2.) :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d \xi} x - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d \eta} y - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d \zeta} z ; \text{ d'où l'on voit que}$$

la quantité $\frac{1}{r} - \frac{1}{R}$, ainsi que ses différences, divisées par $d \xi$, $d \eta$, $d \zeta$, seront du même ordre de petitesse que les quantités x , y , z . Par conséquent, si on suppose que ces quantités soient devenues de l'ordre des quantités μ , μ' , &c., il est clair que les termes dont il s'agit, seront pour lors de l'ordre de μ^2 , $\mu \mu'$, &c.; de sorte qu'on pourra les négliger, d'autant plus que, dans ce cas, la quantité $\frac{1}{r}$ devient d'autant plus grande. Ces termes disparaissant, il est visible qu'on pourra satisfaire aux équations proposées par la supposition de

$\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$. Ainsi on peut regarder ces valeurs comme les limites des variables δx , δy , δz , du côté du Soleil.

(10). Voyons maintenant quelles sont les limites des mêmes variables du côté opposé.

Supposons donc les quantités x , y , z infiniment grandes vis-à-vis de ξ , η , ζ , on aura ici (§. 2) :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dx} \xi - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dy} \eta - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dz} \zeta + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{2 dx^2} \xi^2 + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{2 dy^2} \eta^2 + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{2 dz^2} \zeta^2 + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx dy} \xi \eta + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx dz} \xi \zeta + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dy dz} \eta \zeta + , \text{ \&c.}$$

J'ai poussé ici l'approximation jusqu'à la seconde dimension des quantités ξ , η , ζ , parce que la différentiation par $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, fait disparaître une dimension de ces quantités.

On aura donc :

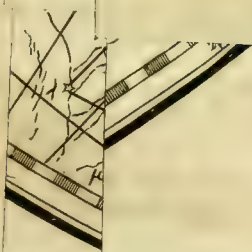
$$\frac{d \cdot \frac{1}{R}}{d\xi} = - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dx} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx^2} \xi + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx dy} \eta + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx dz} \zeta.$$

$$\frac{d \cdot \frac{1}{R}}{d\eta} = - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dy} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx dy} \xi + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dy^2} \eta + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dy dz} \zeta.$$

$$\frac{d \cdot \frac{1}{R}}{d\zeta} = - \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dz} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx dz} \xi + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dy dz} \eta + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dz^2} \zeta.$$

Qu'on substitue ces valeurs dans les équations du §. 7, en n'ayant égard qu'aux termes affectés de μ , par la remarque ci-dessus §. 8, on aura les équations suivantes :

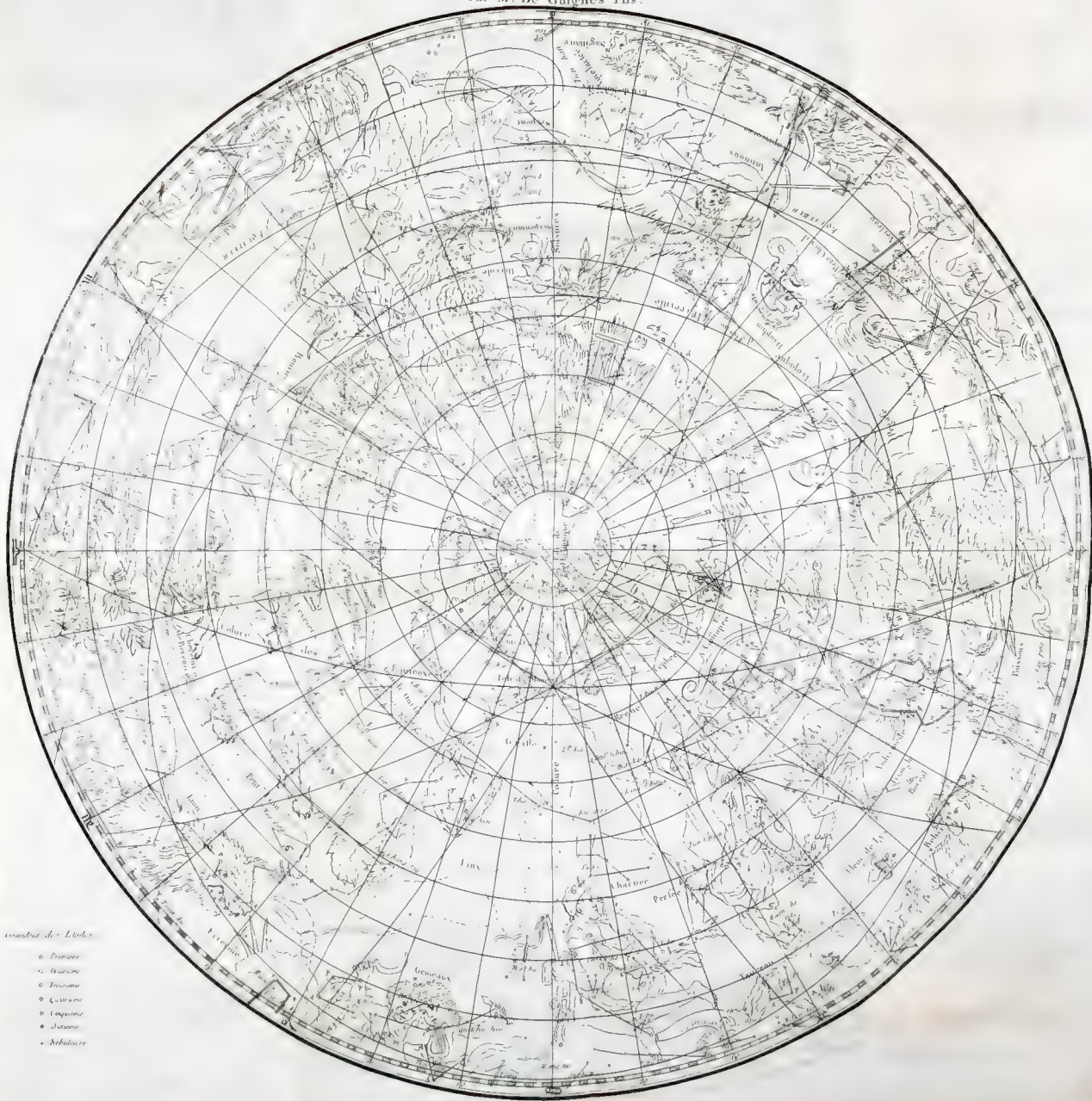
$$\frac{d^2 \delta x}{d\xi^2} = (1+m) \left(\frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx^2} \left(\delta x - \frac{\mu}{1+m} \xi \right) + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx dy} \left(\delta y - \frac{\mu}{1+m} \eta \right) + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{dx dz} \left(\delta z - \frac{\mu}{1+m} \zeta \right) \right) + \mu \left(\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\xi} + \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dx} \right),$$



PLANISPHERE CÉLESTE CHINOIS.

PARTIE SEPTENTRIONALE;

Par M^r De Guignes Fils.

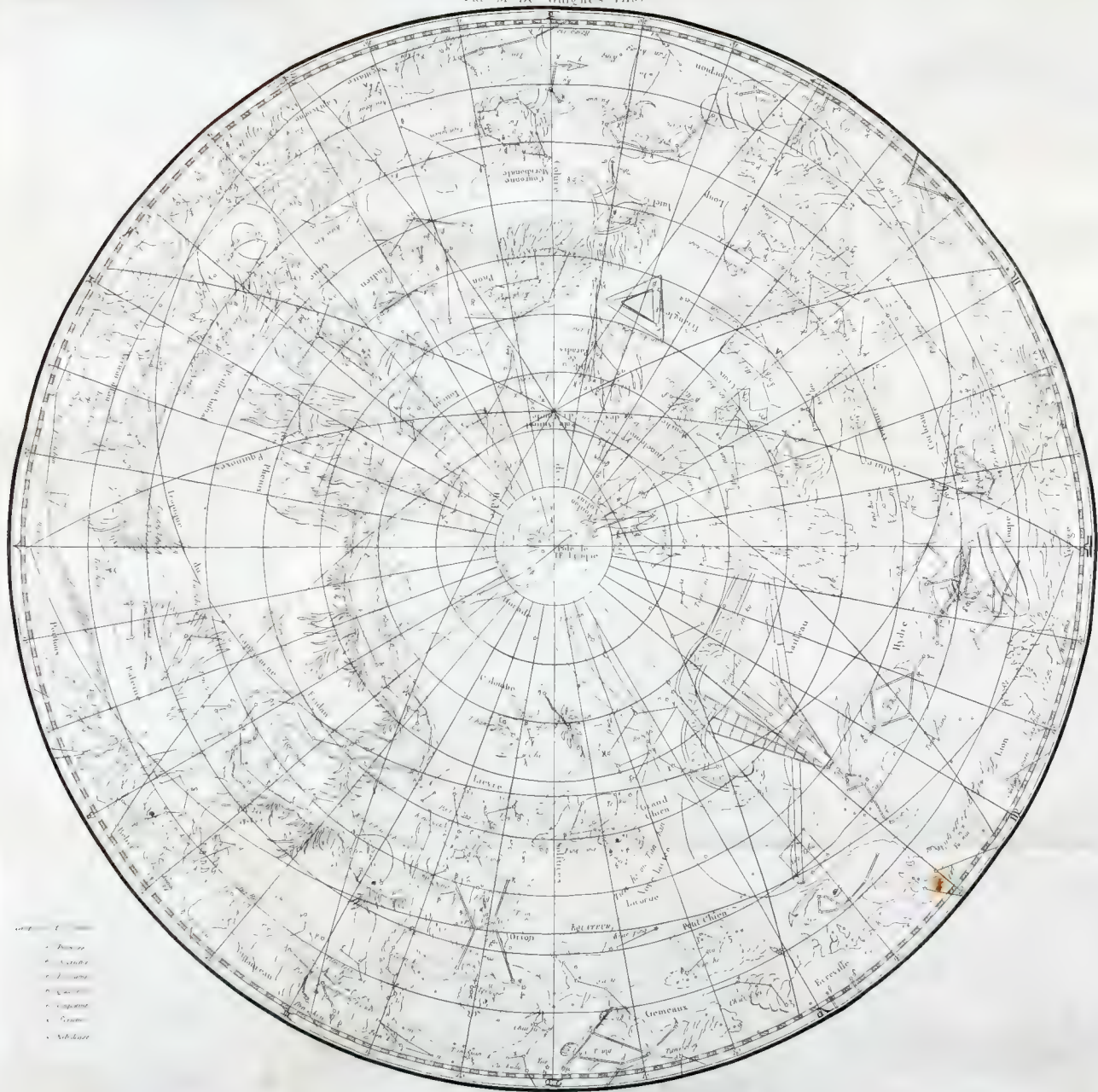


Assemblage des Étoiles

- Première
- Deuxième
- Troisième
- Quatrième
- Cinquième
- Sixième
- Septième

12

Par M^r De Gijones Fils.



- a. *Deuterop*
- b. *Chlorob*
- c. *Chlorob*
- d. *Chlorob*
- e. *Chlorob*
- f. *Chlorob*
- g. *Chlorob*
- h. *Chlorob*

$$\frac{d^2 \delta y}{dt^2} = (1+m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dx} \left(\delta x - \frac{\mu}{1+m} \xi \right) + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} \left(\delta y - \frac{\mu}{1+m} \eta \right) \right. \\ \left. + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy d\zeta} \left(\delta \zeta - \frac{\mu}{1+m} \zeta \right) \right) + \mu \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\eta} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy} \right),$$

$$\frac{d^2 \delta \zeta}{dt^2} = (1+m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta dx} \left(\delta x - \frac{\mu}{1+m} \xi \right) + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta dy} \left(\delta y - \frac{\mu}{1+m} \eta \right) \right. \\ \left. + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta^2} \left(\delta \zeta - \frac{\mu}{1+m} \zeta \right) \right) + \mu \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta} \right).$$

Or on a par les équations de la Planète μ (§. 5.) :

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\xi} = \frac{d^2 \xi}{(1+\mu) dt^2}, \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\eta} = \frac{d^2 \eta}{(1+\mu) dt^2}, \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta} = \frac{d^2 \zeta}{(1+\mu) dt^2};$$

faisant ces substitutions dans les pénultièmes termes des équations précédentes, on verra incontinent que si les derniers

termes $\mu \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx}$, $\mu \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy}$, $\mu \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta}$ n'existoient pas, & que l'on

eût $\mu = m$, on satisferoit exactement à ces équations, en faisant $\delta x = \frac{\mu}{1+\mu} \xi$, $\delta y = \frac{\mu}{1+\mu} \eta$, $\delta \zeta = \frac{\mu}{1+\mu} \zeta$.

Supposons donc $\delta x = \frac{\mu}{1+\mu} \xi + \alpha$, $\delta y = \frac{\mu}{1+\mu} \eta + \beta$,

$\delta \zeta = \frac{\mu}{1+\mu} \zeta + \gamma$; si on substitue ces valeurs, & qu'on rejette les

termes, qui auroient pour coefficient, $\frac{\mu}{1+\mu} - \frac{\mu}{1+m} = \frac{\mu(m-\mu)}{(1+\mu)(1+m)}$, d'après l'hypothèse établie dans le §. 1, on aura ces nouvelles équations :

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = (1+m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} \alpha + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} \beta + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx d\zeta} \gamma \right) + \mu \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx},$$

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = (1+m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dx} \alpha + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} \beta + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy d\zeta} \gamma \right) + \mu \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy},$$

$$\frac{d^2 \gamma}{dt^2} = (1+m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta dx} \alpha + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta dy} \beta + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta^2} \gamma \right) + \mu \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta}.$$

J'observe qu'on peut satisfaire à ces équations, en faisant $\alpha = Kx$, $\beta = Ky$, $\gamma = K\zeta$, K étant un coefficient constant. Car elles deviennent par là :

$$\begin{aligned} K \frac{d^2 x}{dt^2} &= (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx d\zeta} \zeta \right) K + \mu \frac{d \frac{1}{r}}{dx}, \\ K \frac{d^2 y}{dt^2} &= (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dx} x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy d\zeta} \zeta \right) K + \mu \frac{d \frac{1}{r}}{dy}, \\ K \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta dx} x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta dy} y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta^2} \zeta \right) K + \mu \frac{d \frac{1}{r}}{d\zeta}. \end{aligned}$$

Mais les équations de l'orbite non altérée (§. 6.) donnent

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (1 + m) \frac{d \frac{1}{r}}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = (1 + m) \frac{d \frac{1}{r}}{dy},$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = (1 + m) \frac{d \frac{1}{r}}{d\zeta}.$$

Ensuite je remarque que la quantité $\frac{x}{r}$ est une fonction homogène de x, y, ζ de la dimension -1 , qu'ainsi les quantités

$\frac{d \frac{1}{r}}{dx}, \frac{d \frac{1}{r}}{dy}, \frac{d \frac{1}{r}}{d\zeta}$, sont aussi des fonctions homogènes de

x, y, ζ , mais de la dimension $= 2$. Donc par le théorème connu, concernant ces sortes de fonctions, on aura :

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx d\zeta} \zeta = -2 \frac{d \frac{1}{r}}{dx},$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dx} x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy d\zeta} \zeta = -2 \frac{d \frac{1}{r}}{dy},$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta dx} x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta dy} y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\zeta^2} \zeta = -2 \frac{d \frac{1}{r}}{d\zeta}.$$

C'est de quoi on peut d'ailleurs s'assurer par la différentia-

tion actuelle. Ces substitutions faites, on verra d'abord que pour satisfaire aux trois équations dont il s'agit, il suffit de satisfaire à celle-ci $K(1+m) = -2(1+m)K + \mu$, laquelle donne

$$K = \frac{\mu}{3(1+m)}.$$

Donc enfin on aura

$$\delta x = \frac{\mu}{1+\mu} \xi + \frac{\mu}{3(1+m)} x,$$

$$\delta y = \frac{\mu}{1+\mu} \eta + \frac{\mu}{3(1+m)} y,$$

$$\delta z = \frac{\mu}{1+\mu} \zeta + \frac{\mu}{3(1+m)} z.$$

Ce sont les limites cherchées dont les quantités δx , δy , δz s'approchent d'autant plus que la Comète s'éloigne davantage du Soleil.

(11). De-là il s'ensuit que si l'on suppose en général

$$\delta x = \mu \left(\frac{x}{3(1+m)} + \frac{\xi}{1+\mu} \right) + \delta x',$$

$$\delta y = \mu \left(\frac{y}{3(1+m)} + \frac{\eta}{1+\mu} \right) + \delta y',$$

$$\delta z = \mu \left(\frac{z}{3(1+m)} + \frac{\zeta}{1+\mu} \right) + \delta z';$$

qu'on substitue ces valeurs dans les équations du §. 7, & qu'on y fasse les réductions enseignées ci-dessus, on aura, en n'ayant égard qu'aux termes affectés de μ , & faisant pour abrégier,

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1+m}{1+\mu} \left(\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dx} \xi + \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dy} \eta + \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dz} \zeta \right),$$

on aura, dis-je, ces transformées :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta x'}{dt^2} &= (1+m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} \delta x' + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} \delta y' + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dz} \delta z' \right) \\ &- \mu \frac{d \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right)}{dx}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \delta y'}{d t^2} = (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d y d x} \delta x' + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d y^2} \delta y' + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d y d \zeta} \delta \zeta' \right) \\ - \mu \frac{d. \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right)}{d y},$$

$$\frac{d^2 \delta \zeta'}{d t^2} = (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \zeta d x} \delta x' + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \zeta d y} \delta y' + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \zeta^2} \delta \zeta' \right) \\ - \mu \frac{d. \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right)}{d \zeta},$$

Dans ces équations, j'ai mis à la place des quantités $\frac{d. \frac{1}{R}}{d \zeta}$,

$$\frac{d. \frac{1}{R}}{d \eta}, \frac{d. \frac{1}{R}}{d \zeta}, \text{ leurs équivalentes } - \frac{d. \frac{1}{R}}{d x}, - \frac{d. \frac{1}{R}}{d y}, - \frac{d. \frac{1}{R}}{d \zeta},$$

pour mettre plus d'uniformité dans les formules.

(12). On peut aussi donner une forme semblable aux équations primitives du §. 7. En effet, si l'on fait

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\rho} - \left(\frac{d. \frac{1}{\rho}}{d \xi} x + \frac{d. \frac{1}{\rho}}{d \eta} y + \frac{d. \frac{1}{\rho}}{d \zeta} \zeta \right),$$

& qu'on fasse abstraction des termes affectés de μ' , on aura :

$$\frac{d^2 \delta x}{d t^2} = (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d x^2} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d x d y} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d x d \zeta} \delta \zeta \right) \\ - \mu \frac{d. \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R} \right)}{d x},$$

$$\frac{d^2 \delta y}{d t^2} = (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d y d x} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d y^2} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d y d \zeta} \delta \zeta \right) \\ - \mu \frac{d. \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R} \right)}{d y},$$

$$\frac{d^2 \delta \zeta}{d t^2} = (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \zeta d x} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \zeta d y} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \zeta^2} \delta \zeta \right) - \mu \frac{d \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R} \right)}{d \zeta}.$$

(13). On voit que la quantité $\frac{1}{\sigma}$ contient les deux premiers termes de la quantité $\frac{1}{R}$ développée en suite ascendante par rapport aux puissances de x, y, ζ ; comme la quantité $\frac{1}{S}$ contient les deux premiers termes de la même quantité $\frac{1}{R}$ développée en suite ascendante par rapport aux puissances de ξ, η, ζ , en négligeant (ce qui est permis ici) la différence infiniment petite entre $\frac{1+m}{1+\mu}$ & l'unité. D'où résultent naturellement les conclusions que nous avons trouvées plus haut (§. 10, 11.).

Il s'ensuit aussi delà, que tant que $r < \rho$, il est plus simple de se servir des formules du §. 12; & qu'au contraire lorsque $r > \rho$, il est plus avantageux d'employer celles du §. 11; d'autant que dans celles-ci les termes affectés de μ , & qui sont l'effet des forces perturbatrices, deviennent presque nuls lorsque la Comète est à une grande distance du Soleil.



SECTION II.

Intégration des équations différentielles de l'orbite non altérée.

(14) **A**YANT décomposé les équations générales du mouvement de la Comète en équations de l'orbite non troublée (§. 6), & en équations des perturbations (§. 7), nous allons nous occuper, dans cette Section, de l'intégration des premières. Nous pourrions à la vérité nous en dispenser, puisqu'on fait d'avance, par les théorèmes de Newton, que, sans les forces perturbatrices, la Comète doit décrire autour du Soleil une section conique dont cet astre occupe le foyer, & que le temps doit être proportionnel à l'aire parcourue, divisée par la racine carrée du paramètre. Mais comme nous avons besoin de connoître les intégrales mêmes des équations dont il s'agit, il est beaucoup plus court, & en même temps plus direct de chercher ces intégrales par l'intégration effective, que de les déduire des propriétés des sections coniques.

(15). Les équations qu'il s'agit d'intégrer, sont celles-ci, en mettant pour $\frac{d}{dt} \frac{1}{r}$, $\frac{d}{dt} \frac{1}{y}$, $\frac{d}{dt} \frac{1}{z}$ leurs valeurs $-\frac{x}{r^3}$, $-\frac{y}{r^3}$, $-\frac{z}{r^3}$,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} = 0;$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{(1+m)y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{(1+m)z}{r^3} = 0.$$

On peut intégrer ces équations par différentes méthodes; celle dont je vais faire usage m'a paru une des plus simples.

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 83

Je remarque d'abord qu'en supposant les deux premières équations, on peut satisfaire à la troisième, en faisant:

$$z = b x + c y. \quad (A),$$

b & c étant deux constantes arbitraires; & il est visible que cette valeur de z est en même temps l'intégrale complète de la troisième équation, puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires.

Je multiplie maintenant la première des trois équations différentielles proposées par $2 \, dx$, la seconde par $2 \, dy$, la troisième par $2 \, dz$, ensuite je les ajoute ensemble, & j'intègre; j'ai

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - 2(1+m) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = 0. \quad (B),$$

a étant une constante arbitraire.

Je multiplie ensuite les mêmes équations par x , y , z , & j'ajoute à leur somme l'équation précédente; j'ai, à cause de

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{d^2 r^2}{dt^2} - (1+m) \left(\frac{1}{r} - \frac{2}{a} \right) = 0. \quad (C).$$

Cette équation étant multipliée par $d \, r^2$, & ensuite intégrée, donne celle-ci:

$$\left(\frac{d \, r^2}{dt} \right)^2 = 2(1+m) \left(r - \frac{r^2}{a} - h \right) = 0. \quad (D);$$

h étant une nouvelle constante arbitraire. Or $\frac{d^2 r^2}{dt^2} = r \, d^2 r + d \, r^2$ & $\left(\frac{d \, r^2}{dt} \right)^2 = r^2 \, d \, r^2$; donc si on divise l'équation (D) par r^2 , & qu'on la retranche de l'équation (C), on aura, après avoir divisé par r ,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + (1+m) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2h}{r^3} \right) = 0,$$

équation, qui, en faisant $2h - r = p$, prend cette forme:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + (1+m) \frac{p}{r^3} = 0,$$

qui est, comme l'on voit, semblable aux équations primitives.

C'est pourquoi on aura sur le champ cette intégrale $p = f x + g y$, ou bien,

$$2h - r = f x + g y. \quad (E),$$

84 RECHERCHES SUR LA THÉORIE

f & g étant deux nouvelles constantes arbitraires, en sorte que l'intégrale est complète.

Les équations (A) & (E) offrent déjà, comme l'on voit, deux intégrales finies. On trouvera la troisième au moyen de l'équation (D), laquelle se réduit à

$$\frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}} = d t \sqrt{2(1+m)},$$

dont l'intégrale est

$$\text{arc. sin.} \frac{2 \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}} - \frac{2 \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}} \\ = 2 t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} + i \dots \dots \dots (F),$$

i étant encore une constante arbitraire.

Cette équation détermine r en t , & les équations (A) & (E) combinées avec celle-ci $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ servent à déterminer x, y, z en r ; ainsi on aura x, y, z en t . Mais ces valeurs, pour être complètes, doivent renfermer six constantes, parce que les équations différentielles proposées sont chacune du second ordre. Or l'équation (A) renferme deux constantes arbitraires b & c ; l'équation (E) en renferme trois f, g & h , & l'équation (F) en renferme encore deux autres a & i . Il y en a donc en tout sept, & par conséquent une de plus qu'il ne faut.

En examinant la chose de plus près, il est aisé de s'appercevoir que cela vient de ce que la constante a a été introduite par l'intégration qui a donné l'équation (B), équation dont nous n'avons point tenu compte dans la suite du calcul comme d'une équation intégrale. Il est donc nécessaire d'avoir égard à cette équation, & il en doit résulter une équation de condition entre les constantes; en sorte qu'il n'en restera plus que six d'arbitraires, comme le problème le demande.

(15). Commençons par déterminer x, y, z en r . Les équations

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 85

tions (A) & (E) donnent, en retenant p à la place de $2h - r$,

$$x = \frac{g\zeta - cp}{bg - cf}, \quad y = \frac{f\zeta - bp}{cf - bg},$$

substituant ces valeurs dans $x^2 + y^2 + \zeta^2 = r^2$, & ordonnant par rapport à ζ , on a :

$$(cf - bg + f^2 + g^2)\zeta^2 - 2(bf + cg)p\zeta + (b^2 + c^2)p^2 - (cf - bg)^2 r^2 = 0,$$

d'où l'on tirera ζ , & ensuite x & y .

Si l'on fait pour plus de simplicité

$$q = \sqrt{(cf - bg + f^2 + g^2)r^2 - (1 + b^2 + c^2)p^2};$$

on trouvera

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(f + c(cf - bg))p - gq}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2} \\ y &= \frac{(g - b(cf - bg))p + fq}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2} \\ \zeta &= \frac{(bf + cg)p + (cf - bg)q}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2} \end{aligned} \right\} \dots (G).$$

(16). Maintenant l'équation (B) donne, en chassant dt , par le moyen de l'équation (D),

$$dx^2 + dy^2 + d\zeta^2 = \frac{r - \frac{r^2}{a}}{r - \frac{r^2}{a} - h} dr^2;$$

mais les équations précédentes donnent

$$dx^2 + dy^2 + d\zeta^2 = \frac{(1 + b^2 + c^2)dp^2 + dq^2}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2};$$

il faut donc que ces deux expressions de $dx^2 + dy^2 + d\zeta^2$ deviennent identiques après qu'on aura substitué dans la dernière les valeurs de p & q en r .

Ces substitutions faites, on verra que l'identité aura lieu en effet, en faisant

$$\frac{4h}{a} = 1 - \frac{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}{1 + b^2 + c^2}. \dots (H).$$

C'est l'équation de condition cherchée.

Si, dans l'expression de q du §. précédent, on substitue la valeur de $(cf - bg)^2 + f^2 + g^2$ donnée par l'équation (G), que nous venons de trouver, & qu'on y mette de plus pour p la valeur $2h - r$, elle deviendra

$$q = 2 \sqrt{h(1 + b^2 + c^2)} \cdot \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}.$$

(17). Pour pouvoir appliquer les formules précédentes au mouvement des Comètes, il faut connoître les valeurs des constantes que ces formules renferment.

Pour cet effet, je remarque d'abord que l'équation (A) est celle d'un plan, dont la position à l'égard du plan des coordonnées x & y , dépend des constantes b & c . Ce plan sera donc celui de l'orbite de la Comète, & qui est déterminé par les observations.

Soit ω l'angle que l'intersection des deux plans, c'est-à-dire la ligne des nœuds de l'orbite sur le plan des x & y , fait avec l'axe des x , & \downarrow l'inclinaison de l'orbite sur ce dernier plan, il est facile de prouver qu'on aura $c = \text{tang. } \downarrow \cos. \omega$, $b = -\text{tang. } \downarrow \sin. \omega$.

L'équation (E) servira ensuite à déterminer la figure de l'orbite; & il est aisé de conclure de la forme même de cette équation, que l'orbite ne peut être qu'une section conique, ayant le foyer dans l'origine des coordonnées, en sorte que r sera le rayon recteur de l'orbite.

Les deux apsidés seront donc aux points où $\frac{dr}{dt} = 0$; or, dans ce cas, l'équation (D) donne $r - \frac{r^2}{a} - h = 0$, équation dont les deux racines sont $\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4ah}}{2}$.

La somme de ces deux racines sera le grand axe, & leur différence, divisée par la somme, sera l'excentricité. Donc le grand axe de l'orbite sera a , & l'excentricité sera $\sqrt{1 - \frac{4h}{a}}$, que je désignerai dans la suite par e .

Puis donc que $e = \sqrt{1 - \frac{4h}{a}}$, on aura $a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{4ha}$ égal au petit axe de l'orbite; par conséquent $4h$ sera le paramètre du grand axe.

Or on fait que le rayon recteur qui répond à 90° d'anomalie, c'est-à-dire, qui est perpendiculaire au grand axe, est égal au demi-paramètre. Donc on aura à 90° d'anomalie $r = 2h$; & l'équation (E) donnera $fx + gy = 0$; d'où l'on tire $\frac{y}{x} = -\frac{f}{g}$ égal par conséquent à la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x , dans le plan des x & y , la projection du rayon recteur qui répond à 90° d'anomalie dans l'orbite.

Soit cet angle $= 90^\circ + \varepsilon$, on aura donc $\frac{g}{f} = \text{tang. } \varepsilon$; donc faisant $l = \sqrt{f^2 + g^2}$, on aura $g = l \sin. \varepsilon$, $f = l \cos. \varepsilon$; ces valeurs étant substituées dans l'équation (H) du §. 16, ainsi que celles de b & c trouvées ci-dessus, & mettant e^2 à la place de $1 - \frac{4h}{a}$, elle deviendra $e^2 = l^2 \times \frac{1 + \text{tang. } \psi^2 \cos. (\omega - \varepsilon)^2}{1 + \text{tang. } \psi^2}$
 $= l^2 (1 - \sin. \psi^2 \sin. (\omega - \varepsilon)^2)$; d'où l'on tire

$l = \sqrt{\frac{e}{1 - \sin. \psi^2 \sin. (\omega - \varepsilon)^2}}$; de sorte qu'on aura

$$f = \sqrt{\frac{e \cos. \varepsilon}{1 - \sin. \psi^2 \sin. (\omega - \varepsilon)^2}}, \quad g = \sqrt{\frac{e \sin. \varepsilon}{1 - \sin. \psi^2 \sin. (\omega - \varepsilon)^2}}.$$

(18). Si on fait coïncider le plan de l'orbite avec celui de x & y , on aura $\psi = 0$, & l'angle ε sera évidemment celui que le grand axe de l'orbite fait avec l'axe des x . Donc, si on suppose de plus que ces deux axes coïncident, on aura aussi $\varepsilon = 0$; de sorte que, dans cette hypothèse, $b = 0$, $c = 0$, $f = e$, $g = 0$, & les formules (G) du §. 15 donneront $x = \frac{p}{e}$, $y = \frac{q}{e}$, $z = 0$,

savoir, $x = \frac{2h - r}{e}$ & $y = \frac{2\sqrt{h}}{e} \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$. Or il est visible que, dans ce cas, x & y deviennent les coordonnées de l'orbite dans le plan même de cette orbite; & comme ces coordonnées doivent être indépendantes de la position du plan

de l'orbite, il s'ensuit que les valeurs précédentes de x & y exprimeront toujours l'une l'abscisse prise dans le grand axe depuis le foyer, & l'autre l'ordonnée rectangle dans le plan même de l'orbite, quelle que soit d'ailleurs la position de ce plan.

Donc, si on nomme ϕ l'angle du rayon vecteur r avec le grand axe, on aura, dans la supposition précédente $x = r \cos. \phi$, $y = r \sin. \phi$; savoir, $r \cos. \phi = \frac{2h-r}{e}$, $r \sin. \phi = \frac{2\sqrt{h}}{e} \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$; d'où l'on tire $r = \frac{2h}{1 + e \cos. \phi}$, $\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h} = \frac{e \sqrt{h} \sin. \phi}{1 + e \cos. \phi}$; cette expression de r fait voir que ϕ est l'anomalie vraie de l'orbite, comptée de son périhélie.

On aura donc en général $p = e r \cos. \phi$, $q = \frac{e r \sin. \phi}{\cos. \psi}$, & l'on pourra, par ces substitutions, dans les formules (F) & (G), avoir les valeurs de t , x , y , z exprimées par la seule anomalie ϕ .

(19). Dans le nœud on a $z = 0$, donc (équat. G) $(bf + cg)p + (cf - bg)q = 0$, savoir, en substituant les valeurs précédentes de p & q , $(bf + cg) \cos. \phi + (cf - bg) \frac{\sin. \phi}{\cos. \psi} = 0$, où ϕ est l'anomalie qui répond au nœud.

Dénorons cette anomalie par α , on aura donc . . .
 $(bf + cg) \cos. \alpha \cos. \psi + (cf - bg) \sin. \alpha = 0$; d'où l'on tire
 $\frac{g}{f} = \frac{c \sin. \alpha + b \cos. \psi \cos. \alpha}{b \sin. \alpha - c \cos. \psi \cos. \alpha}$ (en mettant pour b & c leurs valeurs, §. 13) $= \frac{-\cos. \omega \sin. \alpha + \cos. \psi \sin. \omega \cos. \alpha}{\sin. \omega \sin. \alpha + \cos. \psi \cos. \omega \cos. \alpha}$; mais on a trouvé plus haut (§. 13.) $\frac{g}{f} = \text{tang. } \epsilon$; ainsi on aura l'équation . . .
 $\text{tang. } \epsilon = \frac{-\cos. \omega \sin. \alpha + \cos. \psi \sin. \omega \cos. \alpha}{\sin. \omega \sin. \alpha + \cos. \psi \cos. \omega \cos. \alpha}$; d'où il est aisé de tirer
 $\sin. \epsilon = \frac{-\cos. \omega \sin. \alpha + \cos. \psi \sin. \omega \cos. \alpha}{\sqrt{1 - \sin. \psi^2 \cos. \alpha^2}}$, $\cos. \epsilon = \frac{\sin. \omega \sin. \alpha + \cos. \psi \cos. \omega \cos. \alpha}{\sqrt{1 - \sin. \psi^2 \cos. \alpha^2}}$;
 & en substituant ces valeurs dans les expressions de f & g du §. 13, on trouvera
 f

$f = e \left(\cos. \omega \cos. \alpha + \frac{\sin. \omega \sin. \alpha}{\cos. \psi} \right), g = e \left(\sin. \omega \cos. \alpha - \frac{\cos. \omega \sin. \alpha}{\cos. \psi} \right);$
 par-là, & par les valeurs de b & c , on aura $e f - b g = e \tan g. \psi \cos. \alpha$,
 $b f + c g = -\frac{e \tan g. \psi \sin. \alpha}{\cos. \psi}, f + c(c f - b g) = \frac{e(\cos. \omega \cos. \alpha + \sin. \omega \sin. \alpha \cos. \psi)}{\cos. \psi^2},$
 $g - b(c f - b g) = \frac{e(\sin. \omega \cos. \alpha - \cos. \omega \sin. \alpha \cos. \psi)}{\cos. \psi^2}, (c f - b g)^2$
 $+ f^2 + g^2 = \frac{e^2}{\cos. \psi^2};$ de sorte qu'à cause de $p = e r \cos. \phi$,
 $= q \frac{e r \sin. \phi}{\cos. \psi},$ les formules (G) du §. 15 deviendront :

$$x = r \left(\cos. \omega \cos. (\phi - \alpha) - \sin. \omega \sin. (\phi - \alpha) \cos. \psi \right).$$

$$y = r \left(\sin. \omega \cos. (\phi - \alpha) + \cos. \omega \sin. (\phi - \alpha) \cos. \psi \right).$$

$$z = r \sin. \psi \sin. (\phi - \alpha).$$

dans lesquelles $\phi - \alpha$ est ce qu'on nomme l'argument de latitude.

(20). Si on fait

$$\frac{2 \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}} = \sin. u.$$

$$2 t \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i = \theta;$$

& qu'on se souvienne que $\sqrt{1 - \frac{4h}{a}} = e$ (§. 17.), il est clair que l'équation (F) du §. 14 prendra cette forme très-simple ; $u - e \sin. u = \theta$, dans laquelle u fera évidemment ce que l'on nomme, d'après Kepler, l'anomalie excentrique, mais comptée du périhélie, & où θ fera par conséquent l'anomalie moyenne.

Donc comme $\theta = i$ lorsque $t = 0$, on voit que la constante i n'est autre chose que l'époque de l'anomalie moyenne.

En appliquant les formules au mouvement de la Terre autour du Soleil, & prenant la distance moyenne $\frac{a}{2}$ pour l'unité, on aura (en négligeant $m = \frac{1}{304355}$ vis-à-vis de 1)

$t + i = \theta$ égal à l'anomalie moyenne du Soleil ; d'où il s'ensuit que t exprimé en angles , représentera proprement le mouvement moyen du Soleil pendant le temps écoulé , depuis l'époque d'où l'on part ; & qu'ainsi en divisant la valeur de t par 360° , ou bien si t est exprimé en nombres (la distance moyenne du Soleil étant l'unité) en divisant la valeur de t par le rapport de la circonférence au rayon , on aura le temps exprimé en années sidérales , puisque nous pouvons faire abstraction ici du mouvement de l'apogée du Soleil.

Or , puisque $1 - \frac{4h}{a} - 4\left(\frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2} - \frac{h}{a}\right) = \left(1 - \frac{2r}{a}\right)^2$, il est clair qu'on aura $r - \frac{2r}{a} = e \cos. u$; donc $r = \frac{a}{2} (1 - e \cos. u)$, & comme $p = 2h - r$, & $q = 2\sqrt{h(1 + b^2 + c^2)} \times \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$ (§. 14 & 16.) , on aura à cause de $h = \frac{a(1 - e^2)}{4}$,

$$p = \frac{ae}{2} (\cos. u - e) ,$$

$$q = \frac{ae}{2} \sqrt{(1 - e^2)(1 + b^2 + c^2)} \sin. u .$$

De sorte qu'en substituant ces valeurs dans les formules (G) , on aura aussi x , y , z exprimées en u .

Dans la parabole , le grand axe a devient infini , par conséquent l'angle u est infiniment petit. Dans les ellipses très-allongées , telles que sont les orbites des Comètes , la quantité a est seulement très-grande ; donc l'angle u sera très-petit , du moins tant que r n'est pas fort grand.

Dans ce cas donc , on aura $u = \sin. u + \frac{1}{6} \sin. u^3 + \frac{3}{40} \sin. u^5$
 $+ \frac{5}{112} \sin. u^7 + \&c.$, & l'équation entre θ & u deviendra
 $\theta = (1 - e) \sin. u + \frac{1}{6} \sin. u^3 + \frac{3}{40} \sin. u^5 + \frac{5}{112} \sin. u^7 + \&c.$
 mais $1 - e = \frac{1 - e^2}{1 + e} = \frac{4h}{a(1 + e)}$; donc si on met pour θ sa valeur $2t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i$, & qu'on fasse $i\sqrt{\frac{a^3}{8}} = j$,

$\sin. u = \sqrt{\frac{w}{a}}$, on aura, après avoir tout multiplié par $\sqrt{\frac{a^3}{8}}$,

$$t \sqrt{1+m+j} = \frac{2h}{1+e} w + \frac{11}{6} w^3 + \frac{3}{10a} w^5 + \frac{5}{28a^2} w^7 + \&c.$$

où w sera une quantité finie, puisqu'on aura

$$w = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{1 - \frac{4h}{a}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{e},$$

& substituant pour $\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$ sa valeur en ϕ trouvée ci-dessus, il viendra $w = \frac{\sqrt{2} h \sin. \phi}{1+e \cos. \phi}$. Pour la parabole, on fera

$a = \infty$, & l'on aura $t \sqrt{1+m+j} = h w + \frac{w^3}{6}$, où (à cause de $e = 1$) $w = \sqrt{2(r-h)} = \sqrt{2h \cdot \text{tang.} \frac{\phi}{2}}$. Et h sera pour lors égal à la distance périhélie.

(21.) Nous remarquerons encore que si, dans l'équation différentielle entre dr & dt du §. 14, on substitue pour dr & pour $\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$ leurs valeurs en ϕ (§. 18.), on trouve $dt = \sqrt{\frac{1}{2h(1+m)}} r^2 d\phi$; & si on différencie l'équation qui donne la relation entre t & u (§. 20.), & qu'on y mette pour $1 - e \cos. u$, $\frac{2r}{a}$, il vient $dt = \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}} \cdot r du$; dans la première formule, ϕ est l'anomalie vraie; & dans la seconde, u est l'anomalie excentrique.



SECTION III.

Intégration des équations différentielles des Perturbations.

(11.) **N**ous avons vu, dans la première Section, que x, y, z étant les coordonnées de l'orbite non altérée, & $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$, celles de l'orbite troublée par l'action d'une Planète μ , on a pour la détermination des quantités $\delta x, \delta y, \delta z$ les équations suivantes.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \delta x}{dt^2} &= (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dz} \delta z \right) - \mu X, \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} &= (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dx} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dz} \delta z \right) - \mu Y, \\ \frac{d^2 \delta z}{dt^2} &= (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz dx} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz dy} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} \delta z \right) - \mu Z,\end{aligned}$$

en faisant pour abrégér (§. 12.)

$$X = \frac{d. \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}{dx}, Y = \frac{d. \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}{dy}, Z = \frac{d. \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}{dz}.$$

(23.) C'est donc de l'intégration de ces équations que dépend la recherche des perturbations causées par l'action d'une Planète quelconque sur la Comète. Or cette intégration dépend, comme l'on fait, de celle du cas où il n'y auroit aucun terme tout connu, à cause que les variables inconnues $\delta x, \delta y, \delta z$ ne paroissent que sous la forme linéaire. Ainsi toute la difficulté se réduit à intégrer des équations de la forme suivante.

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} = (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dz} \delta z \right),$$

$$\frac{d^2 \delta y}{dt^2} = (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dx} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy dz} \delta z \right),$$

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = (1 + m) \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz dx} \delta x + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz dy} \delta y + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} \delta z \right).$$

(24). Si on se rappelle les calculs du §. 7, on doit voir que les équations précédentes résultent des équations de l'orbite non altérée, en y faisant varier les quantités x, y, z , des différences $\delta x, \delta y, \delta z$ regardées comme infiniment petites. Donc les intégrales des équations dont il s'agit doivent résulter aussi des intégrales des mêmes équations de l'orbite non altérée, en y faisant varier non seulement ces mêmes quantités, mais encore les constantes arbitraires introduites par les différentes intégrations, & qui n'existant point dans les équations différentielles, peuvent, à leur égard, être aussi regardées comme variables.

Ainsi donc, pour avoir les intégrales des trois équations différentielles du §. précédent, il n'y aura qu'à différencier à l'ordinaire les intégrales de l'orbite non altérée, trouvées dans la seconde Section, en y regardant les trois indéterminées x, y, z , & les six arbitraires a, b, c, f, g, i , comme variables à la fois, & marquant leurs différences par la caractéristique δ ; (à l'égard de h , elle doit aussi être traitée comme variable, parce que c'est une fonction de a, b, c, f, g donnée par l'équation H du §. 16.) les différences de ces arbitraires seront elles-mêmes les nouvelles constantes arbitraires que les intégrales cherchées doivent contenir pour être complètes.

(25). Comme les formules (G) du §. 15 donnent x, y, z en r , & que la formule (F) du §. 14 donne r en t , on pourra tirer directement de la différenciation des premières, les valeurs de $\delta x, \delta y, \delta z$ en δr ; ensuite on aura δr par la différenciation de la dernière; mais à la place de r , il sera plus simple

d'introduire l'angle u , au moyen des formules du §. 20; & pour donner à notre calcul toute la simplicité dont il est susceptible, nous remarquerons de plus que la position du plan des x & y , auquel nous avons jusqu'ici rapporté l'orbite de la Comète, étant arbitraire, on peut, sans nuire à la généralité du problème, supposer que ce plan coïncide avec celui de l'orbite non altérée de la Comète; & l'on peut, par la même raison, supposer aussi que l'axe des x coïncide avec le grand axe de la même orbite, en sorte que les abscisses x soient prises depuis le foyer, & soient positives en allant vers l'abside inférieure.

Ces deux suppositions donneront (§. 15 & 19.) $\psi = 0$, $\alpha = \omega$; donc $b = 0$, $c = 0$, $f = e$, $g = 0$, ce qui simplifiera beaucoup les expressions finies de x , y , z ; mais comme les différences δb , δc , δg ne sont pas nulles, il ne faudra pas faire disparaître entièrement les quantités b , c , g ; mais il en faudra conserver les premières dimensions dans les expressions de x , y , z , afin de pouvoir en tirer par la différentiation les valeurs complètes de δx , δy , δz .

(26). De cette manière, on aura donc (§. 15, form. G)
 $x = \frac{f p - g q}{f^2}$, $y = \frac{g p + f q}{f^2}$, $z = \frac{b p + c q}{f^2}$, & par les formules du §. 20, on aura, à cause de $e = f$,
 $p = \frac{a f}{2} (\cos. u - f)$, $q = \frac{a f}{2} \sqrt{1 - f^2} \sin. u$, de sorte qu'en substituant il viendra

$$x = \frac{a}{2} (\cos. u - f) - \frac{a g}{2 f} \sqrt{1 - f^2} \sin. u,$$

$$y = \frac{a}{2} \sqrt{1 - f^2} \sin. u + \frac{a g}{2 f} (\cos. u - f),$$

$$z = \frac{a b}{2} (\cos. u - f) + \frac{a c}{2} \sqrt{1 - f^2} \sin. u.$$

Différenciant donc suivant la caractéristique δ , en faisant tout varier, & supposant ensuite les constantes b , c , g nulles, on aura :

$$\begin{aligned}\delta x &= \frac{\cos u - f}{2} \delta a - \frac{a}{2} \delta f - \frac{a \sqrt{1-f^2}}{2f} \sin u \delta g \\ &\quad - \frac{a}{2} \sin u \delta u. \\ \delta y &= \frac{\sqrt{1-f^2}}{2} \sin u \delta a - \frac{a f}{2 \sqrt{1-f^2}} \sin u \delta f + \frac{a (\cos u - f)}{2f} \delta g \\ &\quad + \frac{a \sqrt{1-f^2}}{2} \cos u \delta u.\end{aligned}$$

$$\delta z = \frac{a (\cos u - f)}{2} \delta b + \frac{a \sqrt{1-f^2}}{2} \sin u \delta c.$$

Mais par le §. 20, on a, en mettant f à la place de e ;
 $u - f \sin u = \theta = 2 \varepsilon \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i$; donc faisant varier f , a ,
 i & u , l'on en tirera la valeur de δu , laquelle sera

$$\delta u = \frac{-3 \varepsilon \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} \cdot \delta a + \sin u \delta f + \delta i}{\cos u - f \cos u}.$$

Substituant donc cette valeur de δu dans les expressions précédentes de δx , δy , δz , on aura les valeurs cherchées, lesquelles seront évidemment de cette forme :

$$\delta x = A \delta a + B \delta f + C \delta g + O \delta i.$$

$$\delta y = E \delta a + F \delta f + G \delta g + H \delta i.$$

$$\delta z = K \delta b + L \delta c.$$

en supposant, pour abréger,

$$A = \frac{\cos u - f}{2} + \frac{3 \varepsilon}{2} \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} \times \frac{\sin u}{1 - f \cos u},$$

$$B = -\frac{a}{2} \left(1 + \frac{\sin u \cdot u^2}{1 - f \cos u} \right),$$

$$C = -\frac{a \sqrt{1-f^2}}{2f} \sin u,$$

$$D = -\frac{a}{2} \times \frac{\sin u}{1 - f \cos u},$$

$$E = \frac{\sqrt{1-f^2}}{2} \sin u - \frac{3 \varepsilon}{2} \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} \times \frac{\sqrt{1-f^2} \cos u}{1 - f \cos u},$$

$$F = -\frac{a f}{2 \sqrt{1-f^2}} \sin u + \frac{a \sqrt{1-f^2}}{2} \times \frac{\sin u \cos u}{1 - f \cos u};$$

$$G = \frac{a}{2f} \left(\cos f \cdot u - f' \right),$$

$$H = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{1-f^2}}{1-f \cos f \cdot u} \times \frac{\cos f \cdot u}{1-f \cos f \cdot u},$$

$$K = \frac{a}{2} \left(\cos f \cdot u - f' \right),$$

$$L = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{1-f^2}}{1-f \cos f \cdot u} \cdot \sin u.$$

Telles sont les valeurs complètes des quantités δx , δy , δz , en tant qu'elles résultent des trois équations différentielles du §. 23 ; & les quantités δa , δb , δc , δf , δg , δi sont les six constantes arbitraires que ces valeurs doivent contenir à raison des six intégrations qu'elles supposent.

(27). Voyons maintenant comment on doit déterminer ces nouvelles arbitraires ; il est clair qu'elles dépendent des valeurs des quantités δx , δy , δz , & de leurs différences premières, $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$ pour un instant quelconque donné. Il faudra donc différencier les expressions de δx , δy , δz trouvées ci-dessus, en y regardant les arbitraires δa , δb , δc , δf , δg , δi comme constantes, c'est-à-dire, en y faisant varier seulement les quantités qui sont des fonctions du temps t pour avoir les valeurs de $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, lesquelles seront représentées en général par les formules suivantes :

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{dA}{dt} \delta a + \frac{dB}{dt} \delta f + \frac{dC}{dt} \delta g + \frac{dD}{dt} \delta i;$$

$$\frac{d\delta y}{dt} = \frac{dE}{dt} \delta a + \frac{dF}{dt} \delta f + \frac{dG}{dt} \delta g + \frac{dH}{dt} \delta i,$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{dK}{dt} \delta b + \frac{dL}{dt} \delta c.$$

Ces trois équations étant combinées avec les trois du §. précédent, on en tirera par la méthode ordinaire d'élimination les valeurs des six inconnues δa , δb , δc , δf , δg , δi ; & il est aisé de voir que ces valeurs seront de la forme suivante :

$$\delta a = A' \delta x + B' \delta y + C' \frac{d\delta x}{dt} + D' \frac{d\delta y}{dt},$$

$$\delta f = E' \delta x + F' \delta y + G' \frac{d\delta x}{dt} + H' \frac{d\delta y}{dt},$$

$$\delta g = A'' \delta x + B'' \delta y + C'' \frac{d\delta x}{dt} + D'' \frac{d\delta y}{dt},$$

$$\delta i = E'' \delta x + F'' \delta y + G'' \frac{d\delta x}{dt} + H'' \frac{d\delta y}{dt},$$

$$\delta b = K' \delta \zeta + L' \frac{d\delta \zeta}{dt},$$

$$\delta c = K'' \delta \zeta + L'' \frac{d\delta \zeta}{dt}.$$

les quantités $A', B', C', \&c.$ étant des fonctions rationnelles de $A, B, C, \&c.$ & de $\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt}, \&c.$

(28). Quoique la détermination de ces quantités $A', B', \&c.$ ne soit pas difficile, elle pourroit néanmoins entraîner dans des calculs très-longes, si on l'entreprendoit par la méthode ordinaire; voici un moyen de la simplifier beaucoup.

Ce moyen consiste à chercher d'abord les valeurs des constantes a, b, c, f, g, i , en x, y, ζ, t , & en $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, à quoi on parviendra facilement par le moyen des formules du §. 14; ensuite à différencier ces valeurs relativement à la caractéristique δ , c'est-à-dire en faisant varier seulement les constantes dont il s'agit, & les indéterminées $x, y, \zeta, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, & marquant les variations par δ ; & comme les différentiations relatives aux deux caractéristiques différentes d & δ sont totalement indépendantes entr'elles, on voit aisément que δd sera la même chose que dd , de sorte qu'on aura ainsi directement les valeurs de $\delta a, \delta b, \delta c, \&c.$ en $\delta x, \frac{d\delta x}{dt}, \delta y, \&c.$

Nous allons donner ici les résultats de ce calcul, parce qu'ils nous seront utiles dans la suite.

(29). On voit d'abord (§. 14.) que l'équation (B) donnera la valeur de a , & que l'équation (D) donnera celle de h ; ensuite

l'équation finie (E), combinée avec la différentielle, donnera les valeurs de f & g ; & de même l'équation (A), combinée avec la différentielle, donnera celle de b & c ; enfin l'équation (F) donnera la valeur de i : on aura donc d'abord,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + d\zeta^2}{2(1+m)dt^2},$$

$$h = r - \frac{r^2}{a} - \frac{(d.r^2)^2}{8(1+m)dt^2}; \text{ ensuite on trouvera :}$$

$$f = \frac{(2h-r)dy + ydr}{xdy - ydx}, g = \frac{(2h-r)dx + xdr}{ydx - xdy},$$

$$b = \frac{\zeta dy - y d\zeta}{xdy - ydx}, c = \frac{\zeta dx - x d\zeta}{ydx - xdy}.$$

or si, dans la valeur de h , on substitue celle de $\frac{1}{a}$, & qu'on y mette $2(xdx + ydy + \zeta d\zeta)$ à la place de $d.r^2$, on a:

$$h = \frac{r^2(dx^2 + dy^2 + d\zeta^2) - (xdx + ydy + \zeta d\zeta)^2}{2(1+m)dt^2},$$

ce qui, à cause de $r^2 = x^2 + y^2 + \zeta^2$, peut se réduire à cette forme:

$$h = \frac{(xdy - ydx)^2 + (\zeta dy - y d\zeta)^2 + (x d\zeta - \zeta dx)^2}{2(1+m)dt^2};$$

mais on vient de trouver $\zeta dy - y d\zeta = b(xdy - ydx)$, $x d\zeta - \zeta dx = c(xdy - ydy)$; donc faisant ces substitutions, extrayant la racine carrée, & supposant pour abrégé

$\frac{h}{1+b^2+c^2} = K^2$, on aura $K = \frac{xdy - ydx}{dt\sqrt{2(1+m)}}$, & les autres formules deviendront, étant multipliées par K ,

$$Kf = \frac{(2h-r)dy + ydr}{dt\sqrt{2(1+m)}}, Kg = -\frac{(2h-r)dx + xdr}{dt\sqrt{2(1+m)}},$$

$$Kb = \frac{\zeta dy - y d\zeta}{dt\sqrt{2(1+m)}}, Kc = -\frac{\zeta dx - x d\zeta}{dt\sqrt{2(1+m)}}.$$

Enfin on aura (form. F), $i = -2t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3}$

$$+ \text{arc. sin.} \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}} - \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}}.$$

(30). En différenciant ces équations par rapport à la caract-

teristique δ , & changeant par-tout δd en $d\delta$, on trouvera les formules suivantes :

$$\delta a = a^2 \left(\frac{\delta r}{r^2} + \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{(1+m) dt^2} \right),$$

$$\delta K = \frac{dy \delta x - dx \delta y + x d\delta y - y d\delta x}{dt \sqrt{2(1+m)}},$$

$$\delta f = \frac{dy (2 \delta h - \delta r) + dr \delta y + (2h - r) d\delta y + y d\delta r}{K dt \sqrt{2(1+m)}} - \frac{f \delta K}{K},$$

$$\delta g = - \frac{dx (2 \delta h - \delta r) + dr \delta x + (2h - r) d\delta x + x d\delta r}{K dt \sqrt{2(1+m)}} - \frac{g \delta K}{K},$$

$$\delta b = \frac{dy \delta z - dz \delta y + z d\delta y - y d\delta z}{K dt \sqrt{2(1+m)}} - \frac{b \delta K}{K},$$

$$\delta c = - \frac{dx \delta z - dz \delta x + z d\delta x - x d\delta z}{K dt \sqrt{2(1+m)}} - \frac{c \delta K}{K},$$

$$\delta h = 2(1 + b^2 + c^2) K \delta K + 2 K^2 (b \delta b + c \delta c);$$

dans lesquelles il faudra substituer pour δr sa valeur, $\frac{x \delta x + y \delta y + z \delta z}{r}$, & pour $d\delta r$, $\frac{x d\delta x + y d\delta y + z d\delta z}{r}$,

$$+ d. \frac{x}{r} \times \delta x + d. \frac{y}{r} \times \delta y + d. \frac{z}{r} \times \delta z.$$

Quant à la valeur de δi , pour la trouver plus aisément, on supposera $\frac{r}{a} = v$, $\frac{h}{a} = n$, & $\frac{2 \sqrt{v - v^2 - n}}{\sqrt{1 - 4n}} = V$; ce qui

réduira la valeur de i à cette forme $i = -2t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3}$

+ arc sin. $V - V \sqrt{1 - 4n}$; de sorte qu'on aura en différenciant suivant δ , & faisant tout varier, excepté t ,

$$\delta i = 3t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} \delta a + \frac{\delta V}{\sqrt{1 - V^2}} - \sqrt{1 - 4n} \delta V$$

- $V \delta \sqrt{1 - 4n}$; or $\sqrt{1 - V^2} = \frac{1 - 2v}{\sqrt{1 - 4n}}$; donc substituant cette valeur, ainsi que celles de V & de δV , & réduisant il viendra

$$\delta i = 3t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} \delta a + \frac{2v \delta v + \frac{2 \delta n}{1 - 4n} (v - 2n)}{\sqrt{v - v^2 - n}},$$

où il n'y aura plus qu'à remettre pour v & n leurs valeurs $\frac{r}{a}$;

$\frac{h}{a}$, & par conséquent pour δv & δn les quantités $\frac{a \delta r - r \delta a}{a^2}$,
 $\frac{a \delta h - h \delta a}{a^2}$.

Après avoir trouvé cette expression de δi , j'ai remarqué qu'elle avoit l'inconvénient de contenir au dénominateur la radi-

cale $\sqrt{v - v^2 - n}$, savoir , $\frac{\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}}$, lequel, comme on l'a vu dans le §. 17, devient nul dans les deux abscides de l'orbite ; de sorte que comme δi ne sauroit devenir infini, il faut nécessairement que le numérateur soit alors pareillement nul ; d'où il s'ensuit que la formule sera en défaut dans ces deux points.

Pour éviter cet inconvénient, il faut tâcher de donner une autre forme à la valeur de δi , & qui soit telle qu'il n'y ait aucune fonction des variables au dénominateur ; voici comment je suis parvenu à ce but.

Je considère que la quantité $\frac{\delta V}{\sqrt{1 - V^2}}$ est la même chose que celle-ci, $\sqrt{1 - V^2} \delta V - V \delta \sqrt{1 - V^2}$, & qu'ainsi on peut réduire la première expression de δi à celle-ci.

$$\delta i = 3 \pm \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^2} \delta a + \left(\sqrt{1 - V^2} - \sqrt{1 - 4n} \right) \delta V - V \delta \left(\sqrt{1 - V^2} + \sqrt{1 - 4n} \right) ;$$

$$\text{mais } V = \frac{\sqrt{v - v^2 - n}}{\sqrt{1 - 4n}} = \frac{\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a} \sqrt{1 - 4n}} = (\text{par le §.}$$

$$16, \text{ \& à cause de } h = na) \frac{q}{a \sqrt{1 - 4n} \sqrt{n(1 + b^2 + c^2)}} ;$$

$$\text{\& } \sqrt{1 - V^2} = \frac{1 - 2v}{\sqrt{1 - 4n}}, \text{ par conséquent } \sqrt{1 - V^2} -$$

$$\sqrt{1 - 4n} = \frac{4n - 2v}{\sqrt{1 - 4n}} = \frac{4h - 2r}{a \sqrt{1 - 4n}} = \frac{2p}{a \sqrt{1 - 4n}} ;$$

(§. 14.), & $\sqrt{1 - V^2} + \sqrt{1 - 4n} = \frac{2p}{a\sqrt{1 - 4n}}$
 + $2\sqrt{1 - 4n}$; donc faisant ces substitutions dans l'équation précédente, & effaçant les termes qui viendront de la différentiation de la quantité $a\sqrt{1 - 4n}$, laquelle divise p & q , parce que ces termes se détruisent mutuellement, on aura

$$\delta i = 3t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^2} \cdot \delta a + \frac{2}{a^2(1+4n)} \left(p \delta \cdot \frac{q}{\sqrt{n(1+b^2+c^2)}} - \frac{q}{\sqrt{n(1+b^2+c^2)}} (\delta p - 2a\delta n) \right).$$

Or les formules (G) du §. 15 donnent

$$p = fx + gy$$

$$q = (f + c(cf - bg))y - (g - b(cf - bg))x;$$

donc substituant ces valeurs, on aura pour δi une expression route rationnelle & entière, & qui ne fera par conséquent sujette à aucun inconvénient.

On remarquera encore à l'égard de δf , δg , δb , δc , qu'on peut aussi les exprimer d'une manière plus simple & plus commode à quelques égards, en les déduisant directement des équations (A) & (E) différenciées d'abord relativement à la caractéristique δ , & ensuite par rapport à la caractéristique ordinaire d ; ce qui, dans le fond, revient au même que si on les différencie d'abord par rapport à cette dernière caractéristique, & ensuite par rapport à la première, ainsi que nous en avons usé plus haut.

De cette manière, l'équation (E) donnera ces deux-ci :

$$2\delta h - \delta r = x\delta f + y\delta g + f\delta x + g\delta y,$$

$$-d\delta r = dx\delta f + dy\delta g + fdx + gdy;$$

d'où l'on tire, en mettant pour $x dy - y dx$, sa valeur

$$K dt \sqrt{2(1+m)},$$

$$\delta f = \frac{dy(2\delta h - \delta r) + y d\delta r - f(dy\delta x - y d\delta x) - g(dy\delta y - y d\delta y)}{K dt \sqrt{2(1+m)}},$$

$$\delta g = - \frac{dx(2\delta h - \delta r) + x d\delta r - f(dx\delta x - x d\delta x) - g(dx\delta y - x d\delta y)}{K dt \sqrt{2(1+m)}}.$$

De même l'équation (A) donnera ces deux ci :

$$\begin{aligned}\delta z &= x \delta b + y \delta c + b \delta x + c \delta y; \\ d \delta z &= d x \delta b + d y \delta c + b d \delta x + c d \delta y;\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\delta b &= \frac{d y \delta z - y d \delta z - b (d y \delta x - y d \delta x) - c (d y \delta y - y d \delta y)}{K d t \sqrt{2(1+m)}}, \\ \delta c &= - \frac{d x \delta z - x d \delta z - b (d x \delta x - x d \delta x) - c (d x \delta y - x d \delta y)}{K d t \sqrt{2(1+m)}},\end{aligned}$$

ce sont les formules que nous emploierons dans la suite, par préférence aux autres trouvées ci-dessus.

Enfin on observera que comme $n = \frac{h}{a}$, on aura par la formule (H) du §. 16, $4n = 1 - \frac{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}{1 + b^2 + c^2}$, de sorte qu'en différenciant suivant δ , on aura la valeur de δn exprimée à volonté par δh & δa , ou par δf , δg , δb , δc .

(31). Les formules précédentes ont toute la généralité possible ; mais pour les appliquer à notre cas , il y faut supposer $b = 0$, $c = 0$, $g = 0$ (§. 25.), ce qui donne $z = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$ (équat. G), par conséquent $d \frac{x}{r} = - \frac{(x dy - y dx) y}{r^3}$, $d \frac{y}{r} = \frac{(x dy - y dx) x}{r^3}$; donc $\delta r = \frac{x \delta x + y \delta y}{r}$, $d \delta r = \frac{x d \delta x + y d \delta y}{r} + \frac{(x \delta y - y \delta x)(x dy - y dx)}{r^3}$; de plus on aura $K = \sqrt{h}$ & $\delta K = \frac{\delta h}{2 \sqrt{h}}$; donc faisant ces différentes réductions dans les formules ci-dessus, elles deviendront

$$\begin{aligned}\delta h &= 2 h \frac{d y \delta x - d x \delta y + x d \delta y - y d \delta x}{d t \sqrt{2 h (1+m)}} \\ \delta a &= a^2 \left(\frac{x \delta x + y \delta y}{r^3} + \frac{d x d \delta x + d y d \delta y}{(1+m) d t^2} \right) \\ \delta f &= \frac{y}{r^3} (x \delta y - y \delta x) - \left(f + \frac{x}{r} \right) \frac{d y \delta x - y d \delta x}{d t \sqrt{2 h (1+m)}} \\ &\quad - \frac{y}{r} \frac{d y \delta y - y d \delta y}{d t \sqrt{2 h (1+m)}} + \frac{2 d y \delta h}{d t \sqrt{2 h (1+m)}},\end{aligned}$$

$$\delta g = -\frac{x}{r^3} (x \delta y - y \delta x) + \left(f + \frac{x}{r}\right) \frac{dx \delta x - x d \delta x}{dt \sqrt{2 h (1+m)}} \\ + \frac{y}{r} \cdot \frac{dx \delta y - x d \delta y}{dt \sqrt{2 h (1+m)}} - \frac{2 dx \delta h}{dt \sqrt{2 h (1+m)}},$$

$$\delta b = \frac{dy \delta z - y d \delta z}{dt \sqrt{2 h (1+m)}},$$

$$\delta c = \frac{-dx \delta z + x d \delta z}{dt \sqrt{2 h (1+m)}},$$

$$\delta i = 3 t \frac{\sqrt{2 (1+m)}}{a^3} \cdot \delta a + \frac{2 (p \delta q - q \delta p)}{a^2 (1-4n) \sqrt{n}} \\ - \frac{q (p - 4 a n) \delta n}{a^2 (1+4n) n^{\frac{3}{2}}};$$

mais, à cause de $b=0, c=0, g=0$, on aura $p=fx, q=fy$,
 $\delta p = f \delta x + x \delta f + y \delta g$, $\delta q = f \delta y + y \delta f - x \delta g$;
 donc $p \delta q - q \delta p = f^2 (x \delta y - y \delta x) + (x^2 + y^2) f' \delta g$;
 de plus $n = \frac{h}{a} = \frac{1-f^2}{4}$, & $\delta n = -\frac{f \delta f}{2}$; donc la der-
 nière formule deviendra

$$\delta i = 3 t \frac{\sqrt{2 (1+m)}}{a^3} \cdot \delta a + \frac{2 (x \delta y - y \delta x - \frac{r^2 \delta g}{f})}{\sqrt{a^3 h}} \\ + \frac{y (fx - 4 h) \delta f}{2 \sqrt{a h^3}}.$$

Et l'on remarquera qu'à cause de $n = \frac{h}{a}$ & de $\delta n = -\frac{f \delta f}{2}$,
 on aura encore cette équation entre δa , δh , & δf , savoir,

$$a \delta h - h \delta a + \frac{a^2 f \delta f}{2} = 0,$$

laquelle pourra tenir lieu d'une quelconque des trois premières
 formules.

Telles sont donc les valeurs des quantités $\delta h, \delta a, \delta f$,
 $\delta g, \delta b, \delta c, \delta i$ en $\delta x, \delta y, \delta z, \frac{d \delta x}{dt}, \frac{d \delta y}{dt}, \frac{d \delta z}{dt}$; par con-
 séquent si on met dans ces formules les valeurs de x, y ,
 dx, dy & dt en u & du , savoir, $x = \frac{a}{2} (\cos u - f)$, y

$$= \frac{a}{2} \sqrt{1-f^2} \cos f \cdot u \, du, \, dt = \frac{\sqrt{a}}{2(1+m)} \cdot r \, du \text{ (§. 21.)}$$

$$= \frac{a}{2} \frac{\sqrt{a}}{2(1+m)} \cdot (1-f \cos f \cdot u) \, du, \text{ à cause de } e=f, \text{ elles}$$
 doivent devenir identiques avec celles du §. 27 ; de sorte qu'on pourra trouver, par la comparaison des coefficients de δx , δy , δz , $d\delta x$, &c. dans les expressions de δa , δf , &c., les valeurs des quantités A' , B' , C' , &c. des formules de ce §. ; lesquelles valeurs seront nécessairement les mêmes que si on les avoit déduites des formules du §. 26 , au moyen de l'élimination.

(32). Revenons maintenant aux expressions de δx , δy , δz trouvées dans le §. que nous venons de citer : comme ces expressions satisfont aux équations différentielles du §. 23 , les quantités δa , δb , δc , δf , δg , δi demeurant constantes & indéterminées , il s'en suit que, par la substitution de ces valeurs de δx , δy , δz , dans les mêmes équations , tous les termes doivent se détruire d'eux-mêmes , indépendamment des quantités δa , δb , &c. ; donc en général les termes qui renfermeront les quantités finies δa , δb , &c. se détruiront toujours dans les équations dont il s'agit , soit que ces quantités soient constantes ou non.

Donc si on suppose , ce qui est permis , que les mêmes expressions de δx , δy , δz satisfassent aux équations du §. 22 , (lesquelles ne diffèrent , comme l'on voit , de celles du §. 23 , que par les termes $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$ ajoutés à leurs seconds membres), mais en y regardant les six quantités δa , δb , δc , δf , δg , δi comme des variables indéterminées , & qu'on en fasse la substitution , il est visible que les termes qui renfermeront ces variables finies s'en iront aussi , & que les équations résultantes seront (§. 26.):

$$\begin{aligned}
 & \frac{A \, d^2 \delta a + B \, d^2 \delta f + C \, d^2 \delta g + D \, d^2 \delta i}{d t^2} \\
 + 2 \, & \frac{d A \, d \delta a + d B \, d \delta f + d C \, d \delta g + d D \, d \delta i}{d t^2} = - \mu X,
 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} & \frac{E d^2 \delta a + F d^2 \delta f + G d^2 \delta g + H d^2 \delta i}{d t^2} \\ + 2 \frac{d E d \delta a + d F d \delta f + d G d \delta g + d H d \delta i}{d t^2} &= - \mu Y; \\ & \frac{K d^2 \delta b + L d^2 \delta c + 2 (d K d \delta b + d L d \delta c)}{d t^2} = - \mu Z. \end{aligned}$$

(33). Comme il y a ici six variables indéterminées, & qu'il n'y a que trois équations pour la détermination de ces variables, il est clair qu'on peut supposer à volonté trois autres équations entre ces mêmes variables, & il fera à propos de prendre ces équations en sorte que les différences secondes des variables δa , δb , &c. disparaissent d'elles-mêmes; c'est de quoi on viendra à bout en supposant

$$\begin{aligned} & \frac{A d \delta a + B d \delta f + C d \delta g + D d \delta i}{d t} = 0, \\ & \frac{E d \delta a + F d \delta f + G d \delta g + H d \delta i}{d t} = 0, \\ & \frac{R d \delta b + L d \delta c}{d t} = 0; \end{aligned}$$

car en retranchant respectivement des équations précédentes les différences de celles-ci, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{d A d \delta a + d B d \delta f + d C d \delta g + d D d \delta i}{d t} = - \mu X, \\ & \frac{d E d \delta a + d F d \delta f + d G d \delta g + d H d \delta i}{d t} = - \mu Y, \\ & \frac{d R d \delta b + d L d \delta c}{d t} = - \mu Z. \end{aligned}$$

Ayant ainsi six équations entre les six quantités $\frac{d \delta a}{d t}$, $\frac{d \delta f}{d t}$, $\frac{d \delta g}{d t}$, $\frac{d \delta i}{d t}$, $\frac{d \delta b}{d t}$, $\frac{d \delta c}{d t}$, on déterminera, par l'élimination, la valeur de chacune de ces quantités; ensuite il n'y aura plus qu'à multiplier ces différentes valeurs par $d t$, & les intégrer; on aura de cette manière les valeurs des variables δa , δb , δc , δf , δg , δi qu'il faudra substituer dans les expressions de δx , δy , δz ; & les équations du §. 22, qui expriment les perturbations de la Comète, seront résolues.

(34). Il est important de remarquer que si on différencie les

expressions de δx , δy , δz , on aura, en vertu des équations supposées ci-dessus,

$$d\delta x = dA\delta a + dB\delta f + dC\delta g + dD\delta i,$$

$$d\delta y = dE\delta a + dF\delta f + dG\delta g + dH\delta i,$$

$$d\delta z = dR\delta b + dL\delta c,$$

précisément, comme si les quantités δa , δf , δg , δi , δb , δc étoient constantes, parce que les termes dépendans des variations de ces quantités sont précisément ceux qui forment les équations supposées. D'où il est facile de conclure que si les équations différentielles du §. 22 contenoient aussi les différences premières de δx , δy , δz , elles s'intégreroient également par la méthode du §. précédent, & l'on parviendroit aux mêmes résultats.

Il y a plus, & c'est ici le point essentiel, dans l'orbite non altérée on a pour coordonnées x , y , z , fonctions du temps t & des six constantes arbitraires a , f , g , i , b , c , lesquelles déterminent les six élémens de l'orbite, savoir, le grand axe, l'excentricité, la position de l'aphélie, l'époque du passage par l'aphélie, le lieu du nœud, & l'inclinaison (§. 17, 19, 20). Dans l'orbite troublée, les coordonnées sont $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, les quantités δx , δy , δz n'étant autre chose que les variations de x , y , z provenant des variations δa , δf , δg , δi , δb , δc des six constantes a , f , g , i , b , c , comme on l'a vu ci-dessus. Ainsi, dans l'orbite troublée, les coordonnées sont exprimées de la même manière que dans l'orbite non troublée, c'est-à-dire qu'elles sont les mêmes fonctions de t & de $a + \delta a$, $f + \delta f$, $g + \delta g$, $i + \delta i$, $b + \delta b$, $c + \delta c$, qu'elles le sont de t , a , f , g , i , b , c dans l'orbite non troublée. Par conséquent on peut à chaque instant regarder l'orbite troublée comme étant de la même forme que l'orbite non troublée, mais dont les élémens dépendent des quantités $a + \delta a$, $f + \delta f$, $g + \delta g$, $i + \delta i$, $b + \delta b$, $c + \delta c$, lesquelles étant variables, il s'ensuit que les élémens de l'orbite troublée seront variables aussi, & que les quantités δa , δf , δg , δi , δb , δc ser-

viront à déterminer leurs variations. Or comme nous venons de voir que les valeurs de ces quantités sont telles que les différences premières de δx , δy , δz sont les mêmes que si ces quantités étoient constantes, il est aisé d'en conclure que les élémens de l'orbite troublée, quoiqu'essentiellement variables, peuvent néanmoins être regardés & traités comme constans pendant un instant ; & qu'ainsi non seulement le lieu de la Comète dans l'orbite troublée, mais encore son mouvement instantané, c'est-à-dire sa vitesse & sa direction, seront dans chaque instant les mêmes que l'on trouveroit en les déterminant à l'ordinaire dans une orbite fixe dont les élémens seroient ceux qui répondent à ce même instant.

(35). La difficulté est donc réduite à déterminer les valeurs des quantités δa , δf , δg , δi , δb , δc au moyen des six équations du §. 33.

Or, en examinant ces équations, & en les comparant avec les formules qui donnent les valeurs de δx , δy , δz , & de leurs différences $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$ (§. 26, 27.), il est aisé de voir qu'elles sont semblables, & qu'elles peuvent se déduire de ces mêmes formules en y changeant seulement les quantités δa , δf , δg , &c. en leurs différences $\frac{d\delta a}{dt}$, $\frac{d\delta f}{dt}$, $\frac{d\delta g}{dt}$, &c. & en y supposant en même temps $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\frac{d\delta x}{dt} = -\mu X$, $\frac{d\delta y}{dt} = -\mu Y$, $\frac{d\delta z}{dt} = -\mu Z$. Donc, en faisant ces mêmes suppositions dans les expressions de δa , δf , δg , &c. en δx , $\frac{d\delta x}{dt}$, δy , &c. on aura les valeurs des différences $\frac{d\delta a}{dt}$, $\frac{d\delta f}{dt}$, &c. ; ainsi on aura (§. 23.) :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= -\mu (C' X + D' Y), \quad \frac{d\delta f}{dt} = -\mu (G' X + H' Y); \\ \frac{d\delta g}{dt} &= -\mu (C'' X + D'' Y), \quad \frac{d\delta i}{dt} = -\mu (G'' X + H'' Y); \\ \frac{d\delta b}{dt} &= -\mu L Z, \quad \frac{d\delta c}{dt} = -\mu L'' Z. \end{aligned}$$

(36). En général, il est visible que les équations du §. 33 ne

sont autre chose que les différentielles de celles qui donnent les valeurs de $d x$, $\frac{d \delta x}{dt}$, δy , &c. en δa , δf , δg , &c., en y faisant varier seulement ces dernières quantités, ainsi que les différences premières $\frac{d \delta x}{dt}$, $\frac{d \delta y}{dt}$, $\frac{d \delta z}{dt}$, & mettant à la place des différences secondes $\frac{d^2 \delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{dt^2}$, les quantités $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$; de sorte qu'en faisant les mêmes opérations sur les équations qui donnent directement les valeurs de δa , δf , &c. en δx , $\frac{d \delta x}{dt}$, δy , &c., on aura sur le champ les valeurs cherchées de $\frac{d \delta a}{dt}$, $\frac{d \delta f}{dt}$, $\frac{d \delta g}{dt}$, &c. C'est ce qu'on peut aussi démontrer *à priori*, par le raisonnement suivant.

Soit en général $\Delta = \Phi$ une quelconque des équations dont il s'agit, Δ étant une des six constantes arbitraires δa , δf , δg , δi , δb , δc , & Φ la fonction de t & de δx , δy , δz , $\frac{d \delta x}{dt}$, $\frac{d \delta y}{dt}$, $\frac{d \delta z}{dt}$ qui lui est égale, il est clair que cette équation considérée en elle-même n'est autre chose qu'une intégrale première, ou du premier ordre des équations du §. 23, dans laquelle Δ est la constante arbitraire, introduite par l'intégration; donc en différenciant on aura cette équation du second ordre $d\Phi = 0$, laquelle ne contenant plus de constantes arbitraires devra être identique, c'est-à-dire avoir lieu en même temps que les équations du §. cité; de sorte que la différentielle $d\Phi$ devra être telle que si on y substitue à la place des différences secondes $\frac{d^2 \delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{dt^2}$ leurs valeurs données par ces mêmes équations, tous les termes se détruisent d'eux-mêmes; c'est aussi de quoi on pourra se convaincre *à posteriori* par le calcul.

Or, comme les équations du §. 22 ne diffèrent de celles du §. 23, que parce que les valeurs de $\frac{d^2 \delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{dt^2}$ ont les termes $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$ de plus; il s'ensuit que si, au lieu de substituer dans l'expression de $d\Phi$ les valeurs de

$\frac{d^2 \delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{dt^2}$ déduites des équations du §. 23, on y substituoit les valeurs de ces mêmes quantités, déduites des équations du §. 22, on auroit nécessairement le même résultat que si on y substituoit simplement $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$ à la place de $\frac{d^2 \delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{dt^2}$, & qu'on y effaçât en même temps tous les autres termes : soit $d\Delta$ ce que devient alors la valeur de $d\Phi$ (Δ étant ici regardée comme variable), on aura donc pour les équations du §. 22, $d\Phi = d\Delta$ & de là $\Phi = \Delta$, comme pour celles du §. 23, mais avec cette différence que Δ ne sera plus ici constante, mais une fonction donnée de t ; & cette équation $\Phi = \Delta$ sera par conséquent aussi une intégrale première des équations du §. 22.

D'où il est aisé de conclure en général que pour trouver les intégrales de ces dernières équations qui sont proprement celles qui déterminent les perturbations de la Comète, il n'y aura qu'à différencier chacune des formules $\Delta = \Phi$ trouvées plus haut (§. 30, 31.), en n'y faisant varier que la constante Δ & les différences premières $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, & y substituer ensuite à la place de $\frac{d^2 \delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{dt^2}$ les quantités $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$; on aura par ce moyen la valeur de $d\Delta$, dont l'intégrale sera celle de Δ .

Ayant déterminé ainsi les valeurs des différentes quantités Δ qui étoient auparavant constantes, & qui sont devenues maintenant des fonctions de t , on aura des intégrales premières de la même forme qu'auparavant; par conséquent les intégrales secondes ou finies qui résulteront de celles-là par l'élimination des différences premières $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, seront encore de la même forme; d'où il s'ensuit que tant ces différences que les variables finies δx , δy , δz seront aussi de la même forme, c'est-à-dire les mêmes fonctions de t & des différentes quantités Δ , que dans le cas où ces quantités seroient constantes.

Et il est facile de se convaincre qu'il n'est pas nécessaire, pour l'exactitude de cette méthode, que les différentes constantes Δ soient dégagées tout-à-fait des variables dans les intégrales premières des équations du §. 23, ainsi que nous l'avons supposé; il suffit de les imaginer dégagées, ce qui est toujours possible, & de les traiter comme toutes variables à la fois dans la différentiation des mêmes équations intégrales: on éliminera ensuite successivement les différentielles de ces différentes quantités Δ , pour avoir la valeur de chacune de ces différentielles.

Voilà, comme l'on voit, un moyen aussi simple que direct pour déduire les intégrales des équations du §. 22, de celles des équations plus simples du §. 23; & en général pour intégrer toutes sortes d'équations linéaires, en supposant qu'on sache déjà intégrer ces mêmes équations dans le cas où elles ne contiendroient aucun terme tout connu.

(37). Qu'on différencie donc, d'après la méthode précédente, les formules du §. 31, en y faisant varier seulement les quantités δh , δa , δf , δg , δi , δb , δc , ainsi que les trois différences premières $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, & qu'on y mette ensuite à la place des différences secondes $\frac{d^2\delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta z}{dt^2}$, les quantités $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$, c'est-à-dire $-\mu X dt$, $-\mu Y dt$, $-\mu Z dt$, à la place de $d. \frac{d\delta x}{dt}$, $d. \frac{d\delta y}{dt}$, $d. \frac{d\delta z}{dt}$, on aura les équations suivantes :

$$d\delta h = -\mu \frac{\sqrt{2h}}{1+m} (xY - yX) dt,$$

$$d\delta a = -\frac{\mu}{1+m} a^2 (Xdx + Ydy),$$

$$d\delta f = -\frac{\mu y dt}{\sqrt{2h(1+m)}} \left(\left(f + \frac{x}{r}\right)X + \frac{y}{r}Y \right) + \frac{2dy d\delta h}{dt \sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d\delta g = \frac{\mu x dt}{\sqrt{2h(1+m)}} \left(\left(f + \frac{x}{r}\right)X + \frac{y}{r}Y \right) - \frac{2dx d\delta h}{dt \sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d\delta b = \frac{\mu y}{\sqrt{2h(1+m)}} Z dt,$$

$$d\delta c = -\frac{\mu x}{\sqrt{2h(1+m)}} Z dt.$$

$$d\delta i = 3t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} \cdot d\delta a - \frac{2r^2 d\delta g}{f\sqrt{a^3h}} + \frac{\gamma(fx - 4h) d\delta f}{2\sqrt{ah^3}}.$$

Et l'équation entre δa , δh , δf , étant différenciée aussi, donnera :

$$a d\delta h - h d\delta a + \frac{a^2 f d\delta f}{2} = 0,$$

qui servira à déterminer, si l'on veut, $d\delta f$, en connoissant $d\delta h$, & $d\delta a$.

Or je remarque qu'on a cette combinaison $x d\delta f + \gamma d\delta g$
 $= 2 \frac{xdy - ydx}{dt\sqrt{2h(1+m)}} d\delta h = 2 d\delta h$; de sorte qu'on aura
 $d\delta g = \frac{2 d\delta h - x d\delta f}{\gamma}$; ainsi, comme $d\delta f = \frac{2(hd\delta a - a d\delta h)}{a^2 f}$,
on aura $d\delta g = \frac{2}{af\gamma} \left((af+x) d\delta h - xh \frac{d\delta a}{a} \right)$; valeurs que
l'on pourra employer à la place des précédentes.

Telles sont les formules par l'intégration desquelles il faudra déterminer les valeurs des quantités δh , δa , δb , δc , δf , δg , δi ; & il est visible que ces intégrations ne demandent que de simples quadratures, puisque les quantités x , y & X , Y , Z sont censées données en t d'après les mouvemens supposés connus de la Comète dans l'orbite non altérée, & de la Planète perturbatrice dans son orbite.

(38). Connoissant ces différentes quantités, on aura les élémens de l'orbite troublée, au moyen desquels on pourra calculer par les méthodes ordinaires, tant le lieu que la vitesse & la direction de la Comète dans un instant quelconque, ainsi que nous l'avons démontré plus haut (§. 34).

Pour cet effet, on se ressouviendra que a est le grand axe de l'orbite non altérée, $4h$ le paramètre du grand axe, & $e = \sqrt{1 - \frac{4h}{a}}$ l'excentricité (§. 17.).

Ainsi $a + \delta a$ fera le grand axe de l'orbite troublée, $4h + 4\delta h$ le paramètre de cette orbite, & $e + \delta e = e + 2 \frac{h\delta a - a\delta h}{e a^2}$ son excentricité.

Ensuite en différenciant, suivant δ , les valeurs de b & de c de ce même §. 17, & faisant, suivant l'hypothèse du §. 25, $\downarrow = 0$, on aura :

$$\delta b = -\sin. \omega \delta \downarrow, \delta c = \cos. \omega \delta \downarrow;$$

ainsi $\delta \downarrow$ fera l'inclinaison du plan de l'orbite troublée sur le plan de l'orbite non troublée, & ω fera l'angle que la ligne des nœuds de ces deux plans fait avec l'axe des x , lequel est en même temps le grand axe de l'orbite non altérée (§. 25); de sorte que ω sera proprement la longitude du nœud ascendant de l'orbite troublée, comptée sur le plan de l'orbite non troublée depuis le périhélie de cette dernière orbite.

En différenciant de même les valeurs de f & de g du §. 17; & faisant, d'après le §. 25, $\downarrow = 0$ & $\varepsilon = 0$, on aura :

$$\delta f = \delta e, \delta g = e \delta \varepsilon;$$

& il est clair, par les dénominations du §. 13, que $90^\circ + \delta \varepsilon$ fera la longitude du point de l'orbite troublée qui est à 90° du périhélie, comptée sur le plan de l'orbite non troublée, depuis le périhélie de celle-ci; mais à cause que ces deux orbites ne font entre elles qu'un très-petit angle $\delta \downarrow$, & que nous négligeons ici les $\delta \downarrow^2$, il est très-facile de prouver que $\delta \varepsilon$ sera la longitude même du périhélie de l'orbite troublée, la projection d'un arc de 90° ne pouvant différer de 90° que par des quantités de l'ordre de $\delta \downarrow^2$. Ainsi le petit angle $\delta \varepsilon$ exprimera proprement le mouvement du périhélie en longitude, en vertu des perturbations,

Enfin, on se rappellera que i est l'époque de l'anomalie moyenne dans l'orbite non troublée, c'est-à-dire la valeur de cette anomalie, lorsque $t = 0$ (§. 20); donc $i + \delta i$ sera aussi l'époque de la même anomalie dans l'orbite troublée; en sorte qu'ajoutant à cette époque le mouvement moyen pendant le temps t dans une orbite dont le grand axe seroit $a + \delta a$, on aura l'anomalie moyenne qui servira à déterminer le lieu de la Comète dans l'orbite troublée.

Ainsi

Ainsi $\theta = 2 t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} + i$ étant (§. cité) l'anomalie moyenne dans l'orbite non troublée, on aura $\theta + \delta \theta$ pour l'anomalie moyenne dans l'orbite troublée, & l'on trouvera la valeur de $\delta \theta$ par la différenciation de l'équation précédente, en y faisant varier a & i seulement, en sorte qu'on aura

$$\delta \theta = -3 t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} \cdot \delta a + \delta i.$$

Comme δa & δi sont ici des quantités variables, si on différencie à l'ordinaire cette valeur de $\delta \theta$, on aura $d \delta \theta = -3 d t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} \cdot \delta a - 3 t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} d \delta a + d \delta i$; & substituant pour $d \delta i$ sa valeur trouvée dans le §. précédent, on aura

$$d \delta \theta = -3 d t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} \cdot \delta a - \frac{2 r^2 d \delta g}{f \sqrt{a^3 h}} + \frac{y (x f - 4 h) d \delta f}{2 \sqrt{a h^3}},$$

dont l'intégrale donnera directement la valeur de $\delta \theta$, qui est l'altération de l'anomalie moyenne causée par les perturbations.

(39). Nous avons donné dans la première Section (§. 10, 11) une manière de transformer les équations générales des perturbations, en sorte que les forces perturbatrices deviennent très-petites lorsque la Comète est à une grande distance du Soleil : comme cette transformation est d'une grande utilité pour le calcul des perturbations dans la partie supérieure de l'orbite, il faut voir maintenant comment elle peut s'appliquer aussi aux formules que nous venons de trouver.

La transformation dont il s'agit consiste en ce que si l'on fait

$$\delta x = \mu \left(\frac{x}{3(1+m)} + \frac{\xi}{1+\mu} \right) + \delta x',$$

$$\delta y = \mu \left(\frac{y}{3(1+m)} + \frac{\eta}{1+\mu} \right) + \delta y',$$

$$\delta z = \mu \left(\frac{z}{3(1+m)} + \frac{\zeta}{1+\mu} \right) + \delta z',$$

& de plus,

Tome X.

P

$$X' = \frac{d \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right)}{dx}, \quad Y' = \frac{d \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right)}{dy}, \quad Z' = \frac{d \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right)}{dz},$$

on aura entre $\delta x', \delta y', \delta z', \& X', Y', Z'$, les mêmes équations qu'entre $\delta x, \delta y, \delta z, \& X, Y, Z$, c'est-à-dire des équations de la même forme que celles du §. 22, en y marquant seulement les quantités $\delta x, \delta y, \delta z, X, Y, Z$, chacune d'un trait.

On peut donc appliquer à ces équations les mêmes raisonnemens & les mêmes opérations que nous venons de faire dans cette Section sur les équations du §. 22, & en tirer des conclusions semblables. Ainsi, si on dénote par $\delta a', \delta b', \delta c', \delta f', \delta g', \delta h', \delta i'$, des quantités analogues aux quantités $\delta a, \delta b, \delta c, \&c.$ on aura des formules semblables à celles des §. 31 & 37 ci-dessus, en y marquant d'un trait les quantités $\delta a, \delta b, \delta c, \delta f, \delta g, \delta h, \delta i, \delta x, \delta y, \delta z, X, Y, Z$. Par les premières, on aura les valeurs de $\delta a', \delta b', \&c.$ en $\delta x', \frac{d \delta x}{d i'}, \delta y', \&c.$ & par les autres, les valeurs de $d \delta a', d \delta b', \&c.$ en X', Y', Z' .

Supposons maintenant qu'on substitue dans les formules du §. 31, les valeurs précédentes de $\delta x, \delta y, \delta z$, il est aisé de voir (à cause que ces quantités n'entrent dans les mêmes formules que sous une forme linéaire) que les valeurs des quantités $\delta h, \delta a, \delta f, \&c.$ deviendront

$$\delta h = \mu H + \delta h',$$

$$\delta a = \mu A + \delta a',$$

$$\delta f = \mu F + \delta f',$$

$$\delta g = \mu G + \delta g',$$

$$\delta b = \mu B + \delta b',$$

$$\delta c = \mu C + \delta c',$$

$$\delta i = \mu I + \delta i',$$

en dénotant par $\mu H, \mu A, \mu F, \&c.$ les valeurs de $\delta h, \delta a, \delta f, \&c.$ provenant de la simple substitution de

$\mu \left(\frac{x}{3(1+m)} + \frac{\xi}{1+\mu} \right)$ à la place de δx , de $\mu \left(\frac{y}{3(1+m)} + \frac{\eta}{1+\mu} \right)$ à la place de δy , & de $\mu \left(\frac{z}{3(1+m)} + \frac{\zeta}{1+\mu} \right)$ à la place de δz .

De sorte qu'en faisant $z = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$, & mettant à la place de $x \, dy - y \, dx$ sa valeur $dt \sqrt{2h(1+m)}$ (§. 29, 31.), on aura

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{4h}{3(1+m)} + \frac{2h}{1+\mu} \times \frac{\xi \, dy - \eta \, dx + x \, d\eta - y \, d\xi}{dt \sqrt{2h(1+m)}}, \\
 A &= \frac{a^2}{3(1+m)} \left(\frac{1}{r} + \frac{dx^2 + dy^2}{(1+m) \, dt^2} \right) \\
 &\quad + \frac{a^2}{1+\mu} \left(\frac{x\xi + y\eta}{r^3} + \frac{dx \, d\xi + dy \, d\eta}{(1+m) \, dt^2} \right), \\
 F &= -\frac{f + \frac{x}{r}}{3(1+m)} + \frac{\frac{y}{r^3} (x\eta - y\xi)}{1+\mu} \\
 &\quad - \frac{\left(f + \frac{x}{r} \right) (\xi \, dy - y \, d\xi) + \frac{y}{r} (\eta \, dy - y \, d\eta)}{(1+\mu) \, dt \sqrt{2h(1+m)}} + \frac{2H \, dy}{dt \sqrt{2h(1+m)}}, \\
 G &= -\frac{\frac{y}{r}}{3(1+m)} - \frac{\frac{x}{r^3} (x\eta - y\xi)}{1+\mu} \\
 &\quad + \frac{\left(f + \frac{x}{r} \right) (\xi \, dx - x \, d\xi) + \frac{y}{r} (\eta \, dx - x \, d\eta)}{(1+\mu) \, dt \sqrt{2h(1+m)}} - \frac{2H \, dx}{dt \sqrt{2h(1+m)}}, \\
 B &= \frac{\xi \, dy - y \, d\xi}{(1+\mu) \, dt \sqrt{2h(1+m)}}, \\
 C &= \frac{x \, d\xi - \xi \, dx}{(1+\mu) \, dt \sqrt{2h(1+m)}}, \\
 I &= 3 \, t \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} \, A + 2 \frac{\left(\frac{x\eta - y\xi}{1+\mu} - \frac{r^2 G}{f} \right)}{\sqrt{\frac{a^3 h}{1+\mu}}} + \frac{y(fx - 4h)F}{2\sqrt{\frac{a^3 h}{1+\mu}}}.
 \end{aligned}$$

De plus, on aura par les formules du §. 37, en y marquant d'un trait les quantités δh , δa , &c. X, Y, Z.

$$d \delta h' = - \mu \frac{\sqrt{2h}}{1+\mu} (x Y' - y X') dt,$$

$$d \delta a' = - \frac{\mu}{1+m} a^2 (X' dx + Y' dy);$$

$$d \delta f' = - \frac{\mu y dt}{\sqrt{2h(1+m)}} \left(\left(f + \frac{x}{r} \right) X' + \frac{y}{r} Y' \right) \\ + \frac{2 dy d \delta h'}{dt \sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d \delta g' = \frac{\mu x dt}{\sqrt{2h(1+m)}} \left(\left(f + \frac{x}{r} \right) X' + \frac{y}{r} Y' \right) \\ - \frac{2 dx d \delta h'}{dt \sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d \delta b' = \frac{\mu y}{\sqrt{2h(1+m)}} Z' dt,$$

$$d \delta c' = - \frac{\mu x}{\sqrt{2h(1+m)}} Z' dt;$$

$$d \delta i' = 3 t \frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3} d \delta a' - \frac{2 r^2 d \delta g'}{f \sqrt{a^3 h}} \\ + \frac{y(fx - 4h) d \delta f'}{2 \sqrt{a h^3}}.$$

Donc, si on différencie les valeurs de δh , δa , &c. données ci-dessus, & qu'on y substitue ensuite les valeurs précédentes de $d \delta h'$, $d \delta a'$, &c. il viendra

$$d \delta h = \mu d H - \mu \frac{\sqrt{2h}}{1+\mu} (x Y' - y X') dt,$$

$$d \delta a = \mu d A - \frac{\mu}{1+m} a^2 (X' dx + Y' dy);$$

$$d \delta f = \mu d F - \frac{\mu y dt}{\sqrt{2h(1+m)}} \left(\left(f + \frac{x}{r} \right) X' + \frac{y}{r} Y' \right) \\ + \frac{2 dy d \delta h'}{dt \sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d \delta g = \mu d G + \frac{\mu x dt}{\sqrt{2h(1+m)}} \left(\left(f + \frac{x}{r} \right) X' + \frac{y}{r} Y' \right) \\ - \frac{2 dx d \delta h'}{dt \sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d \delta b = \mu d B + \frac{\mu y}{\sqrt{2h(1+m)}} Z' dt,$$

$$d \delta c = \mu d C - \frac{\mu x}{\sqrt{2 h (1+m)}} Z' dt,$$

$$d \delta i = \mu d I + 3 t \sqrt{\frac{2 (1+m)}{a^3}} \cdot d \delta a' - \frac{2 r^2 d \delta g'}{f \sqrt{a^3 h}} \\ + \frac{y (f x - 4 h) d \delta f'}{2 \sqrt{a h^3}}.$$

formules qu'on pourra employer à la place de celles du §. 37; avec lesquelles elles sont identiques dans le fond.

(40). En comparant les formules précédentes avec celles du §. 37, il est aisé d'en tirer cette conclusion générale; qu'il est permis de changer dans ces dernières les quantités X , Y , Z en X' , Y' , Z' , pourvu qu'on ajoute en même temps aux valeurs de $d \delta h$, $d \delta a$, $d \delta f$, &c. les quantités $\mu d H$, $\mu d A$, $\mu d F$, &c.

De là il s'en suit que, soit, par exemple, $\mu \Pi dt$ la valeur de $d \delta h$ dans les formules du §. 37, on aura en intégrant $\delta h = \int \mu \Pi dt$, cette intégrale étant supposée commencer au point où $\delta h = 0$. Supposons maintenant qu'à commencer d'un point donné de l'orbite, on veuille employer les quantités X' , Y' , Z' , à la place des X , Y , Z ; & qu'on dénote par $\delta h'$ la valeur de δh pour ce point, c'est-à-dire la valeur de l'intégrale $\int \mu \Pi dt$ étendue jusqu'à ce point: soit Π' , ce que devient Π en y changeant X , Y , Z en X' , Y' , Z' , on aura en général par les formules du §. précédent, $d \delta h = \mu d H + \mu \Pi' dt$; donc intégrant $\delta h = \mu H + \int \mu \Pi' dt + const.$: soit H' la valeur de H dans le même point de l'orbite, & supposons que l'intégrale $\int \mu \Pi' dt$ commence aussi à ce point dans lequel on a supposé que finit l'intégrale $\int \mu \Pi dt$, on aura donc dans ce point $\delta h' = \mu H' + const.$; donc $const. = \delta h' - \mu H'$; donc on aura en général $\delta h = \mu H - \mu H' + \delta h' + \int \mu \Pi' dt$, savoir:

$$\delta h = \mu H - \mu H' + \int \mu \Pi dt + \int \mu \Pi' dt.$$

Supposons ensuite que dans un autre point quelconque de l'orbite, on veuille changer de nouveau les quantités X' , Y' , Z' en

X, Y, Z , & soient dénotées par $\delta h''$ & par H'' les valeurs de δh & de H pour ce second point, on aura donc dans ce point :

$$\delta h'' = \mu H'' - \mu H + \int \mu \Pi dt + \int \mu \Pi' dt,$$

l'intégrale $\int \mu \Pi' dt$ étant supposée étendue jusqu'à ce second point. Or, lorsqu'on emploie les quantités X, Y, Z , on a en général $d\delta h = \mu \Pi dt$; donc $\delta h = \int \mu \Pi dt + \text{const.}$: supposons que l'intégrale $\int \mu \Pi dt$ commence à ce second point dans lequel δh devient $\delta h''$, & l'on aura $\delta h'' = \text{const.}$; donc en général $\delta h = \int \mu \Pi dt + \delta h''$, & substituant la valeur de $\delta h''$,

$$\delta h = \mu H'' - \mu H' + \int \mu \Pi dt + \int \mu \Pi' dt + \int \mu \Pi dt;$$

dans cette formule, la première intégrale $\int \mu \Pi dt$ est supposée commencer au point de l'orbite où δh est nul, & s'étendre seulement jusqu'au point où les quantités X, Y, Z se changent en X', Y', Z' ; la seconde intégrale $\int \mu \Pi' dt$ est supposée commencer à ce point, & s'étendre jusqu'à l'autre point où les quantités X', Y', Z' redeviennent X, Y, Z ; enfin la troisième intégrale $\int \mu \Pi dt$ commence à ce dernier point, & s'étend indéfiniment: de sorte que ces différentes intégrales ne forment proprement qu'une seule intégrale qui commence au point où δh est nul, & qui s'étend indéfiniment, mais avec cette condition que la quantité Π se change en Π' dans une certaine étendue.

On voit par-là que dans l'intégration de la valeur de $d\delta h$ du §. 37, on peut changer à volonté les quantités X, Y, Z en leurs analogues X', Y', Z' , & rétablir ensuite celles-là à la place de celles-ci, pourvu qu'on ajoute en même temps à la valeur finie de δh , la quantité $\mu H'' - \mu H'$ qui est la différence des deux valeurs de μH , dont l'une $\mu H'$ se rapporte au point où X, Y, Z se changent en X', Y', Z' , & dont l'autre $\mu H''$ se rapporte au point où X', Y', Z' redeviennent X, Y, Z .

On fera le même raisonnement sur chacune des autres for-

mules du §. 37, & on tirera des conclusions semblables. Ainsi dans l'intégration de la valeur de $d \delta a$, on pourra, pour un certain espace à volonté, changer X, Y, Z en X', Y', Z' , pourvu qu'on ajoute ensuite à la valeur finie de δa l'excès de la valeur de μA , qui répond à la fin de cet espace sur la valeur de μA qui répond au commencement du même espace, &c.

Et si on vouloit substituer à plusieurs reprises les quantités X', Y', Z' à la place de X, Y, Z , on feroit la même opération pour chaque nouvelle substitution.

(41). Une des déterminations les plus importantes de la Théorie des Perturbations des Comètes, est celle de l'altération du temps périodique. Rien n'est plus facile que de trouver cette altération par le moyen de la formule que nous avons donnée (§. 38.) pour l'anomalie moyenne dans l'orbite troublée. En effet, θ exprimant en général l'anomalie moyenne dans l'orbite non altérée, & $\theta + \delta \theta$ l'anomalie moyenne qui a lieu en même temps dans l'orbite troublée, on aura pour l'instant du périhélie dans l'orbite troublée $\theta + \delta \theta = 0$; d'où $\theta = -\delta \theta$, ou (ce qui revient au même) $= 360^\circ - \delta \theta$. D'où l'on voit que lorsque la Comète passera au périhélie dans son orbite troublée, une Comète fictive, qu'on supposeroit se mou-

voir dans l'orbite non altérée, seroit encore éloignée de son périhélie de la quantité qui répond à l'anomalie moyenne $\delta \theta$ dans cette même orbite. Donc, comme l'on a en général

$$\theta = 2 \pi \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i \quad (\S. 20.),$$

i étant une constante dans

l'orbite non altérée, si on dénote par δt le temps qui répond à l'anomalie $\delta \theta$ dans cette orbite, on aura $\delta \theta = 2 \pi \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}}$; donc $d t = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \cdot \delta \theta$: c'est le temps dont le passage au périhélie de l'orbite troublée précédera le passage au périhélie de l'orbite non altérée; ce temps étant exprimé par le mouvement moyen du Soleil qui y répond (§. cité).

Dénotons par $\delta \theta'$ & $\delta \theta''$ les valeurs de $\delta \theta$ qui répondent

à deux périhélie's consécutifs, & par $\delta t'$, $\delta t''$ les valeurs correspondantes de δt , en sorte que l'on ait

$$\delta t' = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \cdot \delta \theta', \quad \delta t'' = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \cdot \delta \theta'';$$

soit de plus t' & t'' les temps des passages par les deux périhélie's consécutifs dans l'orbite non altérée, on aura pour les temps de ces passages dans l'orbite troublée $t' - \delta t'$, $t'' - \delta t''$; donc la différence de ces temps, c'est-à-dire l'intervalle de temps entre deux passages consécutifs au périhélie de l'orbite troublée, sera $t'' - t' + \delta t' - \delta t''$, où $t'' - t'$ est le même intervalle pour l'orbite non altérée. D'où il s'ensuit que la durée de la révolution anomalystique dans l'orbite troublée surpassera la même durée dans l'orbite non altérée, du temps exprimé par $\delta t' - \delta t''$, ou par $\sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} (\delta \theta' - \delta \theta'')$; c'est l'altération produite par les perturbations.

Il faut remarquer que pour avoir les valeurs de $\delta \theta'$ & $\delta \theta''$, il faudroit à la rigueur supposer, dans $\delta \theta$, $t = t' - \delta t'$, $= t'' - \delta t''$; mais comme nous négligeons les carrés & les produits des forces perturbatrices, & par conséquent aussi de toutes les quantités résultantes de ces forces, il suffira d'y faire $t = t'$ & $= t''$.

Nous venons de déterminer l'altération de la révolution anomalystique de la Comète; si on vouloit avoir l'altération de sa révolution périodique, il faudroit défalquer de l'altération précédente le temps dû au changement du périhélie. Or nous avons vu (§. 38.) que le périhélie de l'orbite troublée est plus avancé que celui de l'orbite non altérée de l'angle $d\epsilon = \frac{\delta g}{c}$; donc si on dénote par $\delta \epsilon'$ & $\delta \epsilon''$ les valeurs de $\delta \epsilon$ qui répondent à $t = t'$ & t'' , on aura $\delta \epsilon'' - \delta \epsilon'$ pour l'angle dont le périhélie de l'orbite troublée aura avancé pendant une révolution; ainsi la quantité à défalquer de l'altération de la révolution anomalystique, pour avoir celle de la révolution périodique, sera le temps qui répond à l'angle ou à l'anomalie vraie $\delta \epsilon'' - \delta \epsilon'$

Pour

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 121

Pour trouver ce temps, on pourra employer la formule différentielle $d't = \frac{r^2 d\phi}{\sqrt{2h(1+m)}} (\S. 21)$, en faisant $d\phi = \delta\epsilon''$, — $\delta\epsilon'$, & $r =$ à la distance périhélie dans l'orbite non altérée; laquelle est $= \frac{a-ae}{2} = \frac{a}{2} (1-e) = \frac{a(1-e^2)}{2(1+e)} = \frac{2h}{1+e}$, de sorte qu'on aura pour le temps cherché la quantité $\left(\frac{2h}{1+e}\right)^2$

$$\times \frac{\delta\epsilon'' - \delta\epsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}}.$$

Donc la durée de la révolution périodique de la Comète dans l'orbite troublée, c'est-à-dire le temps qu'elle mettra à faire une révolution entière depuis son départ du périhélie, jusqu'à ce qu'elle revienne sur la ligne du même périhélie, surpassera le temps de la révolution entière dans l'orbite non altérée, de la quantité

$$\sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \cdot (\delta\theta' - \delta\theta'') - \left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \times \frac{\delta\epsilon'' - \delta\epsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}};$$

laquelle, en substituant pour $\delta\theta'$ & $\delta\theta''$, leurs valeurs déduites de la formule du §. 38, & dénotant par $\delta a'$, $\delta i'$ & par $\delta a''$, $\delta i''$, les valeurs de δa , δi qui répondent à $t = t'$ & t'' , se réduit à celle-ci.

$$\frac{3(t''\delta a'' - t'\delta a')}{2a} - \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \cdot (\delta i'' - \delta i') - \left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \times \frac{\delta\epsilon'' - \delta\epsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}}.$$



SECTION IV.

Application des Théories précédentes au calcul des Perturbations des Comètes, & en particulier au calcul des Perturbations de la Comète de 1532 & de 1661.

(42). CETTE application se présente d'elle-même ; il ne s'agit que de trouver les valeurs des quantités δh , δa , δf , δg , δb , δc , δi , par l'intégration des formules du §. 37, & l'on aura immédiatement les altérations des élémens de l'orbite de la Comète dues aux Perturbations (§. 38.) ; mais la grande difficulté consiste dans ces intégrations, lesquelles, à cause de la grande excentricité de l'orbite des Comètes, ne peuvent s'exécuter en général par aucune méthode connue, & demandent nécessairement des quadratures de courbes mécaniques.

Nous allons proposer les moyens qui nous paroissent les plus propres pour arriver à ce but.

Je commence par substituer dans les équations du §. 37, les valeurs de X , Y , Z (§. 22.), lesquelles en effectuant les différenciations indiquées, deviennent

$$X = \frac{x}{\rho^3} + \frac{x - \xi}{R^3}, \quad Y = \frac{y}{\rho^3} + \frac{y - \eta}{R^3}, \quad Z = \frac{z}{\rho^3} + \frac{z - \zeta}{R^3};$$

je substitue de plus à la place des quantités x , y , z , r , dt ; leurs valeurs exprimées par l'anomalie excentrique u , parce que l'emploi de cette anomalie rend tout à la fois les formules plus simples & plus faciles à calculer ; ces valeurs sont (en faisant $b = 0$, $c = 0$, $f' = e$, $g = 0$, par l'hy. du §. 25) :

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 125

$$x = \frac{a}{2} (\cos \omega - f), y = \sqrt{a h} \sin \omega, z = 0 \text{ (§. 26.)},$$

$$r = \frac{a}{2} (1 - f \cos u), dt = \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}} \cdot r du \text{ (§. 20, 21.)}.$$

Ces substitutions faites, si on suppose, pour plus de simplicité;

$$\Pi = \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3}, \pi = \frac{1}{R^3},$$

on aura des équations de la forme suivante :

$$d \delta h = \frac{\mu}{1+m} \left((H) \Pi + (h) \pi \right) du;$$

$$d \delta a = \frac{\mu}{1+m} \left((A) \Pi + (a) \pi \right) du;$$

$$d \delta f = \frac{\mu}{1+m} \left((F) \Pi + (f) \pi \right) du;$$

$$d \delta g = \frac{\mu}{1+m} \left((G) \Pi + (g) \pi \right) du,$$

$$d \delta b = \frac{\mu}{1+m} \left((B) \Pi + (b) \pi \right) du,$$

$$d \delta c = \frac{\mu}{1+m} \left((C) \Pi + (c) \pi \right) du,$$

$$d \delta i = \frac{\mu}{1+m} \left((I) \Pi + (i) \pi \right) du;$$

dans lesquelles on aura les valeurs suivantes des quantités (H), (h), (A), (a), &c.

$$(H) = \sqrt{a h} (y \xi - x \eta) r, (h) = 0;$$

$$(A) = a^2 \left(\frac{a}{2} \xi \sin u - \sqrt{a h} \eta \cos u \right), (a) = -\frac{a^3 f}{2} r \sin u;$$

$$(F) = -\sqrt{\frac{a}{4 h}} \left((f r + x) \xi + y \eta \right) y + 2 \sqrt{a h} (y \xi - x \eta) \cos u;$$

$$(f) = -\sqrt{a h} \cdot r y,$$

$$(G) = \sqrt{\frac{a}{4 h}} \left((f r + x) \xi + y \eta \right) x + a (y \xi - x \eta) \sin u,$$

$$(g) = \sqrt{a h} \cdot r x;$$

$$(B) = \sqrt{\frac{a}{4 h}} \cdot r y \xi, (b) = 0,$$

$$(C) = -\sqrt{\frac{a}{4 h}} \cdot r x \xi, (c) = 0,$$

$$(E) = 3 \epsilon \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} (A) - \frac{2r^2(G)}{f\sqrt{\frac{a}{h}}} + \frac{\gamma(fx - 4h)}{2\sqrt{\frac{a}{h^3}}} (F),$$

$$(i) = 3 \epsilon \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} (a) - \frac{2r^2(G)}{f\sqrt{\frac{a}{h}}} + \frac{\gamma(fx - 4h)}{2\sqrt{\frac{a}{h^3}}} (f).$$

Dans ces expressions j'ai conservé, pour plus de simplicité, les lettres x , y , r à la place de leurs valeurs en $\sin. u$ & $\cos. u$; il est facile de les y substituer si on le juge à propos.

(43). Il est visible par les formules précédentes, que les quantités (H) , (h) , (A) , (a) , &c. sont toutes exprimées par des fonctions rationnelles & entières de $\sin. u$, $\cos. u$, ξ , η , ζ ; de sorte que si on pouvoit exprimer de même les quantités ξ , η , ζ , $\frac{1}{p^3}$ & $\frac{1}{R^3}$ par des fonctions rationnelles & entières de $\sin. u$ & $\cos. u$, l'intégration des équations différentielles dont il s'agit, n'auroit aucune difficulté. Voyons quels sont les obstacles qui s'opposent à cette réduction dans la théorie des Comètes.

On se rappellera d'abord que les quantités ξ , η , ζ sont les trois coordonnées rectangles du lieu de la Planète perturbatrice dont la masse est μ , que p est son rayon recteur, & R la distance rectiligne entre le lieu de la Planète & le lieu de la Comète dans l'orbite non altérée (§. 2, 7) : on se rappellera ensuite que nous prenons pour le plan de projection celui de l'orbite non altérée de la Comète, & pour l'axe des abscisses la ligne du périhélie de cette orbite (§. 25.).

Nommons φ l'inclinaison du plan de l'orbite de la Planète sur le plan de l'orbite non altérée de la Comète, & Ω la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Planète comptée sur le plan de l'orbite de la Comète, depuis le périhélie de cette orbite.

Soit de plus λ l'argument de latitude de la Planète, c'est-à-dire la longitude dans son orbite, moins la longitude de son nœud avec l'orbite de la Comète.

Il est facile de comprendre que l'on aura pour ξ , η , ζ des

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 125

expressions semblables à celles de x, y, z du §. 19, en y changeant r en ρ , ω en Ω , ψ en Ψ , & $\phi - \alpha$ en λ , on aura donc ainsi :

$$\xi = \rho (\cos. \Omega \cos. \lambda - \sin. \Omega \cos. \Psi \sin. \lambda);$$

$$\eta = \rho (\sin. \Omega \cos. \lambda + \cos. \Omega \cos. \Psi \sin. \lambda),$$

$$\zeta = \rho \sin. \Psi \sin. \lambda.$$

Or on fait que dans les orbites des Planètes, à cause de la petitesse de leur excentricité, on peut exprimer tant l'équation du centre que le rayon vecteur par des suites très-convergentes qui procèdent suivant les *sinus* & *cosinus* de l'anomalie moyenne & de ses multiples (on trouve ces suites développées d'après les principales Tables Astronomiques, dans le premier Volume du Recueil de Tables, publié par l'Académie de Berlin); on pourra donc représenter par de semblables séries les valeurs de ξ, η, ζ , & de $\frac{1}{\rho^3}$ pour chaque Planète; & il n'y aura plus qu'à exprimer l'anomalie moyenne de la Planète par l'anomalie excentrique u de la Comète.

Pour faire cette réduction, soit a le grand axe de l'orbite de la Planète, & M son anomalie moyenne comptée à l'ordinaire depuis l'aphélie; soit de plus T la valeur de l'anomalie moyenne θ de la Comète pour l'instant du passage de la Planète par l'aphélie, il est visible que M & $\theta - T$ seront les anomalies contemporaines de la Planète & de la Comète, lesquelles doivent être entre elles en raison réciproque de la durée de leurs révolutions, & par conséquent par les théorèmes connus en raison de $\sqrt{a^3} : \sqrt{\alpha^3}$; d'où il suit qu'on aura $M = (\theta - T) \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, où il n'y aura plus qu'à substituer pour θ la valeur $u - e \sin. u$ (§. 20.).

Comme dans l'orbite des Comètes l'excentricité e est peu différente de l'unité, il est clair que les *sinus* & *cosinus* de M & de ses multiples ne sauroient s'exprimer par de simples *sinus* & *cosinus* de u & de ses multiples; par conséquent il est im-

possible d'exprimer en général ξ , η , ζ , & $\frac{1}{\rho^3}$ par des fonctions rationnelles & entières de $\sin. u$ & de $\cos. u$. C'est la première difficulté qui s'oppose à l'intégration des équations du §. précédent,

La seconde difficulté vient du dénominateur irrationnel R^3 ; en effet, il est d'abord impossible, par la raison précédente, de réduire l'expression rationnelle de R^2 , laquelle est (§. 2.), z étant = 0,

$$R^2 = r^2 - 2(x\xi + y\eta) + \rho^2$$

à une fonction rationnelle de $\sin. u$ & $\cos. u$; à plus forte raison le sera-t-il d'y réduire la quantité irrationnelle & rompue $\frac{1}{R^3}$.

(44). On est donc forcé dans la théorie des Comètes de renoncer à l'avantage de parvenir à des formules analytiques qui expriment les inégalités de leur mouvement pour un temps quelconque, telles que celles que l'on trouve pour les inégalités des Planètes; & la seule ressource qui reste est de déterminer ces inégalités par parties, en partageant l'orbite de la Comète en différentes portions, & calculant séparément l'effet des perturbations pour chacune de ces portions.

En effet, tant que l'angle $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$ ne sera pas trop grand; on pourra exprimer son *sinus* & son *cosinus* par les séries connues qui procèdent suivant les puissances de l'arc, & par-là on remédiera au premier inconvénient.

Ensuite on observera que tant que le rayon r de la Comète sera beaucoup moindre que le rayon ρ de la Planète perturbatrice, & que par conséquent x & y seront moindres que ρ , on pourra réduire la quantité $\frac{1}{R^3}$ en une série convergente, en prenant $\frac{1}{\rho^3}$ pour le premier terme.

De cette manière, on pourra donc intégrer les valeurs de

$d \delta h$, $d \delta a$, &c. du §. 42, depuis le périhélie de l'orbite de la Comète jusqu'à un point de cette orbite dans lequel $\theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$ & $\frac{r}{p}$ soient des quantités encore assez petites.

Soit maintenant u' l'anomalie excentrique qui répond à ce point, on fera en général $u = u' + v$, & tant que l'angle v sera assez petit, on pourra mettre les quantités à intégrer sous la forme rationnelle ($L + M v + N v^2 +$, &c.) $d v$; on intégrera donc de rechef depuis $\omega = u'$ jusqu'à $\omega = u''$, en supposant l'arc $u'' - u'$ assez petit, & ainsi de suite.

(45). On peut faciliter beaucoup ce calcul par la méthode connue des courbes paraboliques; mais pour pouvoir employer cette méthode en toute sûreté, il faut que les quantités qu'on veut exprimer par des formules paraboliques ne souffrent pas de trop grandes ni de trop fréquentes irrégularités; autrement il arriveroit que parmi les coefficients de la série parabolique il s'en trouveroit de très-grands; ce qui diminueroit la convergence de la série, & obligeroit à la pousser à un grand nombre de termes. Il est donc nécessaire d'examiner *a priori* la nature des quantités auxquelles on veut appliquer la méthode des courbes paraboliques.

De ce que nous avons dit dans le §. 43, il s'ensuit que les différentes quantités (H), (h), (A), (a), &c. ainsi que les quantités $\frac{1}{p^3}$ & R^2 peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles & entières de *sinus* & de *cosinus* des angles u & $\theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$, c'est-à-dire de l'anomalie excentrique de la Comète & du mouvement moyen correspondant de la Planète; donc si on suppose que ces deux angles varient en même temps des angles contemporains β & γ , chacune des quantités dont il s'agit pourra être représentée pendant ces variations par une formule algébrique de la forme.

$L + M \beta + N \gamma + O \beta^2 + P \beta \gamma + Q \gamma^2 +$, &c.
dans laquelle les quantités L, M, N, &c. seront toutes aussi

des fonctions rationnelles & entières de $\sin. u$, $\cos. u$, $\sin. \theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$, $\cos. \theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$. Or $\theta = u - e \sin. u$; donc faisant croître u de γ , & θ de $\gamma \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$, on aura

$$\gamma = \sqrt{\frac{a^3}{a^3}} \cdot \left((1 - e \cos. u) \beta + \frac{e^2 \sin. u^2}{2} \beta^2 + , \&c. \right).$$

Si donc on substitue cette valeur de γ dans la formule précédente, elle prendra cette forme plus simple $L + M \beta + N \beta^2 + , \&c.$ dans laquelle les quantités L, M, N , &c. seront pareillement des fonctions toutes rationnelles & entières de $\sin. u$, $\cos. u$, $\sin. \theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$, $\cos. \theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$; en sorte que ces quantités ne pourront jamais augmenter au delà d'un certain terme. Et il est clair que la formule précédente n'étant poussée que jusqu'au second degré, sera exacte, aux quantités près, des ordres de ϵ^3 , & de γ^3 .

Il semble qu'il faudroit faire une exception à l'égard des quantités (I) & (i) qui contiennent des termes multipliés par ϵ , & qui, par conséquent, ne sont pas uniquement des fonctions de $\sin.$, & $\cos.$ de u & de $\theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$, mais renferment aussi l'angle même u ; mais il est facile de se convaincre que cette circonstance ne peut apporter aucun changement à la conclusion précédente.

Si donc on dénote en général par V une quelconque des quantités dont il s'agit, & que V_0, V_1, V_2 , soient les valeurs de V qui répondent à $u = u_0, = u_1 = u_0 + \beta, = u_2 = u_1 + \beta$; il résulte de ce que nous venons de démontrer, que pour $u = u_1 + n \beta$ (n étant un nombre quelconque compris entre 0 & 1), on aura, aux quantités près, des ordres de β^3 & de γ^3 , $V = V_1 + V'_1 n + V''_1 n^2$, formule qui pourra servir aussi par la même raison, en faisant n négatif depuis 0 jusqu'à -1 .

Or comme $V = V_0$ lorsque $n = -1$, & $V = V_1$ lorsque

$n = 1$, on aura $V_0 = V_1 - V'_1 + V''_1$, $V_2 = V_1 + V'_1 + V''_1$;
d'où l'on tire

$$V'_1 = \frac{V_2 - V_0}{2}, \quad V''_1 = \frac{V_2 - 2V_1 + V_0}{2}.$$

(46). Cela posé, séparons, dans les équations différentielles du §. 42, les termes divisés par R^3 des autres, & représentons en général chacune de ces équations par

$$d\Delta = \frac{\mu}{1+m} \left(V + \frac{U}{R^{\frac{1}{2}}} \right) du;$$

R étant R^2 , Δ étant une des quantités δh , δa , &c., V étant respectivement $\frac{(H)}{r^3}$, $\frac{(A)}{r^3}$, &c., & U étant $(h) - (H)$, $(a) - (A)$, &c.

Qu'on calcule les valeurs des quantités V , U , & R pour trois anomalies excentriques $u = u_0, u_1, u_2$, dont la commune différence soit β ; & qu'on marque ces valeurs respectivement par $V_0, U_0, R_0, V_1, U_1, R_1, V_2, U_2, R_2$; qu'on en déduise ensuite, par les dernières formules du §. précédent, les valeurs de V'_1, V''_1 , ainsi que celles de U'_1, U''_1, R'_1, R''_1 ; & qu'on substitue par-tout dans l'équation précédente, $u_1 + \beta n$, à la place de u , on aura donc, en regardant maintenant n comme variable, la transformée

$$d\Delta = \frac{\mu\beta}{1+m} \left(V_1 + V'_1 n + V''_1 n^2 + \frac{U_1 + U'_1 n + U''_1 n^2}{(R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2)^{\frac{1}{2}}} \right) dn,$$

qui étant intégrée depuis $n = -1$ jusqu'à $n = 1$, donnera, aux quantités près de l'ordre de $\mu\beta^3$ & $\mu\gamma^3$, la valeur de Δ ou plutôt l'accroissement de Δ , depuis l'anomalie excentrique u_0 , jusqu'à l'anomalie $u_2 = u_0 + 2\beta$; en sorte que désignant par Δ_0 & Δ_2 les valeurs de Δ qui répondent à ces deux anomalies, on aura $\Delta_2 - \Delta_0$ égale à l'intégrale du second membre de cette équation, prise depuis $n = -1$ jusqu'à $n = 1$.

L'intégration de la partie $(V_1 + V'_1 n + V''_1 n^2) dn$ n'a aucune difficulté, & l'on trouve sur le champ pour l'intégrale totale $2V_1 + \frac{2}{3}V''_1$.

A l'égard de l'autre partie $\frac{U_1 + U'_1 n + U''_1 n^2}{(R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2)^{\frac{1}{2}}} dn$, elle dépend de la quadrature de l'hyperbole ou du cercle, suivant que R''_1 est une quantité positive ou négative.

Pour en trouver l'intégrale, on supposera cette différentielle égale à

$$d. \frac{K + L n}{\sqrt{R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2}} + \frac{M dn}{\sqrt{R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2}},$$

& l'on trouvera par la comparaison des termes, après avoir réduit au même dénominateur,

$$K = \frac{\frac{1}{2} U_1 R'_1 - U'_1 R_1 + \frac{U''_1 R_1 R'_1}{2 R''_1}}{R_1 R''_1 - \frac{1}{4} R_1'^2},$$

$$L = \frac{U_1 R''_1 - \frac{1}{2} U'_1 R'_1 - U''_1 \left(R_1 - \frac{R_1'^2}{2 R''_1} \right)}{R_1 R''_1 - \frac{1}{4} R_1'^2},$$

$$M = \frac{U'_1}{R''_1};$$

or l'intégrale de la première partie est évidemment

$\frac{K + L n}{\sqrt{R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2}}$; & celle de la seconde est, en faisant pour abrégér,

$$\frac{\sqrt{R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2}}{\frac{1}{2} R'_1 + R''_1 n} = N, \quad \frac{M}{2 \sqrt{-R''_1}} l. \frac{1 + N \sqrt{-R''_1}}{1 - N \sqrt{-R''_1}},$$

si R''_1 est positif; mais si R''_1 est négatif, cette intégrale devient $\frac{M}{2 \sqrt{-R''_1}} \text{arc. tang. } N \sqrt{-R''_1}$.

On fera maintenant dans ces formules $n = 1$ & $n = -1$, & on retranchera la seconde valeur de la première, pour avoir l'intégrale complete; or en faisant $n = 1$, la quantité sous le signe devient $R_1 + R'_1 + R''_1 = R_1$, & en faisant $n = -1$, elle devient $R_1 + R'_1 + R''_1 = R_0$. Donc la valeur complete de l'intégrale de la différentielle dont il s'agit sera représentée par $\frac{K + L}{\sqrt{R_1}} - \frac{K - L}{\sqrt{R_0}} + \frac{M}{2 \sqrt{\pm R''_1}} P$, en faisant

$$P = l. \frac{\frac{1}{2} R'_1 + R''_1 + \sqrt{R_1 R''_1}}{\frac{1}{2} R'_1 + R''_1 - \sqrt{R_1 R''_1}} - l. \frac{\frac{1}{2} R'_1 + R''_1 + \sqrt{R_0 R''_1}}{\frac{1}{2} R'_1 + R''_1 - \sqrt{R_0 R''_1}},$$

si R''_1 est positif, ou bien

$$P = \text{arc. tang.} \frac{\sqrt{-R_1 R''_1}}{\frac{1}{2} R_1 + R'_1} - \text{arc. tang.} \frac{\sqrt{-R_0 R''_1}}{\frac{1}{2} R_1 + R'_1},$$

si R''_1 est négatif.

Donc enfin, on aura, aux quantités près des ordres de $\mu \beta^2$ & $\mu \gamma^3$,

$$\Delta_2 - \Delta_0 = \frac{\mu \beta}{1+m} \left(2 V'_1 + \frac{2}{3} V''_1 + \frac{K+L}{\sqrt{R_1}} - \frac{K-L}{\sqrt{R_0}} + 2 \sqrt{\frac{M P}{\pm R''_1}} \right).$$

(43). Il n'y a que deux cas où la formule précédente ne puisse pas servir; l'un est celui de $R'^2_1 = 0$, & l'autre celui de $R_1 R''_1 - \frac{1}{4} R'^2_1 = 0$.

Soit, 1°. $R''_1 = 0$, on aura à intégrer cette différentielle $\frac{U_1 + U'_1 n + U''_1 n^2}{(R_1 + R'_1 n)^{\frac{1}{2}}} dn$, & supposant son intégrale de la forme $\frac{K + L n + M n^2}{\sqrt{R_1 + R'_1 n}}$, on trouvera par la différenciation, & par la comparaison des termes :

$$K = -\frac{2 U_1}{R'_1} + \frac{4 U'^1_1 R_1}{R'^2_1} - \frac{16 U''_1 R^2_1}{3 R'^3_1},$$

$$L = \frac{2 U_1}{R'_1} - \frac{8 U'^1_1 R_1}{3 R'^2_1},$$

$$M = \frac{2 U''_1}{3 R'_1}.$$

Complétant donc cette intégrale de la manière que nous l'avons dit, on aura à la place de la dernière équation du §. précédent, celle-ci :

$$\Delta_2 - \Delta_0 = \frac{\mu \beta}{1+m} \left(2 V'_1 + \frac{2}{3} V''_1 + \frac{K+L+M}{\sqrt{R_1}} - \frac{K-L+M}{\sqrt{R_0}} \right).$$

Soit, 2°. $R_1 R''_1 - \frac{1}{4} R'^2_1 = 0$; dans ce cas la quantité $R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2$ deviendra $\frac{(R_1 + \frac{1}{2} R'_1 n)^2}{R_1}$; & l'on aura à

intégrer cette différentielle rationnelle $\frac{(U_1 + U'_1 n + U''_1 n^2) R_1^{\frac{1}{2}} dn}{(R_1 + \frac{1}{2} R'_1 n)^3}$,

qu'on supposera égal à $R_1^{\frac{1}{2}} \left(d. \frac{K + L n}{(R_1 + \frac{1}{2} R'_1 n)^2} + \frac{M dn}{R_1 + \frac{1}{2} R'_1 n} \right)$,

ce qui donnera , en réduisant au même dénominateur , & comparant les termes ,

$$K = - \frac{U_1}{R_1'} - \frac{2 U_1 R_1}{R_1^3} + \frac{12 U_1'' R_1}{R_1'^3} ,$$

$$L = - \frac{2 U_1'}{R_1^3} + \frac{8 U_1'' R_1}{R_1^3} ,$$

$$M = \frac{4 U_1''}{R_1^3} .$$

Intégrant donc & complétant dûment l'intégrale , on trouvera pour le cas dont il s'agit l'équation

$$\Delta_1 - \Delta_0 = \frac{\mu \beta}{1+m} \left(2 V_1 + \frac{1}{3} V_1'' + \left(\frac{K+L}{R_1} - \frac{K-L}{R_0} \right) \sqrt{R_1} \right. \\ \left. + \frac{M R_1^{\frac{1}{2}}}{R_1^3} L \frac{R_1}{R_0} \right) .$$

48. Ayant trouvé ainsi la valeur de $\Delta_1 - \Delta_0$ pour une portion d'anomalie excentrique $u_1 - u_0$, on trouvera de même la valeur de $\Delta_4 - \Delta_1$ pour une portion suivante d'anomalie $u_4 - u_1$, & ainsi de suite ; & ces différentes valeurs seront exactes , aux quantités près , de l'ordre de $\mu \beta^3$ & $\mu \gamma^3$, β étant $= \frac{u_1 - u_0}{2}$, $\frac{u_4 - u_1}{2}$, &c., & γ étant la partie correspondante de l'anomalie moyenne de la Planète. Ajoutant donc successivement ces valeurs ensemble , on aura la valeur totale de $\Delta_1 - \Delta_0$ répondante à une anomalie excentrique quelconque $u_1 - u_0$; & faisant $u_1 - u_0 = 360^\circ$, on aura la valeur de $\Delta_1 - \Delta_0$, c'est-à-dire l'accroissement de la quantité Δ pour une révolution entière de la Comète.

Au reste , il est bon de remarquer que les formules précédentes ne doivent proprement être employées que pour les parties de l'anomalie excentrique , relativement auxquelles la quantité R sera assez petite , & du même ordre que les différences finies R' , R'' , ce qui arrivera vers les *minimum* de distance entre la Comète & la Planète ; dans ces cas, les formules dont il s'agit ne sont sujettes à aucun inconvénient , & résolvent le problème avec toute l'exactitude qu'on peut désirer ; au lieu que la méthode ordinaire des quadratures par les lignes

paraboliques , seroit trop inexacte , à cause que les valeurs de $\frac{U}{R^{\frac{1}{2}}}$ seront fort grandes , & que leurs différences seront fort intégrales.

Dans tout autre cas , c'est-à-dire lorsque la distance entre la Comète & la Planète sera assez grande , & que les variations de cette distance seront fort régulières , on emploiera avec succès la méthode ordinaire , tant pour intégrer la partie $V du$, que pour intégrer l'autre partie $\frac{U du}{R^{\frac{1}{2}}}$; & comme cette méthode est très-connue & très en usage parmi les Géomètres , nous ne croyons pas devoir nous arrêter ici à l'expliquer ; les Ouvrages de Cotes & de Sterling renferment tout ce que l'on peut désirer sur ce sujet.

(49). Quoiqu'on puisse , au moyen de ces différentes méthodes , calculer les variations des quantités Δ pour telles portions de l'orbite qu'on voudra , il ne fera cependant nécessaire de les employer que pour la partie inférieure de l'orbite , dans laquelle la distance de la Comète au Soleil sera moindre , ou ne sera pas beaucoup plus grande que la distance de la Planète au Soleil ; car pour la partie supérieure de l'orbite , dans laquelle la distance de la Comète au Soleil surpassera de beaucoup la distance de la Planète au Soleil , il sera bien plus avantageux d'employer la méthode du §. 39 & suivans , laquelle abrége & simplifie considérablement le calcul des perturbations dans cette partie.

Pour faire usage de cette méthode , il ne s'agit que de substituer dans les équations du §. 37 , à la place des valeurs de X , Y , Z , qu'on a employées dans le §. 42 , celles de X' , Y' , Z' (§. 39.) : or nous avons déjà remarqué dans le §. 13 , que la quantité $\frac{1}{S}$ n'est autre chose que les deux premiers termes de la quantité $\frac{1}{R}$ réduite en série ascendante par rapport aux quantités ξ , η , ζ ; donc , comme $R^2 = r^2 - 2 (x\xi + y\eta + z\zeta) + \rho^2$ (§. 2.) , ρ^2 étant $= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, on aura par la formule connue

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^3} - \frac{\rho^2}{2r^3} + \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5} - \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)\rho^2}{2r^5} + \frac{5(x\xi + y\eta + z\zeta)^3}{2r^7}, \&c.$$

donc $\frac{1}{S} = \frac{1}{r} + \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^3}$; & par conséquent

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{R} = \frac{\rho^2}{2r^3} - \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5} + \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)\rho^2}{2r^5} - \frac{5(x\xi + y\eta + z\zeta)^3}{2r^7}, \&c.$$

On différenciera maintenant cette quantité en faisant varier seulement x , y , z , & les coefficients de dx , dy , dz seront les valeurs de X' , Y' , Z' ; on trouvera donc, en supposant pour abréger

$$\pi' = -\frac{3\rho^2}{2r^3} + \frac{15(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5} - \frac{15(x\xi + y\eta + z\zeta)\rho^2}{2r^5} + \frac{35(x\xi + y\eta + z\zeta)^3}{2r^7}, \&c.$$

$$\Pi' = -\frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r^3} + \frac{3\rho^2}{2r^3} - \frac{15(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5}, \&c.$$

$$X' = \Pi' \xi + \pi' x, Y' = \Pi' \eta + \pi' y, Z' = \Pi' \zeta + \pi' z.$$

En comparant ces expressions de X' , Y' , Z' , avec celles de X , Y , Z du §. 42, il est visible qu'elles n'en diffèrent qu'en ce que les quantités Π & π se trouvent changées en Π' & π' . D'où il est aisé de conclure que par la substitution dont il s'agit, on aura les mêmes équations différentielles que dans le §. 42, en y changeant seulement Π & π en Π' & π' .

Il n'y aura donc qu'à employer dans les équations du §. 42, à la place de Π & π , les quantités Π' & π' ; & on pourra continuer à les employer pour telle portion de l'orbite qu'on voudra, & reprendre ensuite les premières quantités, pourvu qu'on ajoute aux valeurs totales de δh , δa , &c. les quantités respectives $\mu(H'' - H')$, $\mu(A'' - A')$, &c.; H' , A' , &c. étant les valeurs de H , A , &c. du §. 39, qui répondent au point de l'orbite où l'on change Π , π en Π' , π' ; & H'' , A'' , &c. étant les valeurs des mêmes quantités pour le point où l'on reprendra Π & π à la place de Π' & π' (§. 40.).

(50). Le grand avantage de la transformation précédente consiste en ce que les quantités Π' & π' qu'on substitue à la place de Π & π , deviennent très-petites lorsque la distance r de la Comète au Soleil est beaucoup plus grande que la distance ρ de la Planète au Soleil; ce qui est visible par les expressions des quantités Π' & π' (§. précéd.); tandis que la valeur de Π (§. 42.) demeure toujours finie, quel que soit l'éloignement de la Comète, à cause du terme $\frac{1}{\rho^3}$ qui ne dépend que la distance de la Planète au Soleil, & qui est l'effet de l'action de la Planète sur le Soleil.

Or, si on considère que l'on a en général $(x^2 + y^2 + z^2)$ $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = (x\xi + y\eta + z\zeta)^2 + (x\eta - y\xi)^2 + (x\zeta - z\eta)^2 + (y\zeta - z\eta)^2$; & que par conséquent $x\xi + y\eta + z\zeta$ est toujours nécessairement renfermé entre $+r\rho$ & $-r\rho$, on verra que le premier terme de la quantité Π' sera de l'ordre de $\frac{\rho}{r^4}$, & les deux autres de l'ordre de $\frac{\rho^2}{r^4}$; & que les deux premiers termes de π' seront de l'ordre de $\frac{\rho^2}{r^5}$, & les deux suivans de l'ordre de $\frac{\rho^3}{r^6}$, & ainsi de suite. Donc, lorsque r est assez grand vis-à-vis de ρ , en sorte que $\frac{1}{R^3}$ diffère peu de $\frac{1}{r^3}$, le rapport de Π' à Π sera de l'ordre de $\frac{\rho^4}{r^4}$, & celui de π' à π de l'ordre de $\frac{\rho^2}{r^2}$; la quantité π étant déjà elle-même très-petite de l'ordre de $\frac{1}{r^3}$.

Donc, lorsque $\frac{\rho}{r}$ sera devenu $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$, on pourra du moins, dans la première approximation, négliger les quantités Π' & π' comme nulles; ou si l'on veut absolument y avoir égard, il suffira d'y tenir compte des premiers termes. Dans ce cas, on pourra en toute sûreté employer la méthode ordinaire des quadratures mécaniques, pour intégrer les quantités $d\delta h$, $d\delta a$, &c.; mais on pourra aussi les intégrer analyti-

quement, du moins par approximation; c'est ce que nous allons faire voir.

(51). Pour cet effet, on commencera par remettre dans les expressions des quantités (H), (*h*), (A), (*a*), &c. du §. 42, à la place de *cos. u* & *sin. u*, leurs valeurs en *x* & *y*, savoir, $\cos. u = \frac{2x}{a} + f$, & $\sin. u = \sqrt{\frac{y}{a h}}$; moyennant quoi ces quantités deviendront des fonctions rationnelles & entières de *x*, *y*, *r* & de ξ , η , ζ , dans lesquelles les quantités *x*, *y*, *r* ne passeront pas la seconde dimension, excepté les expressions de (I) & de (*i*) où ces quantités monteront à la quatrième dimension; mais je remarque, à l'égard de l'expression de (I), qu'on y peut réduire les dimensions de *x*, *y*, *r* à la troisième. En effet, il est visible que les termes qui, dans cette expression, peuvent donner des dimensions de *x*, *y*, *r* plus hautes que la troisième, sont ceux-ci: $-\frac{2r^2}{f\sqrt{\frac{a^3}{h}}} (G) + \frac{f y x}{2\sqrt{\frac{a}{h^3}}} F$, autant que les valeurs de (F) & (G) contiennent *x*, *y*, *r*, élevées à la seconde dimension. Or, en faisant, pour un moment, $\sqrt{\frac{a}{4h}}$. $\left((f r + x) \xi + y \eta \right) = \Xi$ & $y \xi - x \eta = \Upsilon$, on a (F) = $-\Xi y + \left(4 x \sqrt{\frac{h}{a}} + 2 f \sqrt{a h} \right) \Upsilon$, & (G) = $\Xi x + \sqrt{\frac{a}{h}}. y \Upsilon$; donc les termes en question seront $-\left(\frac{2r^2 x}{f\sqrt{\frac{a^3}{h}}} + \frac{f y^2 x}{2\sqrt{\frac{a}{h^3}}} \right) \Xi + \left(-\frac{2r^2 y}{f a h} + \frac{2 f y x^2}{a h} \right) \Upsilon$. Maintenant, à cause que nous prenons le grand axe de l'orbite pour celui des abscisses *x*, & que $e = f$ (§. 25.), on aura (§. 18.) $x = \frac{2h - r}{f}$, & $y = \frac{2\sqrt{h}}{f} \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$; donc substituant cette valeur de *y* dans le coefficient de Ξ , il deviendra $\frac{2r^2 x}{f\sqrt{\frac{a^3}{h}}} + \frac{2x}{f\sqrt{\frac{a}{h}}}$ $\left(r - \frac{r^2}{a} - h \right) = \frac{2x(r-h)}{f\sqrt{\frac{a}{h}}}$; & substituant la valeur de

x^2

x^2 dans le coefficient de Υ , il deviendra $-\frac{2 r^2 y}{f a h} + \frac{2 r^2 y}{f a k}$

$$+ \frac{8(h-r)y}{fa} = \frac{8(h-r)y}{fa}.$$

Donc, puisque Ξ & Υ ne contiennent que la première dimension de x , y , r , il s'ensuit que les termes dont il s'agit de l'expression de (I), lesquelles paroissent, au premier aspect, devoir contenir la quatrième dimension de ces quantités, n'en contiendront réellement que la troisième.

Cela supposé, on mettra, tant dans les expressions de (H), (h) , (A) , (a) , &c. du §. cité, que dans celles de Π' & π' du §. 48, à la place de x & y , les valeurs $r \cos. \phi$, $r \sin. \phi$ (§. 18.), ϕ étant l'anomalie vraie de la Comète dans son orbite non altérée; on verra, 1°. que les expressions de (H), (h) , (A) , (a) , &c. deviendront des fonctions rationnelles & entières de ξ , η , ζ , & de $\sin. \phi$, $\cos. \phi$, & r , dans lesquelles r ne montera au plus qu'au second degré, à l'exception des quantités (I) & (i) , dont la première contiendra r^3 , & dont la seconde contiendra r^4 .

2°. Que les expressions de Π' & π' deviendront, à cause de $\zeta = 0$,

$$\Pi' = \frac{3(\xi \cos. \phi + \eta \sin. \phi)}{r^4} + \frac{3r^2 - 2(\xi \cos. \phi + \eta \sin. \phi)^2}{r^3} +, \text{ \&c.}$$

$$\pi' = \frac{-r^2 + 15(\xi \cos. \phi + \eta \sin. \phi)^2}{r^5}$$

$$+ \frac{-15(\xi \cos. \phi + \eta \sin. \phi)r^2 + 35(\xi \cos. \phi + \eta \sin. \phi)^3}{r^6} +, \text{ \&c.}$$

On substituera maintenant ces valeurs de (H), (h) , (A) , (a) , &c. dans les expressions des différentielles $d \delta h$, $d \delta a$, $d \delta f$, &c. du §. 42, & on y mettra, à la place de Π & π , les valeurs précédentes de Π' & π' ; enfin on mettra pour du la valeur $\sqrt{\frac{r d \phi}{a h}}$ déduite de l'équation $d t = \frac{r^2 d \phi}{\sqrt{2 h (1+m)}} = \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}} r du$ (§. 21.).

(52). Il est aisé de voir que par ces différentes substitutions, les valeurs des différentielles $d\delta h$, $d\delta a$, $d\delta f$, &c. du §. 42, se trouveront composées de différens termes de la forme

$\frac{\Sigma \cos. \varphi^m \sin. \varphi^n d\varphi}{r^p}$, m , n , p étant des nombres entiers positifs ou zero, & Σ étant une fonction rationnelle & entière de ξ , η , ζ ; (j'en excepte seulement les termes de la valeur de $d\delta i$ qui seront multipliés par l'angle t , & que nous examinerons plus bas). Et il n'est pas difficile de prouver que $m + n + p$ ne fera pas > 5 pour les premiers termes de π' & Π' , ni > 7 pour les termes suivans, & ainsi du reste.

Or, $r = \frac{2h}{1 + f \cos. \varphi}$ (§. 18.), à cause de $e = f$; donc si on substitue cette valeur dans la formule précédente, on n'aura dans les valeurs de $d\delta h$, $d\delta a$, $d\delta f$, &c. que des termes de cette forme $\Sigma \cos. \varphi^\mu \sin. \varphi^\nu d\varphi$, μ & ν étant des nombres entiers positifs, tels que $\mu + \nu$ non > 5 pour les premiers termes de Π' & π' , ni > 7 pour les termes suivans; j'excepte toujours les termes affectés de t dans la valeur de $d\delta i$ (Voyez ci-après le §. 56.).

Qu'on substitue maintenant dans Σ à la place de ξ , η , ζ leurs valeurs en *sinus* & *cosinus* de $\theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$ (§. 43.); & pour cela on remarquera qu'à cause de la petitesse des quantités Π' & π' , on peut sans scrupule négliger l'effet de l'excentricité de la Planète, & faire simplement $\rho = \frac{a}{2}$, $\lambda = M - \Lambda. (\theta - T) = \sqrt{\frac{a^3}{a^3}} - \Lambda$, en dénotant par Λ l'anomalie vraie de la Planète qui répond au nœud ascendant de son orbite sur l'orbite non altérée de la Comète; mais si on vouloit absolument avoir égard à l'excentricité de l'orbite de la Planète, il n'y auroit qu'à ajouter aux valeurs moyennes de ρ & de λ les inégalités du rayon recteur & de la longitude de la Planète, inégalités dont les premières sont représentées par une suite très-convergente de termes qui procèdent suivant les *cosinus* de M ,

2 M, &c. & dont les autres sont représentées par une semblable suite, mais qui procède suivant les *sinus* des mêmes angles.

Voyez les pages 6 & 8 des Tables Astronomiques de Berlin, où a dénote l'anomalie moyenne que nous désignons ici par M.

Ces substitutions rendront la quantité Σ de la forme $A + B \sin. v + C \cos. v + D \sin. 2v +$, &c., les coefficients A, B, C, &c. étant constans, & l'angle v étant $= \theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$.

Ainsi les valeurs des différentielles $d \delta h$, $d \delta a$, &c. se trouveront composées de deux sortes de termes; les uns indépendans de l'angle v , c'est-à-dire du mouvement moyen de la Planète, les autres affectées des *sinus* ou *cosinus* de cet angle ou de ses multiples.

(53). A l'égard des termes de la première espèce, il est clair qu'ils seront de la forme $\cos. \phi'' \sin. \phi' d \phi$, & par conséquent tous intégrables, μ & ν étant, par l'hypothèse, des nombres entiers positifs.

Quant à ceux de l'autre espèce, ils seront évidemment de la forme $\cos. \phi'' \sin. \phi' \sin. N v d \phi$, ou $\cos. \phi'' \sin. \phi' \cos. N v d \phi$, N étant un nombre entier. Ces termes ne sont intégrables par aucune méthode connue; mais nous allons faire voir que dans la partie supérieure de l'orbite de la Comète, à laquelle est destinée la méthode que nous exposons, ces termes seront considérablement plus petits que les précédens; en sorte qu'on pourra le plus souvent les négliger sans scrupule.

Pour cet effet, je remarque que $d v = d \theta \sqrt{\frac{a^3}{a^3}}$, mais
 (§. 20.) $d \theta = \sqrt{\frac{8(1+m)}{a^3}} dt$, & (§. 21.) $dt = \frac{r^2 d \phi}{\sqrt{2h(1+m)}}$;
 donc $d v = \frac{2 r^2 d \phi}{\sqrt{a^3 h}}$, & de là $d \phi = \frac{d v \sqrt{a^3 h}}{2 r^2}$.

Si on substitue cette valeur de $d \phi$ dans les termes dont il
 S ij

s'agit, & qu'on fasse, pour abrégier, $\sqrt{a^3} h \times \frac{\cos. \phi'' \sin. \phi'}{2 N r^2} = \Phi$, ils deviendront $-\Phi d. \cos. N v$ & $\Phi d. \sin. N v$, dont l'intégrale est $-\Phi \cos. N v + \int \cos. N v d\Phi$, $\Phi \sin. N v - \int \sin. N v d\Phi$.

Les expressions $\int \cos. N v d\Phi$ & $\int \sin. N v d\Phi$ représentent, comme l'on voit, les aires des courbes qui auroient Φ pour abscisse, & $\cos. N v$ ou $\sin. N v$ pour ordonnée; & il est facile de concevoir que l'aire totale de chacune de ces courbes sera toujours moindre (abstraction faite du signe) que le produit de l'abscisse totale par la plus grande ordonnée, laquelle est $= 1$. De sorte que dénotant par (Φ) cette abscisse totale, on aura $\pm (\Phi)$ pour les deux limites entre lesquelles seront nécessairement renfermées les aires $\int \cos. N v d\Phi$ & $\int \sin. N v d\Phi$.

Or, dans la partie supérieure de l'orbite, la distance r de la Comète au Soleil est supposée beaucoup plus grande que la distance moyenne $\frac{a}{2}$ de la Planète au Soleil; de plus, la distance périhélie $\frac{2h}{1+e} = h$, à très-peu près, est dans la plupart des Comètes, & sur-tout dans celles dont on attend le retour, moindre que l'unité, distance moyenne de la Terre au Soleil; de sorte que la quantité $\frac{\sqrt{a^3} h}{2 N r^2}$ sera nécessairement fort petite. Par conséquent les quantités Φ & (Φ) seront beaucoup plus petites, généralement parlant, que la valeur de $\int \cos. \phi'' \sin. \phi' d\phi$.

Il faut remarquer au reste que pour avoir la valeur de (Φ) pour toute la partie supérieure de l'orbite, c'est-à-dire la valeur totale de l'intégrale de $d\Phi$ pour cet espace, il faut prendre les élémens $d\Phi$ toujours avec le même signe. Si donc dans tout cet espace la quantité Φ n'a ni *maximum* ni *minimum*, on prendra l'intégrale à la manière ordinaire; & l'on aura pour (Φ) la différence entre les deux valeurs extrêmes de Φ . Mais si entre ces valeurs extrêmes il se trouve des *maxi-*

mum & des *minimum*, alors la valeur exacte de (Φ) sera égale au double de la différence entre la somme de toutes les plus grandes valeurs de Φ ; & la somme de toutes les plus petites, en regardant les *maximum* négatifs comme des *minimum*, & les *minimum* négatifs comme des *maximum*, & comptant les deux valeurs extrêmes de Φ par les *maximum* ou *minimum*, suivant que Φ va en diminuant ou en augmentant, mais en ne prenant que la moitié de chacune de ces valeurs. C'est de quoi on peut se convaincre aisément par l'inspection d'une figure parabolique quelconque qui auroit différens *maximum* & *minimum*.

Or, je dis que si $r > (2 + \mu)h$, la quantité Φ n'aura ni *maximum* ni *minimum* lorsque ν sera impair, & qu'elle aura un seul *minimum* au périhélie ou $\Phi = 180^\circ$, lorsque μ sera pair.

En effet, à cause de $r = \frac{2h}{1+f\cos\phi}$, on aura $\cos\phi = \frac{1}{f} \left(\frac{2h}{r} - 1 \right)$; en sorte que si $r > (2 + \mu)h \cos\phi$ sera négatif, & ne changera point de signe, mais $\sin\phi$ sera positif en dedans de l'aphélie, & deviendra négatif au delà. Or $\Phi = \sqrt{\alpha^3 h}$

$$\times \frac{\cos^\mu \phi \sin \phi'}{2 N r^2} = \frac{\sqrt{\alpha^3 h}}{(-f)^\mu \cdot 2 N} \times \left(1 - \frac{2h}{r} \right)^\mu \frac{\sin \phi'}{r^2};$$

mais la quantité $\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2h}{r} \right)^\mu$ diminue à mesure que r augmente, & *vice versa*, du moins tant que $r > (\mu + 2)h$, puisque sa différentielle est $-2 \left(1 - \frac{2h}{r} \right)^{\mu-1} \left(1 - \frac{(\mu+2)h}{r} \right) \frac{dr}{r^3}$;

donc si r est impair, la quantité $\left(1 - \frac{2h}{r} \right)^\mu \frac{\sin \phi'}{r^2}$ ira en diminuant jusqu'à l'aphélie où elle sera nulle, & continuera à diminuer au delà de l'aphélie où elle sera négative; mais si ν est pair, la même quantité, après avoir diminué jusqu'à l'aphélie, augmentera de nouveau au delà de l'aphélie, en demeurant toujours positives.

Donc si on suppose que la partie supérieure de l'orbite commence au point où $\phi = \phi'$, $r = r'$, & finisse au point semblable

blement situé au delà de l'aphélie où $\varphi = 360^\circ - \varphi'$ & $r = r'$ on aura (pourvu que $r' > (2 + \mu) h$), $(\Phi) = \sqrt{\frac{a^3}{r^2} h}$

$$\times \frac{\cos. \varphi'^{\mu} \sin. \varphi'}{N r'^2} \text{ si } \nu \text{ est impair, \& } (\Phi) = \sqrt{\frac{a^3}{r^2} h}$$

$$\times \left(\frac{\cos. \varphi'^{\mu} \sin. \varphi'}{N r'^2} - \frac{\cos. 180^{\circ\mu} \sin. 180^\nu}{N \left(\frac{a(1+e)}{2} \right)^2} \right) \text{ si } \nu \text{ est pair, } \frac{a(1+e)}{2}$$

étant la valeur de r dans l'aphélie.

A l'égard de la condition de $r' > (2 + \mu) h$, comme nous avons vu (§. 51.) que μ ne peut être > 5 pour les premiers termes de Π' & π' , auxquels il suffira le plus souvent d'avoir égard, il est clair que cette condition aura toujours lieu dans la partie supérieure de l'orbite où l'on suppose r beaucoup plus grand que $\frac{a}{2}$, puisque pour Jupiter & Saturne, qui sont les seules Planètes qu'on ait à considérer dans la Théorie des Perturbations des Comètes, on a à peu près $\frac{a}{2} = 5$, ou $9 \frac{1}{2}$.

(54.) Si les limites $\pm (\Phi)$ n'étoient pas assez petites, en sorte qu'on ne crût pas pouvoir négliger les quantités renfermées entre ces limites, on pourroit les resserrer davantage de la manière suivante.

Les deux différentielles $\cos. N \nu d\Phi$, $\sin. N \nu d\Phi$, étant mises sous la forme $\frac{d\Phi}{d\varphi} \cos. N \nu d\varphi$, & $\frac{d\Phi}{d\varphi} \sin. N \nu d\varphi$, se changent par la substitution de $\frac{d\nu \sqrt{\frac{a^3}{r^2} h}}{2 r^2}$, & par la supposition de $\sqrt{\frac{a^3}{r^2} h} \cdot \frac{d\Phi}{d\varphi} = \Phi'$ en celles-ci $-\Phi' d\cos. N \nu$, & $\Phi' d\sin. N \nu$, dont l'intégrale est $-\Phi \cos. N \nu + \int \cos. N \nu d\Phi'$, & $\Phi' \sin. N \nu - \int \sin. N \nu d\Phi'$; & l'on pourra appliquer aux quantités $\int \cos. N \nu d\Phi'$, $\int \sin. N \nu d\Phi'$ les mêmes raisonnemens que nous avons faits dans le §. précédent; ainsi dénotant par (Φ') la valeur totale de l'intégrale de $d\Phi'$, prise comme

DES PERTURBATIONS DES COMETES. 143

nous l'avons dit dans ce §. , on aura de nouveau $\pm (\Phi')$ pour les limites entre lesquelles seront renfermées les valeurs des quantités dont il s'agit.

Or il est facile de se convaincre que la quantité Φ' est nécessairement beaucoup plus petite que la quantité Φ lorsque r^2 est assez grand vis-à-vis de $\sqrt{a^3 h}$: ainsi en négligeant les intégrales renfermées entre ces dernières limites, on commettra une erreur bien plus petite que celle qui pourroit résulter de l'omission des intégrales renfermées dans les limites du §. précédent.

On voit par-là comment on pourroit s'y prendre pour pousser cette approximation plus loin, & diminuer à volonté l'erreur résultante des intégrales qu'on négligeroit ; mais il suffira, dans la plupart des cas, de s'en tenir à l'approximation du §. précédent.

(55). Il nous reste encore à examiner les termes multipliés par l'angle t dans la différentielle $d\delta i$, termes que nous avons expressément exceptés (§. 51.). Or on voit par la valeur générale de $d\delta i$ du §. 37 (Sect. précédente), que les termes dont il s'agit ne peuvent venir que du terme $3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}}. d\delta a$; il suffit donc de considérer ce terme, & d'en chercher l'intégrale, en supposant que l'on mette dans la valeur de $d\delta a$, les quantités X', Y', Z' , à la place des quantités X, Y, Z (§. 48.).

Je reprends pour cela l'expression générale de la différentielle $d\delta a$ du même §. 37, laquelle est $d\delta a = -\frac{\mu}{1+m}a^2(Xdx + Ydy)$, & pour embrasser en même temps toute la généralité possible, je remarque que si on n'avoit pas supposé $z=0$ & $\frac{dz}{dt}=0$, & qu'on eût par conséquent employé dans les calculs de ce §. la valeur complete de δa du §. 30 à la place de celle du §. 31, on eût trouvé cette expression plus générale de $d\delta a$, savoir :

$$d\delta a = -\frac{\mu}{1+m}a^2(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Qu'on change maintenant dans cette expression les quantités X, Y, Z en X', Y', Z' , & qu'on y substitue ensuite, à la place de ces dernières quantités, leurs valeurs, lesquelles (en faisant pour abrégér $\frac{1}{S} - \frac{1}{R} = P$) sont exprimées ainsi (§. 39.)

$$X' = \frac{dP}{dx}, Y' = \frac{dP}{dy}, Z' = \frac{dP}{dz};$$

il est visible que la différentielle $X' dx + Y' dy + Z' dz$ ne sera autre chose que la différence de P prise en faisant varier seulement les quantités x, y, z , qui appartiennent à l'orbite de la Comète, & en regardant comme constantes les coordonnées ξ, η, ζ de l'orbite de la Planète.

De sorte que si on désigne par la caractéristique D cette différence partielle, on aura en général $d \delta a = -\frac{r^2}{1+m} a^2 DP$. Or on a par le §. 48,

$$P = \frac{\rho^2}{2r^3} - \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5} + \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5} - \frac{5(x\xi + y\eta + z\zeta)^3}{2r^7} +, \&c.$$

Et si l'on substitue dans cette expression de P les valeurs de ξ, η, ζ, ρ en *sinus* & *cosinus* de ν (§1.), il est visible qu'elle deviendra de cette forme $R + R \sin. \nu + S \cos. \nu + T \sin. 2 \nu + V \cos. 2 \nu + \&c.$, dans laquelle $R, R, S, \&c.$ seront des fonctions rationnelles & entières de x, y, z , & dont chaque terme sera de plus divisé par une puissance de r , dont l'exposant surpassera de trois unités ou davantage la somme des dimensions de x, y, z dans le numérateur.

Or, comme l'angle ν dépend uniquement des quantités ξ, η, ζ qui doivent être regardées comme constantes dans la différence partielle $D P$, & qu'au contraire les quantités $R, R, S, \&c.$ dépendent uniquement des quantités x, y, z qui sont les seules variables dans cette différentielle, il est clair qu'on aura $DP = dR + \sin. \nu dR + \cos. \nu dS + \sin. 2 \nu dT + \cos. 2 \nu dV, \&c.$; $dR, dR, dS, \&c.$ étant les différences ordinaires & totales des quantités $R, R, S, \&c.$

Donc

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 145

Donc on aura en général $d\delta a = -\frac{\mu a^2}{1+m} (dR + \sin. \nu. dR + \cosf. \nu dS + \sin. \nu. dT + \&c.)$; & cette valeur de $d\delta a$, en y faisant $x = r \cosf. \phi$, $y = r \sin. \phi$, & $z = 0$ deviendra identique avec celle du §. 50, mais elle sera toujours d'une forme plus simple & plus commode pour l'intégration.

(56). En effet, on voit d'abord par l'expression précédente de $d\delta a$, que la partie indépendante de l'angle ν est intégrable, son intégrale étant $-\frac{\mu a^2}{1+m} R$, où R est la partie indépendante de ν dans la valeur de P , laquelle sera par conséquent une fonction rationnelle & entière de $\sin. \phi$ & $\cosf. \phi$, en faisant $x = r \cosf. \phi$, $y = r \sin. \phi$, $z = 0$, $r = \frac{2h}{1+f \cosf. \phi}$.

De là on tire cette conclusion importante, que la valeur de δa , c'est-à-dire l'altération du grand axe de l'orbite de la Comète, en tant qu'elle vient des perturbations de la partie supérieure de l'orbite, ne contient aucun terme proportionnel à l'angle ϕ , & qui puisse par conséquent augmenter continuellement.

A l'égard des autres termes de la valeur de $d\delta a$, il est clair qu'après la substitution des valeurs de x , y , r en ϕ , ils deviendront de la forme $\cosf. \phi'' \sin. \phi' \sin. N \nu. d\phi$, ou $\cosf. \phi'' \sin. \phi' \cosf. N \nu. d\phi$, & pourront être traités par la méthode du §. 52 & suiv.

(57). Venons maintenant au terme $3t \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} d\delta a$ de la valeur de $d\delta i$. En y substituant d'abord pour $d\delta a$ la quantité $-\frac{\mu}{1+m} a^2 dR$ indépendante de ν , on aura la différentielle $-\mu 3 \sqrt{\frac{2}{a(1+m)}}. t dR$, dont l'intégrale est $-3 \mu \sqrt{\frac{2}{a(1+m)}} (tR - \int R dt)$. Or on a (§. 21. $dt = \frac{r^2 d\phi}{\sqrt{\frac{2h(1+m)}{a^3}}}$); donc, comme dans l'expression de R ,

les exposans négatifs de r surpassent de trois unités ou davantage la somme des exposans positifs de x, y, z (§. 54.), il est visible qu'en mettant dans $R r^2$, pour x & y , $r \cos. \phi$ & $r \sin. \phi$, (z étant $= 0$), la quantité r ne s'y trouvera encore qu'au dénominateur; en sorte que substituant ensuite $\frac{2h}{1+f \cos. \phi}$ pour r , la quantité $R r^2$ deviendra une fonction rationnelle & entière de $\sin. \phi$ & $\cos. \phi$; d'où il s'ensuit que $R dt = \frac{R r^2 d\phi}{\sqrt{\frac{2h}{1+m}}}$ fera tout à fait intégrable.

Quant à l'autre partie de la valeur de $d\delta a$, elle sera composée, comme nous l'avons vu ci-dessus, de termes de la forme — $\frac{\mu a^2}{1+m} \cos. \phi'' \sin. \phi' \sin. N v. d\phi$, ou — $\frac{\mu a^2}{1+m} \cos. \phi' \sin. \phi'' \cos. N v. d\phi$; donc les termes qui en résulteront dans la valeur de $d\delta i$ feront de la forme — $3 \mu \sqrt{\frac{2}{a(1+m)}} t \cos. \phi'' \sin. \phi' \sin. N v. d\phi$, ou — $3 \mu \sqrt{\frac{2}{a(1+m)}} t \cos. \phi' \sin. \phi'' \cos. N v. d\phi$. Ainsi il suffira de considérer les différentielles $t \cos. \phi'' \sin. \phi' \sin. N v. d\phi$, & $t \cos. \phi' \sin. \phi'' \cos. N v. d\phi$.

A l'imitation de ce qu'on a fait plus haut (§. 52.), on substituera dans ces différentielles $\frac{dv \sqrt{a^3 h}}{dt^2}$ au lieu de $d\phi$, &

faisant pour abrégier (à cause de $dt = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} dv$)

$$V = \int t \sin. N v. N dv = -t \cos. N v + \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \times \frac{\sin. N v}{N},$$

$$W = \int t \cos. N v : N dv = t \sin. N v - \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \times \frac{\cos. N v}{N},$$

on aura ces transformées ΦdV & ΦdW , en conservant la valeur de Φ du §. cité.

Intégrant par parties, on aura $\Phi V - \int V d\Phi$, & $\Phi W - \int W d\Phi$, & l'on démontrera par un raisonnement analogue à celui de ce §. que les valeurs des intégrales $\int V d\Phi$

& $\int W d\Phi$ seront renfermées entre les limites $\pm (V) (\Phi)$, & $\pm (W) (\Phi)$, en désignant par (V) & (W) les plus grandes valeurs de (V) & (W) dans la partie supérieure de l'orbite, & conservant la valeur de (Φ) de l'endroit cité. Or les *maximum* de V & W ayant lieu lorsque $dV = 0$ ou $dW = 0$, c'est-à-dire lorsque $\sin. Nv = 0$, ou $\cos. Nv = 0$, il s'ensuit que les plus grandes valeurs des quantités V & W seront $= t$ (abstraction faite du signe). Si donc on désigne par (t) la valeur de t qui répond à toute la partie supérieure de l'orbite, c'est-à-dire la valeur de t pour le point où finit cette partie de l'orbite, on aura $(V) \& (W) = (t)$; & les valeurs des intégrales $\int V d\Phi$, $\int W d\Phi$, pour toute la partie supérieure de l'orbite, seront renfermées entre ces limites $\pm (t). (\Phi)$.

(58). Si on ne jugeoit pas les limites assez approchées, surtout à cause que la valeur de (t) peut être assez considérable, on pourroit les resserrer davantage par une méthode analogue à celle du §. 53.

En effet, en conservant la valeur de Φ' de ce §., & faisant pour abrégér

$$\begin{aligned}
 V &= \int V N dv = -W - \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \times \frac{\cos. Nv}{N}, \\
 W &= \int W N dv = V - \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} \times \frac{\sin. Nv}{N},
 \end{aligned}$$

on transformera les différentielles $V d\Phi$ & $W d\Phi$ en celles-ci $\Phi' dV$ & $\Phi' dW$; dont l'intégrale, prise par parties, sera $\Phi' V - \int V d\Phi'$ & $\Phi' W - \int W d\Phi'$; & l'on démontrera de la même manière que si (V) & (W) sont les plus grandes valeurs de V & de W dans la partie supérieure de l'orbite, on aura pour les valeurs des intégrales $\int V d\Phi'$ & $\int W d\Phi'$ dans cette partie, les limites $\pm (V) (\Phi')$ & $\pm (W) (\Phi')$. Or, sans chercher les valeurs exactes de (V) & (W) , il suffira de considérer que

les plus grandes valeurs de V & W étant $= t$ (abstraction faite du signe), & les plus grandes valeurs de $\sin. N$ & $\cos. N$ étant 1, les plus grandes valeurs de V & de W ne pourront jamais être plus grandes que $t + \frac{1}{N} \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}$; en sorte qu'on pourra prendre dans les limites précédentes (V) & (W) égales à $(t) + \frac{1}{N} \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}$. Et comme la quantité Φ' est nécessairement moindre que Φ dans la partie supérieure de l'orbite, il est clair que ces nouvelles limites seront plus approchées que les premières, & qu'ainsi l'erreur qu'on commettrait en négligeant les intégrales $\int V d\Phi'$ & $\int W d\Phi'$, fera beaucoup moindre que celle qui résulteroit de l'omission des premières intégrales $\int V d\Phi$, $\int W d\Phi$. Et ainsi de suite.

(59). De ce que nous venons de démontrer depuis le §. 48 jusqu'ici, il est aisé de conclure que les perturbations que la Comète doit éprouver dans la partie supérieure de son orbite, peuvent être déterminées analytiquement sans avoir recours aux quadratures mécaniques, sinon par des formules rigoureuses, du moins par des formules très-approchées, & dont on peut pousser l'approximation aussi loin que l'on veut. Si ce Mémoire n'étoit peut-être pas déjà trop long, je présenterois ici ces formules toutes développées, en sorte qu'il n'y eût plus que les substitutions numériques à faire; mais comme cela ne demande plus qu'un travail mécanique de calcul, nous croyons pouvoir nous en dispenser, & nous contenter d'avoir exposé les principes de cette analyse avec tout le détail & la clarté nécessaires.

Nous allons donner maintenant une idée de la manière dont on doit faire usage des théories précédentes, en montrant comment on doit les appliquer à la Comète des années 1532 & 1661 que les Astronomes attendent vers 1789 ou 1790.

(60). La Comète de l'année 1532 a été observée par Appien, & calculée par Halley; ses élémens sont (la dist. moy. du \odot étant $= 1$):

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 149

Temps moyen du périhélie, à Paris 19 Octobre.....	22 ^h 21' 0''.
Longitude du périhélie.....	3 ^s 21° 7' 0''.
Distance périhélie.....	0,50910
Longitude du nœud ascendant.....	2 ^s 20° 37' 0''.
Inclinaison de l'orbite.....	32° 36' 0''.
Sens du mouvement.....	direct.

Celle de l'année 1661 a été observée par Hevelius, & calculée par Halley; ses élémens sont :

Temps moyen du périhélie à Paris, 26 Janvier.....	23 ^h 50' 0''.
Longitude du périhélie.....	3 ^s 25° 58' 40''.
Distance périhélie.....	0,44851.
Longitude du nœud ascendant.....	2 ^s 22° 30' 30''.
Inclinaison de l'orbite.....	32° 35' 50''.
Sens du mouvement.....	direct.

Comme les élémens de ces deux Comètes sont à très-peu près les mêmes, on est fondé à prendre ces astres pour une même Comète, dont la révolution seroit d'environ 128 ans, & qui devroit, par conséquent, reparoitre en 1789. Dans cette hypothèse, on peut attribuer les différences qui se trouvent entre les élémens de 1532 & de 1661, en partie à l'inexactitude des observations, du moins de celles de 1532, & en partie à l'effet des perturbations que la Comète a dû éprouver pendant la révolution de 1532 à 1661 par l'action des Planètes; & on ne sauroit fixer au juste le retour de cette Comète qu'en calculant d'avance l'effet des perturbations qu'elle doit éprouver dans la révolution de 1661 à 1789.

(61). Comme les observations de 1661 ont été faites par Hevelius, on peut les prendre pour exactes, ainsi que les élémens qu'Halley en a déduits. On peut supposer de plus, que ces élémens soient ceux de l'orbite non altérée; puisqu'en faisant abstraction des perturbations qui ont précédé & suivi l'apparition de cette Comète en 1661, elle auroit dû se mouvoir

toujours dans le même plan, & avoir le périhélie placé dans le même lieu du ciel.

Nous prendrons donc, pour plus de simplicité, le temps du passage par le périhélie en 1661, c'est-à-dire le 21 Janvier 23^h 50', temps moyen à Paris pour l'époque du temps t , en supposant t positif après cette époque & négatif avant elle, & en se souvenant que t exprime l'angle du mouvement moyen du Soleil (20).

Nous prendrons de plus le plan qui coupe l'écliptique à $2^s\ 22^{\circ}\ 30'\ 32''$, & sous un angle égal à $32^{\circ}\ 35'\ 50''$ (cet angle doit être du côté du Nord & sur la partie de l'écliptique comprise entre $2^s\ 22^{\circ}\ 30'\ 32''$ & $8^s\ 22^{\circ}\ 30'\ 32''$) pour le plan fixe des coordonnées x & y ; & nous prendrons l'axe des x dans la ligne menée du Soleil au point de ce plan qui répond à $3^s\ 25^{\circ}\ 58'\ 40''$ de longitude comptée depuis le lieu de l'équinoxe en 1661. Nous rapporterons ensuite à ce même plan & à ce même axe les lieux des Planètes perturbatrices au moyen des coordonnées rectangulaires ξ , η , ζ . Ces déterminations s'accordent avec les suppositions des §. 2 & 25.

(62). Cela posé soit, comme dans la seconde Section, a le grand axe de l'orbite non altérée, $4h$ le paramètre de ce grand axe & e l'excentricité de l'orbite $= \sqrt{1 - \frac{4h}{a}}$; la distance périhélie sera $= \frac{a - ae}{2} = \frac{a}{2} (1 - e) = \frac{a(1 - e^2)}{2(1 + e)} = \frac{2h}{1 + e}$. Or, par les observations de 1661, on a conclu la distance périhélie $= 0,44851$ (la distance moyenne du Soleil à la Terre étant $= 1$); on aura donc $\frac{2h}{1 + e} = 0,44851$. Mais j'observe que comme les élémens de 1661 ont été calculés dans l'hypothèse de l'orbite parabolique, il paroît naturel d'adopter aussi cette hypothèse dans la détermination de h ; or, dans la parabole, on a $a = \infty$, donc $e = 1$, par conséquent $h = 0,44851$.

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 151

Au reste , nous verrons ci-après que cette valeur de h ne seroit tout au plus diminuée que d'un centième, si on vouloit la déterminer dans l'hypothèse elliptique (§. 64.).

(63). Il faut déterminer maintenant le grand axe a ; ce qu'on fera par le principe connu que dans les orbites elliptiques décrites par une même force tendante au foyer & variant dans la raison inverse des carrés des distances, les temps des révolutions sont comme les racines carrées des cubes des moyennes distances. Or l'intervalle entre le passage par le périhélie en 1532, & le passage par le périhélie en 1661 est de 128 ans 99^j 1^h 21'; mais il faut remarquer que comme en 1582 on a retranché dix jours, il faut aussi les retrancher du nombre précédent; ce qui le réduira le vrai intervalle entre les deux passages par le périhélie à 128 années 89^j 1^h 21'; parmi lesquelles années il y en a 32 de bissextiles.

Réduisant ce temps en jours & en décimales de jours, on aura donc pour l'intervalle dont il s'agit 46841^j, 05625.

Si les deux périhélies étoient placés dans le même lieu du ciel, il est clair que l'intervalle qu'on vient de trouver seroit en même temps la durée de la révolution de la Comète; mais comme les lieux des deux périhélies diffèrent un peu entre eux, il faut défalquer de l'intervalle trouvé, le temps que la Comète a mis à aller du lieu du périhélie de 1532 à celui du périhélie de 1661.

Pour cela, j'observe que le périhélie de 1661 est plus avancé en longitude que celui de 1532 de 3° 51' 40"; mais l'équinoxe a reculé dans l'espace de 128 ans 89^j de 1° 45' 36"; donc retranchant cette quantité de la précédente, on aura 2° 41' 42" pour le vrai espace dont le périhélie de 1661 étoit plus avancé par rapport aux étoiles fixes que celui de 1532; donc la Comète, après avoir atteint en 1532 son périhélie: a dû parcourir encore autour du Soleil un angle de 2° 41' 4" pour arriver au lieu du périhélie de 1661, parce que le mou-

vement de cette Comète se fait suivant l'ordre des signes ; ce seroit le contraire si la Comète étoit rétrograde.

Il faut donc chercher le temps qui répond à l'anomalie vraie $2^{\circ} 41' 4''$ dans une parabole dont la distance périhélie est 0,50910. Or, dans la Table générale du mouvement des Comètes (cette Table calculée d'abord par Halley, rendue ensuite plus commode par l'Abbé de la Caille, a été étendue davantage dans le Recueil des Tables, publié par l'Académie de Berlin, tom. 3. p. 2 & suiv.), on trouve que pour l'orbite, dont la distance périhélie seroit = 1, ce temps seroit de $1^j 93$; il faut donc multiplier ce nombre par la racine carrée du cube de 0,50910 ; & l'on aura $0^j 70107$ pour le nombre qu'il faudra retrancher du nombre de jours trouvé plus haut, pour avoir la durée de la révolution de la Comète par rapport aux étoiles fixes ; laquelle durée sera donc = $46840^j, 35515$.

Or la durée de la révolution périodique de la Terre, c'est-à-dire, l'année sidérale, est de $365^j 9^h 10''$, ou en décimales de jours, de $365^j 25636$. Donc, puisque la distance moyenne de la Terre au Soleil est prise pour l'unité, & que la distance moyenne de la Comète est $\frac{a}{2}$, on fera cette proportion $365,25636 : 46840,35515 = 1 : \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, d'où l'on tire $\frac{a}{2} = \left(\frac{46840,35515}{365,25636}\right)^{\frac{2}{3}} = 25,43013$. C'est la distance moyenne ou le demi-grand axe de l'orbite elliptique de la Comète.

(64). Il est aisé de conclure de l'équation précédente, que si le temps périodique de la Comète étoit plus long ou plus court d'un petit nombre n d'années sidérales, la distance moyenne $\frac{a}{2}$ seroit augmentée ou diminuée à très-peu près de la quantité $\frac{2n}{3\sqrt{\frac{a}{2}}} = 0,13207n$; de sorte qu'il faudroit que

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 153

n fût plus grand que 7, pour que la distance moyenne fût changée d'une unité.

Or, quoique les Observations de 1532, faites par Appien, ne soient peut-être pas tout à fait exactes, cependant, comme la Comète dont il s'agit n'a été observée que pendant un mois, dans lequel temps elle a passé par le périhélie, il est visible qu'on ne sauroit admettre une erreur de 15 jours dans le passage au périhélie, & qu'ainsi, à cet égard, on est assuré que la valeur de $\frac{a}{2}$ est exacte à 0,05 près.

Mais il y a une autre source d'erreur qui est bien plus considérable; je veux parler de l'effet des perturbations que la Comète a dû éprouver dans la période de 1532 à 1661, & qui ont pu alonger ou diminuer cette période de quelques années. En effet, la détermination précédente du grand axe étant fondée sur l'hypothèse, que la Comète a décrit une orbite régulière autour du Soleil en vertu de la seule attraction de cet astre, cette détermination cesse d'être exacte dès qu'on admet l'action des Planètes sur la Comète : dans ce cas, il est clair qu'on ne sauroit chercher le grand axe de la véritable orbite décrite par la Comète, puisque cette orbite n'est plus une ellipse; mais on doit chercher plutôt le grand axe de l'orbite que la Comète auroit décrite sans les perturbations, & que nous avons nommée dans le cours de ce Mémoire, orbite non altérée; & pour cela, il est visible qu'on ne doit pas employer la durée observée de la révolution, mais cette durée corrigée de l'effet des perturbations.

Supposons que cet effet consiste à alonger ou à raccourcir le temps périodique de l'orbite non altérée, d'un petit nombre n d'années sidérales pendant la période de 1532 à 1661; il est clair que ce temps périodique sera plus court ou plus long de n années, que la durée observée de la révolution de la Comète; par conséquent la distance moyenne de l'orbite non altérée sera à très-peu-près $= 25,43013 \mp 0,13220 n$.

Or on ne peut déterminer la valeur de n que par le calcul même des perturbations, calcul dans lequel la quantité a entre comme élément; mais comme la valeur de n ne peut être que de quelques unités, il sera permis de prendre pour la valeur de a la quantité 25,43013, qui auroit lieu sans les perturbations, du moins dans le calcul de ces perturbations. L'erreur qu'on pourra commettre par cette supposition, ne sera que de l'ordre des carrés des forces perturbatrices, quantités que nous avons toujours supposées qu'on néglige dans la Théorie des perturbations des Comètes.

(65). En faisant donc $\frac{a}{2} = 25,43013$, & prenant pour h la valeur déterminée ci-dessus (§. 61.), savoir $h = 0,44851$, on trouvera d'abord l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{4h}{a}} = 0,98222 = f$ (§. 25.).

Employant cette valeur de e dans l'équation $\frac{2h}{1+e} = 0,44851$ du §. cité, on trouvera $h = 0,44452$; c'est la valeur de h dans la supposition que la distance périhélie, déduite des observations, soit la véritable distance périhélie dans l'ellipse; & l'on voit que cette valeur diffère à peine de $\frac{4}{1000}$ de celle que donne la supposition de l'orbite parabolique; c'est pourquoi on pourra sans crainte employer la première valeur de h dans le calcul des perturbations.

Comme le demi-petit axe de l'ellipse est $= \sqrt{a h}$, on trouvera ce demi-petit axe $= 4,77612$.

Et si l'on cherche l'angle dont le *cosinus* sera $= e$, on trouvera $10^{\circ} 49' 10''$; c'est la valeur de l'anomalie excentrique qui répond à 90° d'anomalie vraie, à compter du périhélie; & c'est aussi la valeur de l'anomalie vraie comptée de l'aphélie pour les points de la distance moyenne.

Enfin, comme nous prenons le périhélie de 1661 pour l'époque d'où l'on doit compter le temps t , & que nous suppo-

fons que dans ce périhélie , l'orbite troublée coïncide avec l'orbite non troublée (§. 60.) ; il s'ensuit qu'on aura non seulement $\varepsilon = 0$, $\psi = 0$, & $i = 0$, mais aussi $\delta \varepsilon = 0$, $\delta \psi = 0$, $\delta i = 0$, & de plus $\delta h = 0$ dans le même périhélie (§. 38.) ; donc les cinq variables δh , δg , δb , δc , δi devront être nulles lorsque $t = 0$, de sorte qu'en faisant commencer dans ce point les intégrations des différentielles $d \delta h$, $d \delta g$, $d \delta b$, $d \delta c$, & $d \delta i$ (§. 42.), il n'y aura point de constantes à y ajouter.

Nous remarquerons encore qu'à cause de $i = 0$, on aura simplement $\theta = 2 \ t \sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}}$ (§. 20.), & par conséquent $t = \theta \sqrt{\frac{8(1+m)}{a^3}}$; & les angles t , θ , u , ϕ seront tous nuls à la fois dans le périhélie de 1661 ; ils seront positifs après ce périhélie , & négatifs avant.

A l'égard de la quantité δa , elle devrait aussi être nulle lorsque $t = 0$, si la valeur de a étoit exactement égale au grand axe de l'orbite non altérée de la Comète ; mais ayant supposé ci-dessus $\frac{a}{2} = 25,43013$, on aura (§. 63.) pour la vraie distance moyenne de l'orbite non altérée, $25,43013 \mp 0,13220 n$, laquelle doit être , par l'hypothèse , la même que celle de l'orbite troublée dans le périhélie de 1661 où $t = 0$. Or, le grand axe de l'orbite troublée étant en général $a + \delta a$ (§. 38.), on aura donc , lorsque $t = 0$, $\frac{a + \delta a}{2} = 25,43013 \mp 0,13220 n$; donc $\frac{\delta a}{2} = \mp 0,13220 n$. D'où l'on voit que cette valeur de δa dépend du nombre n qui est l'effet des perturbations dans la période précédente.

(66). Considérons maintenant le retour de la Comète au périhélie ; il est visible qu'en faisant abstraction des perturbations , il n'y aura qu'à ajouter l'intervalle trouvé ci - dessus (§. 62.) de 128 années $89^j \ 1^h \ 21'$ à l'époque du passage par le périhélie de 1661 , pour avoir le temps du retour au

périhélie ; & il viendra (en se souvenant que l'année 1700 n'a pas été bissextile) le 26 Avril 1789 $1^h 11'$, temps moyen au méridien de Paris. Mais pour avoir exactement le temps du retour de la Comète au périhélie dans l'orbite elliptique dont le demi-grand axe seroit 25,43013, tel qu'on l'a déterminé dans le §. cité, il faudra retrancher du temps qu'on vient de trouver 0^j,70107, c'est-à-dire $16^h 49'\frac{1}{2}$, par la raison expliquée dans ce même §, ce qui donnera le 25 Avril 1789 $8^h 21'\frac{1}{2}$.

Cette détermination seroit entièrement exacte, même en ayant égard aux perturbations, si les deux révolutions consécutives de 1532 à 1661, & de 1661 à 1789 étoient parfaitement égales ; & par conséquent si l'effet des perturbations étoit le même dans ces deux périodes. Donc, si l'altération de ces deux périodes n'est pas la même, il est clair qu'il ne faudra qu'ajouter au temps déterminé ci-dessus, l'excès de l'altération de la seconde période sur l'altération de la première.

Or nous avons donné dans le §. 41 la formule qui exprime en général l'altération de la révolution périodique de la Comète : appliquant donc ici cette formule, & marquant par un, deux, trois traits les quantités qui répondent aux trois périhélies consécutifs de 1532, 1661, 1789, on aura cette quantité, dans laquelle j'ai substitué au lieu de $\delta \epsilon$ la valeur $\frac{\delta g}{e}$ (§. 38.).

$$\begin{aligned} & \frac{3 \{ t''' \delta a''' - 2 t'' \delta a'' - t' \delta a' \}}{2 a} \\ & - \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}} (\delta i''' - 2 \delta i'' + \delta i') \\ & - \left(\frac{2 h}{1+e} \right)^2 \times \frac{\delta g''' - 2 \delta g'' + \delta g'}{e \sqrt{\frac{2 h}{1+m}}}, \end{aligned}$$

c'est la correction du temps, c'est-à-dire le temps qu'il faudra ajouter au 25 Avril 1789 $8^h 21'\frac{1}{2}$ pour avoir l'instant du passage de la Comète par la ligne du périhélie de 1661, dont la

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 157

longitude étoit alors de $3^{\text{h}} 25^{\circ} 58' 40''$; & sera en 1789 (à cause de la précession des équinoxes) de $3^{\text{h}} 27^{\circ} 46' 16''$.

Il est bon de remarquer que la dernière partie de la quantité précédente, celle qui contient les quantités $\delta g'$, $\delta g''$, $\delta g'''$, dépend uniquement du déplacement du périhélie, comme on peut le voir par le §. 41; de sorte qu'en rejetant cette partie, la quantité restante sera la correction du temps pour le passage de la Comète par le vrai périhélie de 1789; mais il faudra alors ajouter cette correction au 26 Avril 1789 $1^{\text{h}} 11'$, temps du passage par le périhélie, dans le cas où la révolution anomalistique de 1661 à 1789 seroit égale à celle de 1532 à 1661.

Pour réduire ces quantités en temps, on se souviendra que nous exprimons le temps par le mouvement moyen du Soleil (§. 20.). De sorte que si la quantité à réduire en temps est exprimée en angles, en la divisant par 360° , on aura des années sidérales de 365 $\frac{1}{4}$, 25636; & si elle est exprimée en nombres absolus (la moyenne distance du Soleil étant l'unité), il faudra la diviser par le rapport de la circonférence au rayon, c'est-à-dire, par 6,283185..... pour la réduire de même en années sidérales.

(67). La formule précédente est générale; mais dans notre cas on aura, par ce qu'on a établi dans le §. 64, $t'' = 0$, $\delta t'' = 0$, $\delta g'' = 0$; de plus, à cause de $t = \theta \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}$ (θ étant l'anomalie moyenne de la Comète), on aura $t''' = 360^{\circ} \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}$; de sorte que la première partie de la formule dont il s'agit se réduira à $\frac{3 \cdot 360^{\circ}}{4} \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}}$. ($\delta a''' - \delta a'$); où $\delta a'''$ fera l'intégrale totale de la différentielle $d \delta a$, pour la période entière de 1661 à 1789, en faisant t positif, & où $\delta a'$ fera de même l'intégrale totale de $d \delta a$, pour la période de 1661 à 1532, en fai-

fant t négatif; de sorte que comme il n'y a que la différence de ces deux intégrales qui entre en ligne de compte, il n'y aura point de constantes à y ajouter, & on pourra prendre chaque intégrale, en sorte qu'elle commence au périhélie de 1661, où $t = 0$.

Les deux autres parties de la même formule deviendront

$$- \sqrt{\frac{a^3}{8(1+\pi)}} (\delta i'' + \delta i') - \left(\frac{2h}{1+\epsilon} \right)^2 \times \frac{\delta g' + \delta g''}{c \sqrt{2h(1+m)}},$$

où (à cause de $\delta i'' = 0$ & $\delta g'' = 0$), il faudra prendre pour $\delta i'''$ & $\delta g'''$ les intégrales des quantités $d \delta i$, & $d \delta g$ depuis le périhélie de 1661 jusqu'à celui de 1789, & pour $\delta i'$, & $\delta g'$ les intégrales des mêmes quantités, mais depuis le périhélie de 1661 jusqu'à celui de 1532, en supposant t négatif.

L'altération du temps périodique est celle qu'il est le plus important de déterminer dans la Théorie des Perturbations des Comètes.

Quant aux altérations des autres élémens de l'orbite, on les déterminera directement par l'intégration des quantités $d \delta h$, $d \delta a$, $d \delta g$, $d \delta b$, $d \delta c$ (§. 38, 42 & suiv.), en faisant commencer les intégrales au périhélie de 1661, & les étendant jusqu'au périhélie de 1789 ou de 1532, suivant qu'on voudra déterminer ces altérations pour la dernière période de la Comète ou pour la période précédente.

(68). Voilà toutes les données & les formules nécessaires pour calculer les perturbations causées à l'orbite de la Comète dont il s'agit par l'action des Planètes. Or, parmi toutes les Planètes, il n'y a que Jupiter & Saturne, dont l'action sur la Comète puisse être sensible, tant parce que les masses des autres Planètes sont trop petites, que parce qu'elles sont trop proches du Soleil. Ainsi on prendra successivement Jupiter & Saturne pour la Planète perturbatrice dont on a supposé la masse μ , & dont le rayon vecteur est ρ , & les coordonnées rectangulaires ξ , η , ζ . Les Tables Astronomiques de Halley donneront toutes les valeurs des quantités qui dépendent des lieux

DE LA PERTURBATION DES COMETES. 159

de ces Planètes dans un temps quelconque ; & nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire d'entrer là-dessus dans aucun détail.

Comme la distance de Jupiter au Soleil est environ 5, & celle de Saturne environ 9 $\frac{1}{2}$, il est clair que si on fait commencer la partie supérieure de l'orbite de la Comète aux points de la moyenne distance, c'est-à-dire, aux extrémités du petit axe, alors r sera toujours beaucoup plus grand que ρ , & la méthode du §. 48 & suiv. aura toute l'exactitude qu'on peut désirer, en négligeant même tout à fait les termes qui dépendent du mouvement moyen de la Planète perturbatrice dans les formules des quantités différentielles $d \delta h$, $d \delta a$, &c., & en ne tenant compte que des termes indépendans de l'angle ν , que nous avons vu être toujours intégrables (§. 52 & 56.).

Il y aura encore un autre avantage à prendre ainsi la moitié supérieure de l'orbite pour ce que nous appelons la partie supérieure. Car on aura alors pour le commencement de cette partie $u = \pm -90$, & pour la fin $u = \pm 270$; de sorte qu'à cause de $x = \frac{a}{2} (\cos. u - e)$, $y = \sqrt{a h} \sin. u$, $r = \frac{a}{2} (1 - e \cos. u)$ & $dt = \frac{\sqrt{a}}{2(1+m)} \cdot r du$, (u étant l'anomalie excentrique comptée depuis le périhélie), on aura pour le commencement de la partie supérieure $x = -\frac{ae}{2}$, $y = \pm \sqrt{ah}$, $r = \frac{a}{2}$, $\frac{dx}{dt} = \mp \sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dr}{dt} = \pm e \sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}$, & pour la fin $x = -\frac{ae}{2}$, $y = \mp \sqrt{ah}$, $r = \frac{a}{2}$, $\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dr}{dt} = \mp e \sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}$ (les signes supérieurs étant pour le cas où l'on prendra les angles t & u positifs, c'est-à-dire, pour la période qui suit le périhélie de 1661, & les signes inférieurs étant pour le cas où t & u seront négatifs, c'est-à-dire, pour la période qui précède ce périhélie), ce qui simplifiera beaucoup les valeurs des quantités H' , H'' , A' , A'' , &c. c'est-à-dire, les valeurs de H , A , &c.

pour le commencement & pour la fin de la partie supérieure de l'orbite (§. 48.).

Quant à la masse m de la Comète que nous avons conservée, pour plus d'exactitude & de généralité, dans les formules de ce Mémoire, elle est inconnue, & rien ne sauroit conduire à la déterminer; mais il est naturel de la supposer très-petite vis-à-vis de la masse du Soleil; de sorte qu'on pourra négliger par-tout la quantité m vis-à-vis de l'unité.



THÉORIE
DES
MACHINES SIMPLES,
*EN AYANT ÉGARD AU FROTTEMENT DE LEURS PARTIES,
ET A LA ROIDEUR DES CORDAGES.*

PIECE qui a remporté le Prix double de l'ACADÉMIE DES SCIENCES
pour l'année 1781.

La Raïson a tant de formes, que nous ne savons à laquelle nous prendre;
l'Expérience n'en a pas moins.

ESSAI DE MONTAIGNE. Liv. III, ch. 13.

*Par M. COULOMB, Chevalier de l'Ordre de SAINT LOUIS,
Capitaine en premier au Corps Royal du Génie, pour lors
Correspondant, & depuis Membre de l'ACADÉMIE DES
SCIENCES.*





THÉORIE

DES

MACHINES SIMPLES,

*EN AYANT ÉGARD AU FROTTEMENT DE LEURS PARTIES,
ET A LA ROIDEUR DES CORDAGES.*

M. AMONTONS, dans les Mémoires de l'ACADÉMIE DES SCIENCES pour 1699, paroît être le premier Auteur qui ait cherché à évaluer le frottement & la roideur des cordes dans le calcul des Machines. Il crut trouver, par ses expériences, que l'étendue des surfaces n'entroit pour rien dans les frottemens, dont la mesure dépendoit uniquement de la pression des parties en contact : il en conclut que, dans tous les cas, le frottement étoit proportionnel aux pressions.

La plupart des Mécaniciens suivirent les résultats de M. Amontons ; cependant M. Muschembroek trouva, dans plusieurs expériences, que les frottemens ne dépendoient pas uniquement de la pression, & que l'étendue des surfaces y influoit. M. de Camus, dans son Traité des Forces mouvantes, & Désaguilliers, dans son Cours de Physique, s'aperçurent que le frottement d'un corps ébranlé étoit moins considérable que celui d'un corps que l'on vouloit sortir de l'état de repos : mais

ni l'un ni l'autre ne cherchèrent à déterminer le rapport qui pouvoit exister entre ces deux espèces de frottement. M. l'Abbé Bossut, dans son excellent Traité de Mécanique, penche pour le système de M. Amontons, qui donne une grande facilité dans les calculs, & qui suffit dans la plupart des cas de pratique; pourvu que l'on ait soin de distinguer le frottement dans les surfaces en mouvement, d'avec la force qu'il faut employer pour détacher ces mêmes surfaces après un certain temps de repos. L'on voit de plus, par les réflexions qui précèdent le calcul du frottement des machines dans la mécanique de M. l'Abbé Bossut, que ce célèbre Auteur a prévu, comme l'on pourra s'en convaincre par nos expériences, ce qui arriveroit relativement à l'étendue des surfaces, aux pressions & aux vitesses dans les expériences qui restoient encore à faire.

Des essais faits en petit, dans un Cabinet de Physique, ne peuvent pas suffire pour nous diriger dans le calcul des machines destinées à soulever plusieurs milliers; parce que la moindre inégalité, le plus foible obstacle placé entre les surfaces, la cohérence de quelques parties plus ou moins homogènes, jettent la plus grande irrégularité dans les résultats. L'on exécute tous les jours dans nos Ports une manœuvre qui montre combien peuvent être fautive des conclusions sur le frottement, tirées des expériences faites en petit; c'est celle de lancer les vaisseaux à l'eau sur un plan incliné de 10 ou 12 lignes par pied, ce qui indique que le frottement n'est pas, dans cette opération, le quatorzième de la pression; tandis qu'en faisant glisser, sous de petites pressions, un madrier de chêne sur un autre madrier du même bois, on avoit cru qu'il étoit le tiers de la pression.

M. Amontons avoit aussi cherché à évaluer la roideur des cordes. Le moyen ingénieux qu'il a employé dans ses expériences, a été depuis mis encore en usage par Désaguilliers, & par plusieurs autres Physiciens; mais le travail de ces différens Auteurs a le même inconvénient que celui fait jusques à présent sur les frottemens: ce sont plutôt des ficelles que des cordes, qui ont été soumises aux épreuves, avec des tractions de soixante

livres au plus, & sur des rouleaux dont le plus grand n'étoit que de 18 lignes de diamètre.

L'ACADÉMIE voulant un travail qui puisse diriger dans le calcul des machines, exige » que les loix du frottement & » l'examen des effets résultans de la roideur des cordages » soient déterminés d'après des expériences nouvelles & faites » en grand; elle exige de plus, que les expériences soient » applicables aux machines usitées dans la Marine, telles que » la poulie, le cabestan & le plan incliné ». Je ne me flatte pas d'avoir rempli les vûes aussi vastes qu'utiles de cette illustre Compagnie; mais je crois avoir fait quelques pas dans la carrière qu'elle a ouverte.

Ce Mémoire sera divisé en deux Parties; dans la première, nous chercherons le frottement des surfaces qui glissent l'une sur l'autre, tel que celui d'une surface qui glisse le long d'un plan incliné.

Dans la deuxième Partie, nous chercherons à évaluer la roideur des cordages : nous y examinerons aussi le frottement dans les mouvemens de rotation.



PREMIERE PARTIE.

Du frottement des surfaces planes qui glissent l'une sur l'autre.

2. **L**E frottement, dans ce genre de mouvement, peut être envisagé sous deux points de vue, ou lorsque les plans sont posés l'un sur l'autre depuis un certain temps, & que, par une traction dans la direction du plan de contact, l'on veut les détacher, ou lorsque ces plans ont déjà un certain degré de vitesse uniforme, & que l'on cherche le frottement sous ce degré de vitesse.

3. Dans le premier cas où l'on veut faire glisser une surface sur une autre en la sortant de l'état de repos, le frottement peut dépendre de quatre causes.

1°. De la nature des matières en contact, & de leurs enduits;

2°. De l'étendue des surfaces.

3°. De la pression que ces surfaces éprouvent.

4°. De la longueur du temps écoulé depuis que les surfaces sont en contact.

A ces quatre causes, l'on pourroit en ajouter peut-être une cinquième, c'est la situation humide ou sèche de l'atmosphère. L'on conçoit en effet que les particules humides contenues dans l'air, s'attachant aux surfaces en contact, y forment un enduit qui les dénature. Mais comme cette dernière cause ne paroît pas devoir influer d'une manière sensible dans les résultats, nous n'y avons point eu égard dans nos épreuves.

4. Lorsque les surfaces glissent l'une sur l'autre avec un certain degré de vitesse, pour lors le frottement peut encore dépendre

des trois premières causes rapportées à l'article qui précède, & en outre de la vitesse plus ou moins grande des plans en contact.

5. La cause physique de la résistance opposée par le frottement au mouvement des surfaces qui glissent l'une sur l'autre, ne peut être expliquée, ou que par l'engrènement des aspérités des surfaces qui ne peuvent se dégager qu'en se pliant, qu'en se rompant, qu'en s'élevant à la sommité les unes des autres; ou bien il faut supposer que les molécules des surfaces des deux plans en contact contractent, par leur proximité, une cohérence qu'il faut vaincre pour produire le mouvement : l'expérience seule pourra nous décider sur la réalité de ces différentes causes.

Etablissement pour exécuter les Expériences.

6. Nous avons fait construire (Fig. 1.) une table très-solide, dont chaque pilier montant étoit accoré par des jambes de forces. Le madrier CC' dd' qui forme la table, a 3 pouces d'épaisseur, 8 pieds de longueur & 2 pieds de largeur. Sur cette table, l'on a posé deux pièces de bois de chêne AB, A' B' de 12 pieds de longueur & de 8 pouces de grosseur : ces deux pièces de bois sont posées suivant la longueur de la table, & à 3 pouces de distance l'une de l'autre; à l'extrémité B B' des pièces de bois, l'on a placé, dans le vide qui les sépare, une poulie h de bois de gaïac d'un pied de diamètre, tournant sur un axe de chêne vert de 10 lignes de diamètre : sous cette poulie, l'on a creusé un puits de 4 pieds de profondeur.

A l'autre extrémité AA' des pièces de bois, l'on a placé, à angle droit, un petit treuil horizontal. L'on a fortement attaché sur les deux pièces de bois un madrier de chêne aa' bb' de 8 pieds de longueur, 16 pouces de largeur & 3 pouces d'épaisseur; son plan supérieur aa' bb' posé de niveau, avoit été dressé à la varlope avec beaucoup de soin, & poli ensuite avec une peau de chien de mer.

L'on a fait successivement glisser sur ce madrier plusieurs traîneaux dont voici la construction: $ABCD$ (*Fig. 2*, n°. 1 & 2.), est un madrier de 18 pouces de largeur & de différentes longueurs, comme il sera détaillé aux expériences. Sous ce madrier, n°. 1, l'on a cloué des deux côtés deux petits liteaux, Am Cm , BD n n' ; en sorte que le traineau posé sur le madrier dormant, est retenu des deux côtés par ces liteaux avec un jeu de 2 ou 3 lignes, pour qu'il suive, sans être gêné, la direction du madrier.

Lorsqu'on veut diminuer les surfaces de contact, l'on cloue sous le traineau des règles de différentes largeurs, dont on arrondit les extrémités pour y placer les clous, afin qu'ils ne portent pas contre le madrier dormant. Des deux crochets, n°. 2, fixés aux deux extrémités du traineau, l'un sert (*Fig. 1.*) à attacher la corde qui passe sur la poulie h , & porte le plateau F ; à l'autre est attachée une corde qui enveloppe le treuil, & sert à rappeler le traineau du côté AA' .

CHAPITRE PREMIER.

Du premier effort nécessaire pour vaincre le frottement, ou pour faire glisser une surface après un temps de repos donné.

7. **N**ous avons dit que, dans le frottement, il falloit distinguer avec soin la force nécessaire pour le vaincre lorsque les surfaces sont posées l'une sur l'autre depuis un certain temps, de la force nécessaire pour entretenir une vitesse uniforme lorsque les surfaces ont un mouvement respectif. Ce Chapitre est destiné à déterminer la résistance du frottement après un certain temps de repos.

8. Comme, dans les expériences de ce Chapitre, il faut avoir le frottement des surfaces posées l'une sur l'autre depuis un

un temps donné souvent très-court, & que, sous les grandes pressions, ce frottement devient considérable, la manœuvre lente de charger & de décharger le plateau P, pour augmenter & diminuer les tractions, ne peut pas convenir à la recherche actuelle, & nous y avons substitué le moyen suivant.

Nous avons fait faire (*Fig. 3.*) une espèce de romaine a b de 7 pieds de longueur; à l'extrémité est fixé un axe de fer taillé en couteau, qui sert de point de rotation, & qui porte librement contre deux petites plaques de fer attachées sous les extrémités BB' des deux pièces de bois de la première Figure. En C, est un anneau que l'on attache à la corde du traîneau qui passe sur la poulie h : au moyen d'un poids P que l'on fait glisser peu à peu le long de la romaine a b, l'on mesure la tension de la corde fixée au point C, & lorsque le levier commence à emporter le traîneau, cette tension est la mesure du frottement du traîneau. L'on a eu soin d'ajouter à la tension produite par le poids P, celle qui répondoit au poids du levier, & à la distance de son centre de gravité au point de rotation.

SECTION PREMIERE.

Des frottemens des surfaces qui glissent à sec l'une sur l'autre, suivant le fil du bois, sans aucune espèce d'enduit, mais seulement avec le degré de poli que l'art peut leur donner.

Bois de chêne sur bois de chêne.

9. **L**E traîneau (*Fig. 2.*) a 2 pieds 3 pouces de longueur; le madrier dormant, sur lequel porte le traîneau, a 1 pied 4 pouces de large, ce qui donne une surface de contact de 3 pieds carrés. L'on veut déterminer le frottement après un certain temps de repos, sous différentes pressions.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Le traîneau, sans être chargé d'aucun poids, pesant 74 livres, le frottement a augmenté d'une manière irrégulière pendant les 30 premières secondes ; mais il a fallu indistinctement, au bout d'une minute & de dix minutes de repos, une traction de 30 livres pour vaincre le frottement.

II.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son propre poids compris de 874 lb
Le mouvement a été incertain, mais a augmenté pendant les dix premières secondes ; après une minute & une heure de repos, l'on a eu indistinctement. . . . 406 lb

III.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 2474 lb
Après $\frac{1}{2}$ " de repos, le frottement a été trouvé de . . . 586 lb
Il a augmenté pendant deux secondes, où on l'a trouvé de 1106
Après une minute & deux heures de repos, l'on a eu également 1116

Observations sur ces trois Expériences.

10. (a) Nous avons constamment observé, dans les trois expériences qui précèdent, que la résistance du frottement étoit moindre après une seconde de repos qu'après une ou deux minutes ; mais qu'après une ou deux minutes, le frottement avoit acquis toute l'augmentation dont il paroît susceptible. Nous

(a) Le frottement de la poulie h peut être négligé dans toutes ces expériences ; il n'est guère ici, comme nous le trouverons en déterminant le frottement des axes, que la cent cinquantième partie du frottement du traîneau.

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 171

avons , d'après cette observation , cherché à déterminer le rapport de la pression au frottement , lorsque ce dernier est parvenu à sa limite ou au *maximum* de son accroissement ; nous avons pour ce rapport :

I. ^{re} EXPÉRIENCE.....	$\frac{74}{30}$	2,46.
II. ^e EXP.....	$\frac{874}{406}$	2,16.
III. ^e EXP.....	$\frac{2474}{1116}$	2,21.

Comme ces trois expériences donnent , pour le rapport de la pression au frottement , une quantité à peu près constante , malgré la grande différence qui se trouve dans les pressions , j'ai voulu voir si , en diminuant , autant qu'il est possible , les surfaces de contact , ce rapport se trouveroit encore le même.

11. Sous un traîneau de 15 pouces de longueur , j'ai fait clouer deux petits prismes triangulaires de bois de chêne de 15 pouces de longueur , mais dont l'angle qui portoit sur le madrier dormant étoit arrondi : la *Fig. 4* représente une section transversale du traîneau & des deux petites règles prismatiques sur lesquelles il porte.

IV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris de 250 lb

Après un quart de seconde de repos , après une minute & une heure , l'on trouve indistinctement que la traction nécessaire pour vaincre le frottement est de 106 lb

V.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris de 450 lb

Après un quart de seconde & une heure , la résistance due au frottement a été trouvée indistinctement de . . 186 lb

VI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 856 lb
Après un quart de seconde & une heure, le frottement a été
trouvé également de 356 lb

Observations sur les trois Expériences qui précèdent.

12. Si l'on veut déterminer, d'après les trois dernières expériences, le rapport de la pression au frottement, l'on observera d'abord que lorsque les points de contact sont réduits aux plus petites dimensions possibles, comme ils le sont ici, le frottement parvient, dans un temps très-court, à son *maximum* : car il ne m'a jamais été possible, dans les trois dernières expériences, quelque court qu'ait été le temps de repos, de faire varier le frottement, & de le trouver moindre que la quantité qui représente ici sa limite. Le rapport de la pression au frottement, tiré des trois dernières expériences, donne :

III. ^e EXPÉRIENCE.....	$\frac{250}{106}$	2,36.
IV. ^e EXP.....	$\frac{450}{186}$	2,417.
V. ^e EXP.....	$\frac{856}{356}$	2,40.

L'on trouve donc que lorsque les surfaces de contact sont réduites aux plus petites dimensions possibles, comme elles le sont ici, puisque notre traîneau ne porte que par des angles arrondis, le rapport de la pression au frottement est représenté par une quantité constante; que ce rapport d'ailleurs diffère très-peu de celui que nous avons trouvé dans les trois premières expériences, puisque le rapport moyen de la pression au frottement donné par les trois premières expériences, est de 2,28, & qu'il est dans les trois dernières 2,39; quantités qui ne diffèrent pas d'un vingt-troisième, quoique l'étendue des

surfaces soient entre elles dans un rapport presque infini. Ainsi, il résulte certainement des expériences qui précèdent, que lorsque les surfaces de bois de chêne glissent l'une sur l'autre sans aucun enduit, le rapport de la pression au frottement est toujours une quantité constante, & que la grandeur des surfaces n'y influe que d'une manière insensible. Il y a cependant une remarque à faire; c'est que lorsque les surfaces en contact ont beaucoup d'étendue, & qu'elles n'éprouvent que des petites pressions, le frottement varie d'une manière très-irrégulière, suivant les positions où se trouve le traîneau. Ainsi, dans la première expérience, lorsque la pression étoit seulement de 74 livres, & la surface en contact de 3 pieds carrés; quoique j'aye trouvé moyennement le frottement de 30 livres, je l'ai aussi trouvé quelquefois, après un temps très-long, au dessous de 30 livres, & après un temps très-court, au dessus de 30 livres, & une fois de 55 livres, sans que je puisse attribuer ces différences à d'autres causes qu'à la cohésion, & qu'au plus ou moins d'homogénéité des parties en contact; mais lorsque les pressions sont de plusieurs quintaux, comme dans les cinq dernières expériences, ces irrégularités cessent d'avoir lieu, ou au moins, étant probablement indépendantes des pressions, elles cessent d'être sensibles. C'est-là la raison pour laquelle nous avons toujours trouvé plus d'exactitude dans les essais des trois dernières expériences où la surface de contact est très-petite, que dans ceux des trois premières où la surface de contact est de 3 pieds; c'est ce qui, jusqu'à présent, a dû jeter de l'incertitude sur les essais faits en petit.

Frottement du chêne & du sapin.

13. L'on a fixé, sous un traîneau de 15 pouces de longueur, deux règles de sapin de 2 pouces de largeur; ces règles étoient arrondies à leur extrémité, en sorte que les clous enfoncés dans ces arrondissemens pour fixer les règles au traîneau, ne pouvoient ni toucher ni écorcher le madrier dormant; la surface de contact étoit de 48 pouces.

VII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 50 lb	
Après $\frac{1}{2}$ " de repos, le frottement a été trouvé de	25 lb
Après 2" de repos.	30
Après 10" & une heure.	96

VIII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 450 lb	
Après $\frac{1}{2}$ " de repos.	256
Après 2" de repos.	286
Après une minute & une heure.	284

IX.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 850 lb	
Après $\frac{1}{2}$ " & une heure de repos.	560 lb

Observations sur ces trois Expériences.

14. Le frottement du sapin contre le chêne nous donne des résultats analogues à ceux que nous venons de trouver pour le frottement du chêne contre le chêne : moins les pressions sont grandes, plus il faut du temps pour que le frottement atteigne sa limite. Dans la septième expérience, où la charge du traîneau n'est que 50 livres, on voit le frottement croître sensiblement pendant quatre ou cinq secondes. Dans la neuvième expérience, où la charge est de 850 livres, il parvient à son *maximum* dans une demi-seconde : en déterminant le rapport de la pression au frottement, l'on trouve :

VII. ^e EXPÉRIENCE.....	$\frac{50}{36}$	1,39.
VIII. ^e EXP.....	$\frac{450}{286}$	1,58;
IX. ^e EXP.....	$\frac{850}{560}$	1,52.

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 175

Ces quantités peuvent être regardées comme absolument égales entre elles, & donnent 1,50 pour le rapport moyen de la pression au frottement, lorsqu'il est parvenu à sa limite.

Frottement du sapin contre le sapin.

15. L'on a fixé sur le madrier dormant deux règles de sapin, & l'on a fait glisser sur ces règles le traîneau qui avoit servi dans les trois dernières expériences; la surface de contact étoit de 48 pouces.

X.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 50 lb	
Après $\frac{1}{2}$ " de repos.	20 lb
Après 3" & une heure.	27

XI.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 250 lb	
Après 2" de repos & une heure.	145 lb

XII.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 850 lb	
Après 2" & une heure de repos.	480 lb

Observations sur ces trois Expériences.

16. Le frottement du sapin contre le sapin a acquis son *maximum* dans aussi peu de temps, & suivant les mêmes loix que le chêne glissant sur le sapin: l'on trouve encore ici le rapport de la pression au frottement constant sous tous les degrés de pression.

X. ^e EXPÉRIENCE.	$\frac{50}{27}$	1,85.
-------------------------------------	---------------------------	-------

XI. ^e EXP.	$\frac{250}{145}$	1,72.
-------------------------------	-----------------------------	-------

XII. ^e EXP.	$\frac{850}{480}$	1,77.
--------------------------------	-----------------------------	-------

176 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

pour le rapport moyen de la pression au frottement, l'on aura 1,78.

Frottement du bois d'orme contre lui-même.

17. L'on a substitué aux deux règles de sapin placées sur le madrier dormant, ainsi qu'à celles clouées sous le traîneau, des règles de bois d'orme des mêmes dimensions, en sorte que la surface de contact étoit de 48 pouces.

XIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 45 lb	
Après un repos de $\frac{1}{2}$ "	6 lb
Après un repos de 3 "	10
Après un repos de 60 "	19
Le frottement a paru encore augmenter pendant deux ou trois minutes; sa limite, après une heure de repos; a été trouvée de	21

XIV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 450 lb	
Après un repos de $\frac{1}{2}$ "	100 lb
Après un repos de 3 "	160
Après une minute & une heure.	207

XV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1650 lb	
Après un repos de $\frac{1}{2}$ "	356 lb
Après un repos de 2 "	556
Après un repos de 10 " , d'une minute & d'une heure.	756

Observations sur ces trois Expériences.

18. Le bois d'orme, qui au toucher paroît doux & velouté, s'engraine beaucoup plus lentement que les autres bois. L'accroissement

croissement du frottement est sensible pendant quelques secondes, & ne parvient à son *maximum*, sous une pression de 45 livres, qu'après un repos de plus d'une minute. Si l'on cherche, en comparant les trois expériences, le rapport de la pression au frottement, lorsque ce frottement a atteint son *maximum*, l'on trouve :

XIII. ^e EXPÉRIENCE.....	$\frac{45}{21}$	2,14.
XIV. ^e EXP.....	$\frac{450}{207}$	2,18.
XV. ^e EXP.....	$\frac{1660}{756}$	2,18.

Ainsi le rapport de la pression au frottement, lorsqu'il cesse de prendre des accroissemens, est une quantité constante pour le bois d'orme, comme pour les autres bois.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

19. L'on peut conclure des expériences qui précèdent, que dans les bois posés l'un sur l'autre sans aucune espèce d'enduit, la résistance due au frottement croît pendant quelques secondes; mais qu'elle atteint sa limite après une ou deux minutes de repos, & que le frottement parvenu à sa limite est toujours proportionnel à la pression : en rassemblant ici les rapports de la pression au frottement, après quelques minutes de repos, nous trouvons :

Chêne contre chêne.....	2,34.
Chêne contre sapin.....	1,50.
Sapin contre sapin.....	1,78.
Orme contre orme.....	2,18.

REMARQUE.

20. Dans toutes les expériences qui précèdent, le frottement se faisoit suivant le fil du bois. L'on a essayé de déterminer le frottement, en posant les règles attachées au traîneau

178 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

par le travers du traîneau ; en sorte que , dans le mouvement du traîneau , le fil de bois des règles se trouve former un angle droit avec le fil de bois du madrier dormant : il a résulté de ces expériences , qu'à égalité de pression & de surface , le frottement parvenoit à sa limite dans un temps plus long que lorsque les bois glissoient suivant leur fil , & que , parvenu à sa limite , il se trouvoit moindre que dans le premier cas , mais cependant toujours proportionnel à la pression. Voici deux expériences qui ont été faites avec beaucoup de soin , dans lesquelles le traîneau étoit porté , comme on le voit *Fig. 5* , qui représente le traîneau coupé dans le sens de sa longueur , par deux règles de chêne taillées en coin , & touchant le madrier dormant par un angle arrondi.

XVI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris de 50 lb
Après une seconde & une minute de repos , il a fallu également ,
pour vaincre le frottement , une traction de . . . 13 lb

XVII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris de 1650 lb
Il a fallu pour vaincre le frottement. 450 lb

Ces deux expériences donnent pour le rapport de la pression au frottement parvenu à son *maximum* :

I. ^{ère} EXPÉRIENCE.....	$\frac{50}{13}$	3,85.
II. ^e EXP.....	$\frac{1650}{450}$	3,67.

quantités qui sont presque égales , malgré la grande différence qui se trouve entre les pressions.

Ces deux expériences répétées avec des surfaces de contact de 48 pouces , ont donné le rapport qui précède sous tous

les degrés de pressions : nous avons seulement remarqué que sous les pressions de 50 livres, il falloit un repos de plus de dix secondes avant que le frottement eût atteint son *maximum*. Nous trouvons en prenant une moyenne dans les deux dernières expériences, & en la comparant avec celle qui résulte des quatrième, cinquième & sixième expériences, que le frottement du chêne, lorsque le fil de bois se recroise, est au frottement suivant le fil du bois, comme 2,34 est à 3,76.

Du frottement entre les bois & les métaux, après un certain temps de repos.

21. L'accroissement des frottemens, relativement aux temps de repos, marche ici très-lentement : les variations sont quelquefois à peine sensibles après quatre ou cinq secondes ; il est rare que le frottement ait acquis son *maximum* avant quatre ou cinq heures de repos, quelquefois même il n'y est pas parvenu après cinq ou six jours.

Fer sur bois de chêne.

22. Le traîneau de 15 pouces de longueur a été garni (comme on le voit *Fig. 6*, qui représente une section suivant sa longueur) de deux lames de fer, recourbées à leurs extrémités pour saisir le traîneau. Ces lames posées des deux côtés du traîneau, glissoient sur le madrier dormant suivant le fil de bois ; la surface de contact étoit de 45 pouces.

XVIII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 53 lb	
Après un repos de $\frac{1}{2}$ ", le frottement a été trouvé de	55 lb
Après un repos de 30".	5 $\frac{1}{4}$
Après un repos de 60".	6 $\frac{1}{2}$
Après une heure de repos.	9
Après quatre jours.	10

XIX.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1650 lb	
Après un repos de $\frac{1}{2}$ " , le frottement a été trouvé de	125 lb
Après un repos de 10".	130.
Après un repos de 80".	145
Après 4 heures de repos.	200
Après 16 heures.	280
Après 4 jours.	340

Observations sur ces deux Expériences.

23. Ces deux expériences nous apprennent que des surfaces hétérogènes, telles que les bois & les métaux, n'acquiescent la limite de leur frottement qu'après un repos très-long; elles nous apprennent que les accroissemens dus à trois ou quatre secondes de repos, sont insensibles. Si nous voulons déterminer la limite du frottement, en le supposant parvenu à son *maximum*, après quatre jours de repos, nous trouvons le rapport de la pression au frottement.

XVIII. ^e EXPÉRIENCE.	$\frac{53}{10}$	5,30
XIX. ^e Exp.	$\frac{1650}{340}$	4,86.

R E M A R Q U E.

24. Le cuivre glissant sans enduit sur le chêne, donne des résultats analogues à ceux du fer glissant sur le même bois. Il paroît même que les accroissemens du frottement, relativement aux temps de repos, marche plus lentement pour le cuivre que pour le fer : parvenu à son *maximum*, le rapport de la pression au frottement est à peu près comme $5 \frac{1}{2}$ à 1.

Du frottement entre les métaux après un certain temps de repos.

25. L'on a cloué & fixé solidement sur le madrier dormant de notre table, deux règles de fer qui ont été dressées & polies avec le plus grand soin; elles avoient 4 pieds de longueur, 3 pouces de largeur & 3 lignes d'épaisseur; elles étoient placées à 10 pouces de distance l'une de l'autre, & elles répondoient, lorsque le traîneau étoit posé & emboîtoit le madrier dormant, aux deux règles de fer attachées sous le traîneau: l'on a arrondi toutes les arrêtes pour qu'elles n'influaient point sur les frottemens. Les règles de fer attachées au traîneau avoient 18 lignes de largeur, 15 pouces de longueur; la surface de contact étoit de 45. pouces.

FIG. 7.

*Fer contre fer.*XX.^{ème} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris de 51 lb
Après $\frac{1}{2}$ " de repos, ou après un temps plus long, l'on a également trouvé pour le frottement. 15 lb

XXI.^{ème} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris de 450 lb
Le frottement acquiert dans cette expérience, comme dans celle qui précède, toute son intensité dans un instant; on le trouve de 124 lb

Observations sur ces deux expériences.

26. Il ne m'a pas été possible de continuer les expériences du frottement pour le fer glissant sans enduit sur lui-même, sous des pressions plus considérables que celles de 450 livres. Sous de plus grandes pressions, le fer se rayoit, & les résultats devenoient incertains, le frottement augmentant très-considérablement, c'est ce qui est arrivé deux fois en répétant la vingt-unième expérience: mais une remarque qui a été consi-

182 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

raiment faite pour les métaux glissant à sec l'un sur l'autre, c'est que la longueur du temps de repos n'augmente point le frottement. Nous verrons même, dans le Chapitre suivant, qu'en général, lorsque les métaux glissent sans enduit l'un sur l'autre, le frottement se trouve absolument le même pour les surfaces en mouvement, & pour celles que l'on veut sortir de l'état de repos : en cherchant le rapport de la pression au frottement, dans les expériences qui précèdent, nous trouverons :

XX. ^e EXPÉRIENCE.....	$\frac{51}{15}$	3,40.
XXI. ^e EXP.	$\frac{450}{124}$	3,63.

Ces deux expériences, quoique faites sous des pressions qui sont entre elles comme 9 est à 1, donnent, pour le rapport de la pression au frottement, une mesure qui est à peu près la même. Ainsi, lorsque les surfaces de fer glissent à sec l'une sur l'autre, le frottement est proportionnel aux pressions.

Fer contre cuivre jaune.

27. L'on a remplacé les deux règles de fer clouées au traîneau par deux règles de cuivre jaune, exactement des mêmes dimensions que les premières. Ces règles avoient été dressées avec beaucoup de soin, & polies avec une pierre à aiguiser, d'un grain très-fin ; la surface de contact est de 45 pouces.

XXII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 50 lb
Le frottement acquiert dans un instant toute son intensité,
& on le trouve de 14 lb

XXIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 450 lb
Le frottement a été toujours le même, sans être augmenté par
la longueur du temps de repos, & il a été trouvé de 112 lb

OBSERVATIONS.

L'on a fait ici la même remarque que dans les expériences qui précèdent. En recommençant trois fois la vingt-troisième expérience, les règles de cuivre se sont rayées, & il n'a pas été possible d'augmenter les pressions. Si l'on détermine, comme dans les articles qui précèdent, le rapport de la pression au frottement, l'on trouve :

XXII. ^e EXPÉRIENCE.	$\frac{50}{14}$	3,6.
XXIII. ^e EXP.	$\frac{450}{112}$	4,0.

Ces deux quantités ne diffèrent entre elles que d'un dixième; ainsi l'on peut les regarder comme égales, & en tirer des conclusions analogues à celles des articles qui précèdent.

Frottement du fer & du cuivre jaune, en réduisant les surfaces de contact aux plus petites dimensions possibles.

28. Comme il étoit intéressant de savoir si le rapport de la pression au frottement pour le fer & le cuivre suivoit la même loi lorsque les surfaces étoient réduites à quelques points de contact, j'ai ôté les deux règles placées sous le traîneau dans l'article qui précède, &, à leur place, j'ai substitué quatre clous de cuivre, qui, enfoncés dans le traîneau, portoient, au moyen de leur tête sphérique, sur les deux grandes règles de fer attachées au madrier dormant; par-là les surfaces de contact, qui, dans les dernières épreuves, se trouvoient de 45 pouces, étoient réduites ici à quatre points de surface dont les dimensions étoient insensibles.

XXIV.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 lb

L'on a eu constamment, pour vaincre le frottement, une traction
de 8 lb

XXV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traineau chargé, son poids compris de 850 lb
 Le frottement a été trouvé de 140 lb

OBSERVATIONS.

29. En comparant ici ces deux expériences, l'on trouve pour le rapport de la pression au frottement :

XXIV. ^e EXPÉRIENCE.	$\frac{47}{8}$	5,9.
XXV. ^e EXP.	$\frac{850}{140}$	6,0.

Les pressions sont dans ces expériences comme 18 est à 1, & les rapports de la pression au frottement sont égaux. Ainsi, toutes les fois que les surfaces de contact entre le fer & le cuivre jaune se trouvent réduites à des petites dimensions, le rapport de la pression au frottement se trouvera indistinctement sous tous les degrés de pression, comme 6 est à 1 : nous trouverons, dans le dernier Livre, le même rapport, lorsque nous chercherons à déterminer par l'expérience le frottement des axes de fer dans des chapes de cuivre. Quoique nous serons obligés d'examiner de nouveau le frottement du cuivre & du fer lorsque nous chercherons le frottement des surfaces, & celui des axes en mouvement, nous ne pouvons pas quitter cet article sans quelques remarques relatives aux différences des frottemens que nous venons de trouver sous les mêmes degrés de pression pour une surface de 45 pouces, comme dans les expériences 22 & 23, & pour les surfaces de dimensions nulles comme les deux dernières. Cette différence ne peut être attribuée qu'à l'imperfection du poli, c'est au moins, ce me semble, ce qui suit de quelques expériences dont je vais rapporter les résultats. Lorsqu'on a fait glisser les premières fois les quatre têtes de clous de cuivre qui portent le traineau sur les règles de fer, elles ont donné le rapport de la pression au frottement moindre que celui de 5 à 1. Ce rapport

port a ensuite augmenté à mesure que les expériences se sont multipliées; en sorte que lorsque ces mêmes clous de cuivre ont eu parcouru sept à huit fois, sous des pressions de cinq ou six quintaux, toute la longueur des règles de fer, pour lors, le frottement, sous tous les degrés de pression, a été constamment le sixième de la pression, & ce rapport n'a plus varié: il suit de là, que les pierres, les poudres & tous les instrumens dont on se sert pour donner le poli, ne plient & ne rompent qu'imparfaitement les aspérités dont les surfaces sont hérissées, mais qu'elles disparaissent par l'usé, sous les grandes pressions, dans le mouvement rapide des machines.

Voici encore une expérience qui vient à l'appui de la remarque qui précède: Pour adoucir, dans la vingt-troisième expérience, le frottement des règles de cuivre qui se rayoient sous une pression de 450 livres, nous avons mis sur ces règles un enduit d'huile, & nous avons fait parcourir au traîneau une vingtaine de fois la longueur des règles de fer; pour lors les règles de cuivre, quoique sous des pressions plus considérables que 450 livres, ont cessé de se rayer, & elles sont devenues lustrantes & très-polies: soit ensuite que l'on laissât l'enduit d'huile, soit qu'on l'essuyât avec le plus grand soin, le frottement, après quelques secondes de repos, étoit, dans les deux cas, le sixième de la pression; il paroît, par cette expérience, que, par le mouvement du traîneau, toutes les aspérités dues à l'imperfection du poli étoient détruites, puisque le frottement se trouvoit le même que dans les surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions.

L'on ne peut pas croire ici que ce soient les particules d'huile qui, en pénétrant dans les pores du cuivre & du fer, adoucissent le frottement: car si, au lieu des règles de cuivre, l'on fait glisser sans essuyer l'huile, le traîneau portant par les quatre têtes des clous de cuivre sur les règles de fer, l'on trouvera que l'enduit diminue bien un peu le frottement de la surface une fois en mouvement; mais qu'il ne change rien à l'intensité de ce frottement après une ou deux secondes de repos, & qu'il

se trouve le sixième de la pression , comme lorsque l'on faisoit glisser les mêmes clous à sec sur les règles de fer.

SECTION DEUXIÈME.

Du frottement des surfaces garnies d'un enduit , & du premier degré de force nécessaire pour les faire glisser l'une sur l'autre après un certain temps de repos.

29. **L**ORSQUE les surfaces sont garnies d'un enduit, le temps de repos nécessaire pour que la force qui doit vaincre la résistance de la tenacité due au frottement parvienne à sa limite , est un temps long, mais variable. Il dépend de la dureté de l'enduit, il est plus long avec un enduit de suif qu'avec un enduit de vieux oing; il dépend encore de la nature & de l'étendue des surfaces de contact : si ces surfaces sont réduites à de très-petites dimensions, le frottement arrive à sa limite dans très-peu de secondes. Les expériences suivantes ont été faites avec des enduits de suif très-pur.

Du frottement du bois de chêne, lorsque les surfaces sont enduites de nouveau suif à chaque opération.

30. Le traîneau de 15 pouces de longueur a été posé sur le madrier dormant, enduit d'une couche de suif d'une demi-ligne d'épaisseur; le madrier dormant, ainsi que le traîneau, avoient acquis le plus grand poli, par des expériences antérieures qui duroient depuis un mois : le suif, dans ces expériences, avoit pénétré dans les pores du bois à plus de 2 lignes de profondeur. Comme l'on avoit été obligé de creuser de quelques lignes, sur 4 pouces de largeur, le milieu du madrier dans toute sa longueur, pour faire sauter un nœud qui donnoit quelques variétés dans les frottemens, la surface de contact se trouvoit dans les expériences qui suivent de 180 pouces.

XXVI.^{eme} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 lb
 Lorsqu'on ébranle le traîneau, en lui donnant un mouve-
 ment insensible, il continue à se mouvoir sous une traction
 de 6 lb $\frac{1}{2}$
 Après un repos de 4', le frottement a été trouvé de 8
 Après un repos de 2 heures. 9

XXVII.^{eme} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1650 lb
 Lorsque le temps du repos est nul, & que l'on donne une
 vitesse insensible, le traîneau continue à se mouvoir sous une
 traction de 64 lb
 Après un repos de 3", le frottement a été trouvé de 160
 Après un repos de 15". 209
 Après un repos de 60". 280
 Après un repos de 240". 318
 Après un repos de 2 heures. 452
 Après un repos de 6 jours. 622

XXVIII.^{eme} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris de 3250 lb
 Lorsque le temps de repos est nul, & que l'on imprime une
 vitesse insensible, le traîneau continue à se mouvoir sous une
 traction de 120 lb
 Après un repos de 3", l'on a trouvé le frottement de 320
 Après un repos de 15". 355
 Après un repos de 60". 413
 Après un repos de 240". 593
 Après une heure de repos. 880
 Après deux heures de repos. 920
 Après cinq jours, une fois 1220 lb; une autre fois. 1554
 A a ij

Observations sur ces trois Expériences.

31. L'on voit, par ces expériences, que lorsque les bois sont enduits de suif, le frottement parvient à sa limite beaucoup plus lentement que lorsque les surfaces glissent à sec l'une sur l'autre : nous ne sommes pas sûrs, dans les expériences actuelles, que le frottement ait atteint sa limite après un repos de cinq ou six jours ; au lieu que huit ou dix secondes suffisoient, lorsque les corps glissoient à sec, pour que le frottement parvînt à son *maximum*. Dans les essais où les surfaces ont de l'étendue relativement à leurs pressions, les résultats varient, & la cohésion paroît augmenter de beaucoup le frottement : il s'en faut bien que la vingt-sixième expérience où la pression n'étoit que de 47 livres, soit aussi exacte que les deux suivantes. Les trois expériences ont été répétées deux fois ; les valeurs moyennes, sur-tout de la dernière, ont été très-rapprochées ; mais celles de la vingt-sixième ont souvent différé entre elles d'un tiers. L'on doit remarquer que si les surfaces sont réduites à de très-petites dimensions, pour lors le frottement parvient à son *maximum* dans très-peu de temps : lorsque nous avons voulu faire porter le traîneau sur deux petites règles, & que les surfaces de contact n'étoient que de 45 pouces sous une pression de 900 livres, le frottement avoit atteint son *maximum* ; dans moins d'une minute, il étoit à peu près le même que lorsque les bois n'étoient point enduits.

Le vieux oing très-mou ralentit très-peu l'accroissement du frottement qui parvient à son *maximum* avec une surface de contact d'un pied carré sous une pression de 1600 livres, presque en aussi peu de temps que si les bois glissoient à sec l'un sur l'autre. L'on observe de plus, qu'avec ce genre d'enduit, le frottement parvenu à son *maximum*, est quelquefois plus considérable que lorsque les bois glissent à sec l'un sur l'autre : il semble qu'outre l'engrènement des surfaces qui se fait ici presque aussi librement, à cause du peu de consistance du vieux oing, que s'il n'y avoit point d'enduit, il y a encore une cohé-

rence entre les surfaces, augmentée par l'intermède de l'enduit qui occasionne une résistance étrangère au frottement.

Du frottement du bois de chêne, lorsque l'enduit de suif est usé par des opérations antérieures.

32. Dans les expériences qui précèdent, l'enduit étoit absolument neuf, & renouvelé à chaque opération; il arrivoit de là qu'il étoit assez inégalement répandu sur les surfaces, d'où il pouvoit résulter quelques différences dans les observations. Dans les essais qui vont suivre, l'enduit étoit posé depuis huit jours, & l'on avoit fait plus de cinquante opérations sans le renouveler : le traîneau, dans chaque expérience, avoit parcouru toute la longueur du madrier; par-là, l'enduit s'étoit répandu par-tout d'une manière très-uniforme, il paroissoit homogène; mais sa consistance avoit changé, & il avoit beaucoup perdu de son onctuosité : l'accroissement du frottement, relativement au temps de repos, se faisoit très-lentement, & je pouvois espérer d'avoir une loi suivie dans les observations. Je puis assurer que les deux expériences qui suivent, la dernière surtout, a été faite avec toute la patience & toute l'attention possibles. Le traîneau avoit 4 pieds & demi de longueur, & la surface de contact, à cause du petit enfoncement pratiqué tout du long du madrier pour les raisons que nous venons d'expliquer, se trouvoit réduite à 4 pieds & demi.

XXIX.^{eme} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris de 2310 lb

Lorsque le temps du repos est nul, & que l'on imprime au traîneau une vitesse insensible, l'on trouve qu'il continue à se mouvoir sous une traction de 187 lb

Après 2' de repos. 392

Après 60' de repos. 451

Après 16 heures de repos. 514

XXX.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 5810 lb

En imprimant au traîneau une vitesse insensible, l'on trouve
qu'il continue à se mouvoir sous une traction de 502 lb

Après un repos de 2'. 790

Après un repos de 4'. 866

Après un repos de 9'. 925

Après un repos de 26'. 1036

Après un repos de 60'. 1186

Après 16 heures de repos. 1535

Observations sur ces deux Expériences.

33. En comparant l'une à l'autre les deux expériences qui précèdent, il paroît qu'avec des surfaces de contact de 4 ou 5 pieds carrés, les frottemens, après un même temps de repos, sont, pour différentes pressions, proportionnelles aux pressions : l'on sent cependant, d'après les observations de l'article qui précède, que lorsque les pressions deviendront énormes, ou, ce qui revient au même, les surfaces de contact très-petites, relativement aux pressions, les frottemens arriveront à leur limite dans très-peu de temps; conséquemment que cette loi ne sera pas suivie.

Si l'on cherche, d'après la trentième expérience qui a été faite avec le plus grand soin, la marche que suit l'accroissement des frottemens, relativement aux temps de repos, l'on remarquera que, pour une vitesse insensible, c'est-à-dire, lorsque le temps de repos est nul, le frottement est déjà une quantité finie & donnée. Ainsi, en nommant F le frottement, si l'on veut chercher la fonction du temps qui doit représenter cette quantité F , il faudra d'abord, dans cette fonction, que le temps devenant 0, cette fonction devienne une quantité constante égale au frottement des surfaces mues d'un mouvement insensible. Ainsi l'expression la plus simple que l'on puisse imaginer pour représenter F , sera $F = A + m T^n$, où A est le poids

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 191

égal au frottement sous une vitesse insensible ; m est un coefficient constant, & T'' le temps de repos qui a précédé l'expérience, élevé à la puissance μ . Si nous comparons cette formule avec notre dernière expérience, il est clair qu'il faudra faire $A = 502$ livres, & que pour avoir $m T''$, il faudra retrancher la quantité A du frottement trouvé à chaque observation, ce qui donnera la petite Table suivante :

	T	$A + m T''$	$m T''$
I. ^{re} OBSERVATION. 0'	.. $A = 502$ 0
II. ^e 2' 790 288
III. ^e 4' 866 364
IV. ^e 9' 925 423
V. ^e 26' 1036 534
VI. ^e 60' 1186 684
VII. ^e 960' 1535 1033

En prenant pour module l'observation troisième, faite après un repos de 4 minutes, parce que les variations croissent très-rapidement dans un temps plus court, & que quelques secondes d'erreur dans l'observation en produiroient de très-grandes dans les frottemens correspondans, nous aurons :

$$\text{III.^e \& II.^e OBSERVATION. } \mu = \log \left(\frac{288}{364} \right) = \frac{34}{100}$$

$$\text{III.^e \& IV.^e } \frac{19}{100}$$

$$\text{III.^e \& V.^e } \frac{10}{100}$$

$$\text{III.^e \& VI.^e } \frac{6.3}{100}$$

$$\text{III.^e \& VII.^e } \frac{19}{100}$$

Les quatre dernières valeurs de μ sont à peu près égales; la première diffère des autres : mais comme les frottemens croissent rapidement dans les premiers instans de repos, la moindre erreur

192 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

dans les observations a pu produire cette différence. Ainsi, il paroîtroit, d'après notre expérience, que $F = 502 + m T^{\frac{1}{2}}$, le coefficient m sera facile à déterminer dans cette formule, en la comparant avec une des observations. Si l'on prend la troisième qui nous a servi de module pour découvrir la valeur de μ , nous trouverons $m T^{\frac{1}{2}} = 364$ livres, & comme $T = 4'$, l'on aura $m = \frac{364}{(4')^{\frac{1}{2}}}$.

Quoique la quantité μ se trouve ; d'après quatre observations, assez bien représentée par la même quantité, cependant nous ne pouvons regarder notre formule que comme propre à déterminer par approximation le frottement après un repos assez court ; l'on sent en effet que si F pouvoit être exactement exprimée par la formule $A + m T^{\mu}$, quelque petite que fût la quantité μ , lorsque T seroit infini, F deviendroît infini : or c'est ce qui n'est pas, puisque le frottement atteint sa limite, au bout de quelques jours de repos dans les surfaces qui sont enduites, & au bout de quelques secondes dans celles qui ne le sont pas. L'on satisferoit facilement à cette nouvelle condition, en sup-

posant $F = \frac{A + m T^{\mu}}{c + T^{\mu}}$, lorsque $T = 0$ pour lors $F = \frac{A}{c}$, quantité qui doit être égale au frottement lorsque le temps du repos est nul, ou que la vitesse est insensible. Si T est infiniment grand, pour lors $F = m$; ainsi cette dernière quantité m doit être égale à la limite connue du frottement : au moyen de ces deux conditions & de deux expériences, l'on déterminera les quatre constantes qui entrent dans la formule. Il ne nous a pas été possible de nous occuper en détail de cette théorie, parce que nous n'avions pas le temps de rassembler un assez grand nombre de faits pour assurer notre marche : des expériences de ce genre sont longues à faire ; elles demandoient souvent cinq ou six jours pour une seule observation. Pendant tout ce temps, il ne falloit ni ébranler ni faire aucun usage de notre chantier :
d'ailleurs,

d'ailleurs, ces opérations qui, pour être complètes, exigeroient des années de patience & de travail, n'avoient qu'un rapport indirect avec le frottement des machines qui doivent être considérées dans leur état de mouvement. Nous allons terminer ce Chapitre, en rendant compte de quelques expériences destinées à faire connoître le frottement des lames de cuivre sur les lames de fer enduites de suif, que l'on veut ébranler après un certain temps de repos.

Du frottement des lames de cuivre sur les lames de fer enduites de suif neuf.

33. L'on a attaché & fixé, sous un traîneau de 15 pouces de longueur, les deux règles de cuivre de 15 pouces de longueur & de 18 lignes de largeur; l'on a attaché les deux grandes règles de fer sur le madrier dormant: l'on y a mis un enduit de suif d'une demi-ligne à peu près d'épaisseur; la surface de contact étoit de 45 pouces.

FIG. 72

XXXI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 50 lb.
En imprimant au traîneau une vitesse insensible, il continue à se mouvoir sous une traction de 6 lb
Après un repos de 4 & de 30 minutes. 7

XXXII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 450 lb.
En imprimant au traîneau une vitesse insensible, il continue à se mouvoir sous une traction de 42 lb
Après un repos de 4' & de 2 heures. 48

XXXIII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1650 lb.
En imprimant au traîneau une vitesse insensible, il a continué à se mouvoir d'un mouvement lent à raison d'un pouce.
En 10", sous une traction de 150 lb
Après 3' de repos. 158
Après 4 heures & 4 jours. 168

194 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

Observations sur ces trois Expériences.

34. Dans le frottement du fer & du cuivre enduits de suif, l'on observe un accroissement pendant les premiers momens de repos ; mais le temps de cet accroissement est court, & l'accroissement peu considérable. Si nous cherchons à déterminer le frottement lorsque la vitesse est insensible, ou lorsque le temps du repos est nul, nous aurons :

XXXI. ^e EXPÉRIENCE.	$\frac{50}{6}$	8,33.
XXXII. ^e EXP.	$\frac{450}{41}$	10,7.
XXXIII. ^e EXP.	$\frac{1650}{150}$	11,0.

Dans les deux dernières expériences, quoique les pressions soient entre elles dans un rapport plus grand que celui de $3\frac{1}{2}$ à 1, le rapport de la pression au frottement est presque exactement le même. Quant à la différence que l'on trouve entre ce résultat & celui de la trente-unième expérience, où la pression n'est que de 50 livres, elle ne peut être attribuée, comme nous le verrons encore mieux dans la suite, qu'à la cohérence que contractent entr'elles les deux surfaces en contact, qui sont ici de 45 pouces carrés. Cette cohérence qui dépend de la nature du suif & de l'étendue des surfaces, se trouve ici d'une livre & demie, elle est constante dans les trois expériences où la surface ne varie pas ; ainsi, en la retranchant du frottement, l'on trouve :

XXXI. ^e EXPÉRIENCE corrigée.	$\frac{50}{4\frac{1}{2}}$	11,1.
XXXII. ^e EXP.	$\frac{450}{40\frac{1}{2}}$	11,2.
XXXIII. ^e EXP.	$\frac{1650}{148\frac{1}{2}}$	11 .

Le rapport de la pression au frottement est donc exactement le même, & l'étendue des surfaces n'y influe nullement ; c'est ce que nous trouverons confirmé par toutes les expériences

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 195

que nous détaillerons dans la suite , & même par celles sur le frottement des axes , dans lesquelles nous verrons que , quoique les surfaces de contact soient réduites aux plus petites dimensions possibles , le rapport de la pression au frottement y est comme ici de 11 à 1.

35. Si l'on cherche , d'après nos trois dernières expériences , le rapport de la pression au frottement , lorsque ce dernier est parvenu , par le repos , à sa limite , en retranchant une livre & demie pour la cohérence , comme nous avons fait à la fin de l'article précédent , nous aurons pour ce rapport :

XXXI.° EXPÉRIENCE corrigée.....	$\frac{50}{5\frac{1}{2}}$ 9,1.
XXXII.° Exp.....	$\frac{450}{46\frac{1}{2}}$ 9,6.
XXXIII.° Exp.....	$\frac{1560}{166\frac{1}{2}}$ 9,9.

Les différences que l'on trouve ici entre les trois résultats précédens , sont trop peu considérables pour nous empêcher de conclure que , lorsqu'après un temps de repos suffisant , le frottement a atteint sa limite , il est toujours proportionnel à la pression : ces différences d'ailleurs peuvent dépendre de l'imperfection des opérations ; car les forces de traction dans les trente-deux & trente-troisième expériences répétées , ont varié de 5 à 6 livres.

36. Lorsque l'on essuie avec beaucoup de soin les lames de fer & celles de cuivre , & que l'on y met un enduit abondant d'huile d'olive , le frottement paroît atteindre son *maximum* après un instant de repos trop court pour être observé. Il se trouve constamment égal au sixième de la pression : le frottement est moindre dans les mouvemens insensibles , suivant que le suif que l'on a essuyé a pénétré plus ou moins profondément dans les pores du métal.

Lorsqu'au lieu d'huile l'on se sert d'un enduit de vieux oing , le frottement arrive aussi très-rapidement à son *maximum* ; il

est rarement moindre que le septième de la pression ; il augmente en s'approchant du sixième de la pression , à mesure que la consistance du vieux oing diminue.

CHAPITRE II.

Du Frottement des surfaces en mouvement.

37. **D**ANS le Chapitre qui précède , nous avons cherché à déterminer la résistance due aux frottemens , lorsque les surfaces ont été en contact pendant quelque temps , & que l'on fait effort pour les tirer de l'état de repos : nous allons actuellement chercher à déterminer le frottement , lorsque les surfaces se meuvent avec une vitesse quelconque.

Nous nous sommes servis ici du même établissement que nous avons décrit dans le Chapitre précédent. L'on doit se rappeler , *Fig. 1 & 2* , que le madrier dormant , sur lequel glisse le traîneau , est de 8 pieds de longueur ; que sous la poulie *h* , où est suspendu le plateau de balance qui entraîne le traîneau , nous avons creusé un puits pour que ce plateau pût descendre de 7 à 8 pieds de hauteur. Nous avions d'abord voulu , pour augmenter la course du traîneau , nous servir d'un madrier de 12 pieds de longueur ; mais outre la difficulté d'en trouver un de cette dimension qui n'eût ni nœud ni défaut , nous nous sommes aperçus que le traîneau , chargé de plusieurs milliers , acquéroit , dans une course aussi longue , des vitesses , & produisoit des chocs qui auroient exigé les plus grandes précautions pour la sûreté des Observateurs. L'on verra d'ailleurs , que , dans une course de 6 pieds , notre traîneau a eu presque toujours des vitesses plus grandes que celles de toutes les machines qui sont en usage : nous avons même réduit cette course à 4 pieds dans la plupart de nos opérations.

Voici la manière dont les expériences ont été conduites lors-

que le traîneau étoit placé sur le madrier dormant, & qu'il étoit chargé du poids sous lequel on vouloit l'éprouver; l'on chargeoit successivement le plateau P de différens poids, & l'on ébranloit le traîneau à petits coups de marteau, ou en le pressant par-derrière, au moyen d'un levier qui portoit contre un taquet attaché à l'extrémité a b du madrier dormant. L'on avoit divisé de pouce en pouce, avec beaucoup d'exactitude, le côté du madrier; & l'extrémité du traîneau, dans son mouvement; tenoit lieu d'index, & mesuroit les espaces parcourus: la durée des mouvemens s'observoit au moyen d'un pendule qui battoit les demi-secondes. Les Ouvriers que j'employois furent bientôt stylés, l'un à compter les vibrations du pendule, l'autre à annoncer par un cri le passage du traîneau à chaque division, tandis que j'écrivois la correspondance des deux mesures.

SECTION PREMIÈRE.

Du frottement des surfaces en mouvement, glissant l'une sur l'autre sans aucun enduit.

Frottement du bois de chêne.

38. **L**E traîneau de bois de chêne dont je me suis servi dans les trois expériences suivantes, avoit 3 pieds de longueur; on l'avoit fait glisser une vingtaine de fois sur le madrier dormant, sous une pression de 10 quintaux, pour augmenter le poli du bois; la surface de contact étoit de 3 pieds carrés, ou de 432 pouces.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 74 lb.

PREMIER ESSAI. Le traîneau est mené d'un mouvement lent mais incertain, s'accélégrant & s'arrêtant quelquefois sous une traction de 12 lb

198 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

II.^e ESSAI. Avec une traction de 14 livres, il a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{7}{2}$ " , les deux derniers en $\frac{4}{1}$ " .

II.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 874 lb.

I.^{er} ESSAI. Sous une traction de 94 livres, le traîneau ébranlé prend un mouvement lent & incertain ; l'on a eu une fois les deux premiers pieds en $\frac{11}{2}$ " , les deux autres en $\frac{12}{1}$ " .

II.^e ESSAI. Sous une traction de 105 livres, les deux premiers pieds en $\frac{6}{1}$ " , les deux suivans en $\frac{3}{1}$ " .

III.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 2474 lb.

I.^{er} ESSAI. Le mouvement commence en ébranlant le traîneau avec une traction de 250 livres ; mais il est lent & incertain.

II.^e ESSAI. Avec une traction de 270 livres, les deux premiers pieds en $\frac{4}{1}$ " , les deux autres en $\frac{4}{1}$ " .

Continuation des mêmes Expériences pour une surface de contact de 36 pouces.

39. Dans les trois expériences qui vont suivre, l'on a cherché à réduire les surfaces de contact à de plus petites dimensions que dans les précédentes : l'on s'est servi d'un traîneau de 15 pouces de longueur, sous lequel l'on a cloué deux règles de 15 lignes de large, arrondies aux extrémités pour y placer les clous. La surface de contact étoit de 36 pouces carrés.

IV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 lb.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau a été mené par une traction de 5 livres ;

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 199

d'un mouvement lent, mais à peu près uniforme. L'on a observé la marche du traîneau pendant 2', à raison de 6 pouces en 25".

- II.^e ESSAI. Il y a eu des variétés dans le mouvement sous tous les degrés de traction au dessous de 9 livres; mais avec une traction de 9 livres, le traîneau a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{1}{2}$ ", les deux suivans en $\frac{1}{2}$ ".

V.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 447 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 45 livres, si on imprime une vitesse d'un pied par seconde au traîneau, il continue à se mouvoir, & même s'accélère; mais sous une moindre vitesse il s'arrête, ébranle; il ne commence à se mouvoir qu'avec une traction de 50 livres.
- II.^e ESSAI. Seulement ébranlé avec 54 livres de traction, il parcourt les deux premiers pieds en $\frac{6}{5}$ ", les deux autres en $\frac{1}{2}$ ".

VI.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1647 lb.

- I.^{er} ESSAI. Ebranlé sous une traction de 166 livres, les deux premiers pieds en $\frac{11}{2}$ ", les deux autres en $\frac{1}{2}$ ".
- II.^e ESSAI. Avec une traction de 172 livres, 2 pieds en $\frac{2}{3}$ ", 2 pieds en $\frac{4}{5}$ ".

Continuation des mêmes Expériences; les surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions possibles.

40. L'on a voulu, dans les expériences qui vont suivre; déterminer le frottement pour les surfaces réduites aux plus petites dimensions possibles; l'on a en conséquence taillé en angle un peu arrondi le dessous des règles qui portoient le traîneau dans l'article précédent; en sorte que la surface de contact

se trouvoit réduite à un angle qui s'applatissoit un peu sous les pressions.

VII.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 4 livres & demie, les deux premiers pieds ont été parcourus en $\frac{11}{2}$ " , les deux autres en $\frac{6}{1}$ ".
 II.^e ESSAI. Avec une traction de 6 livres & demie, les deux premiers pieds ont été parcourus en $\frac{1}{1}$ " , les deux autres en $\frac{1}{1}$ ".

VIII.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 447 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une force de traction de 36 livres, si l'on donne au traîneau un mouvement primitif de 5 ou 6 pouces par seconde, il continue à se mouvoir, & même paroît s'accélérer; si on lui donne une vitesse moindre, il s'arrête.
 II.^e ESSAI. Avec une traction de 41 livres & un simple ébranlement, le traîneau parcourt les deux premiers pieds en $\frac{2}{1}$ " ; les deux suivans en $\frac{1}{1}$ ".

IX.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 847 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 60 livres, le traîneau continue à se mouvoir; si on lui donne une vitesse primitive de 7 à 8 pouces par seconde, il s'arrête sous de moindres vitesses.
 II.^e ESSAI. Si on ne fait qu'ébranler ou que donner une vitesse insensible au traîneau, il parcourt avec une traction de 68 livres, les deux premiers pieds en $\frac{2}{1}$ " , les deux autres en $\frac{1}{1}$ ".

Observations sur ces Expériences.

41. Dans les neuf expériences qui précèdent, après avoir ébranlé ou seulement imprimé une vitesse insensible au traîneau, l'on a toujours eu soin d'observer le mouvement pendant une course de 4 pieds de longueur divisée en deux parties égales de

de 2 pieds chacune : dans ce mouvement , il a paru qu'en général les deux premiers pieds ont été parcourus dans un temps un peu plus que double des deux derniers. Or, lorsqu'un corps est mis en mouvement par une puissance constante , & que le mouvement est uniformément accéléré , deux espaces égaux sont consécutivement parcourus dans des temps qui sont entre eux à peu près comme 100 , 42 ; ainsi notre traîneau a parcouru sa course de 4 pieds d'un mouvement à peu près uniformément accéléré ; ainsi, comme il étoit mené par un poids constant , il falloit que la force retardatrice du frottement fût aussi une quantité constante : conséquemment elle est à peu près la même sous tous les degrés de vitesse.

42. Il y a cependant deux remarques à faire : lorsque les surfaces sont très-étendues relativement aux pressions , pour-lors le frottement paroît augmenter avec les vitesses. Mais lorsque les surfaces sont très-petites relativement aux pressions , le frottement diminue à mesure que les vitesses augmentent ; c'est ainsi que dans la dernière expérience , il falloit une moindre force de traction pour continuer à faire mouvoir le traîneau , lorsqu'en le poussant on lui avoit imprimé une vitesse de 7 à 8 pouces par seconde , que lorsqu'on s'étoit contenté de l'ébranler ; mais comme le poids que l'on trouve pour vaincre le frottement , lorsque le traîneau a déjà une vitesse de 7 pouces par seconde , diffère très-peu de celui qui est nécessaire pour lui faire continuer son mouvement , lorsqu'on ne fait que l'ébranler , il paroît que , dans tous les cas de pratique , l'on peut regarder le frottement comme étant indépendant du degré de vitesse. Pour confirmer cette remarque , nous allons calculer le frottement dans le traîneau en mouvement , d'après le deuxième essai de chacune des expériences qui précède , en regardant le frottement comme une quantité constante.

43. Soit la force qui tire le traîneau , ou , ce qui revient au même , le poids dans le plateau de la balance , le plateau compris. A.

Soit la résistance due au frottement. F.

202 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

Le temps observé pendant que le traîneau parcourt les quatre pieds. T.

La force de la gravité. $g = \frac{32 \text{ pieds.}}{17}$

Les poids du traîneau & du plateau de balance réunis. M.

Puisque la force de traction est constante, si l'on suppose le frottement indépendant de la vitesse, nous aurons $A - F = \frac{2.4 \text{ pieds } M}{30. T^2}$.

Il faut, dans l'usage de cette formule, ajouter à la quantité M un poids de 7 livres, pour représenter la partie de la résistance due à l'accélération du mouvement de rotation de la poulie, qui a 12 pouces de diamètre, & qui pèse 14 livres. En comparant cette formule avec le deuxième essai de chacune de nos expériences, nous trouverons, en négligeant les fractions de livres:

SURFACE DE CONTACT, 3 pieds.	I. ^{re} EXPÉRIENCE, II. ^e ESSAI. $A - F = 1 \text{ lb}$ d'où	Pression. Frottement.	$\frac{74}{13} = 5,7.$
	II. ^e EXP.....	13	$\frac{874}{92} \dots 9,50.$
	III. ^e EXP.....	17	$\frac{2474}{253} \dots 9,77.$
SURFACE DE CONTACT, 36 pouces.	IV. ^e EXP.....	4	$\frac{47}{5} \dots 9,4.$
	V. ^e EXP.....	7	$\frac{447}{49} \dots 9,1.$
	VI. ^e EXP.....	12	$\frac{1647}{160} \dots 10,3.$
SURFACE DE CONTACT, ind. ^e .	VII. ^e EXP.....	2	$\frac{47}{4\frac{1}{2}} \dots 10,4.$
	VIII. ^e EXP.....	5	$\frac{447}{36} \dots 12,4.$
	IX. ^e EXP.....	10	$\frac{847}{58} \dots 14,6.$

Pour pouvoir présenter sous le même point de vue les six pre-

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 203

mières expériences, il faut réduire les surfaces comprimées à une surface moyenne d'un pied carré, dont chaque point éprouveroit la même compression qu'il éprouve dans les expériences; ainsi, comme dans les trois premières la surface de contact est de 3 pieds carré, chaque pied n'éprouve que le tiers de la pression: dans les trois expériences suivantes, la surface de contact est de 36 pouces carrés ou d'un quart de pied; ainsi un pied carré, dont chaque pouce ou chaque partie égale seroit comprimé comme dans ces expériences, devroit être chargé d'un poids quadruple.

Frottement d'une surface d'un pied carré, chargé des pressions suivantes.

I. ^{re} EXPÉRIENCE. II. ^e ESSAI. Pression.	25 lb	Pression. Frottement.	5.7
IV. ^e EXP.	188	9.4.
II. ^e EXP.	291	9.5.
III. ^e EXP.	825	9.4.
V. ^o EXP.	1788	9.2.
VI. ^e EXP.	6588	10.4.

44. Les tables qui précèdent nous présentent plusieurs remarques qui doivent nous diriger dans l'évaluation du frottement du chêne glissant sur lui-même.

Première Remarque. Si nous comparons le frottement calculé d'après le deuxième essai de chaque expérience, nous trouverons qu'à 2 ou 3 livres près, il est le même que celui que nous avons eu dans le premier essai, en imprimant une vitesse insensible au traîneau. Dans le deuxième essai, le traîneau a souvent parcouru sa course de 4 pieds en 4 ou 5 secondes, mouvement plus rapide que celui des points de contact de toutes les machines en usage: ainsi, puisque le frottement calculé d'après ce degré de mouvement, se trouve le même que celui qui a été observé lorsque la vitesse étoit insensible; puisque d'ailleurs nous avons observé que le traîneau se meut d'un mouve-

ment uniformément accéléré, nous pouvons conclure que la vitesse n'influe point sur le frottement, & qu'il est, dans tous les cas, une quantité constante.

Deuxième Remarque. Si l'on examine la table qui précède, l'on trouvera que, depuis 188 jusqu'à 1788 livres de pression sur un pied carré, le frottement se trouve constamment un peu plus du neuvième de la pression, quoique les pressions soient très-différentes : si l'on compare même les quatrième & sixième expériences, l'on ne trouvera qu'un dixième de différence pour les nombres qui expriment, dans ces deux expériences, le rapport de la pression au frottement ; quoique les pressions soient entre elles comme 35 est à 1. Ainsi, toutes les fois que, dans la pratique, un pied carré de chêne éprouvera une pression depuis deux quintaux jusqu'à quatre ou cinq milliers, l'on pourra prendre $9\frac{1}{2}$ à 1 pour le rapport de la pression au frottement.

Troisième Remarque. Lorsque la pression n'est que de 25 livres pour un pied carré, pour lors la pression est au frottement comme 5,7 est à 1, & la vitesse croissant, le frottement augmente. Ces deux variétés ne peuvent venir que d'une cause étrangère au frottement, & dépendante de l'étendue des surfaces : les surfaces, par leur rapprochement, ou peuvent contracter une cohérence entre elles, ou, ce qui est plus probable, elles sont couvertes d'un duvet qui se pénètre avec la plus grande facilité, mais qu'il faut plier ensuite dans le mouvement des surfaces : la résistance produite par ce duvet est indépendante des cavités & des pointes solides qui s'engrènent mutuellement, & qui occasionnent les frottemens proportionnels aux pressions. Il y a donc une résistance, dans le frottement des surfaces, indépendante du degré de pression, & proportionnelle à l'étendue du duvet ou à l'étendue des surfaces : si c'est-là en effet ce qui augmente la loi du frottement sous de petites pressions, il doit arriver que la vitesse augmentant, le frottement doit aussi augmenter, puisque, sous une grande vitesse, l'on pliera un plus grand nombre de ces

parties : or, c'est ce que l'expérience confirme; il sera très-facile de trouver pour combien l'étendue des surfaces entre dans les frottemens. L'expérience première donne, pour une surface de 3 pieds carrés, pressée de 74 livres, un frottement de 13 livres; or, si le frottement avoit été le $9^{\circ} \frac{1}{2}$ de la pression, comme dans les expériences qui suivent, nous aurions dû trouver à peu près 8 livres au lieu de 13 livres : ainsi les cinq livres de différence sont dues à l'étendue des surfaces; & la résistance qui vient, soit de la cohérence des surfaces, soit, ce qui est plus probable, d'un petit duvet qui les couvre, est une quantité indépendante des pressions, & égale à 1 livre $\frac{1}{2}$ par pied carré : cette petite quantité constante qui augmente le frottement dans la première expérience, n'est pas sensible dans les autres.

Quatrième Remarque. (a) Lorsque les surfaces de contact sont réduites, comme dans les expériences 7, 8 & 9, aux plus petites dimensions possibles, & que le traîneau ne porte que par deux angles comprimés sur le madrier dormant, l'on trouve pour lors que le frottement diminue relativement aux pressions à mesure que l'on augmente les pressions : l'on trouve aussi que le frottement diminue à mesure que l'on augmente les vitesses : voici, ce me semble, l'explication de ce phénomène. Tant que les cavités de la surface du bois sont assez grandes pour recevoir librement les pointes dont la surface correspondante est hérissée, le rapport de la pression au frottement est une quantité constante qui se mesure par l'inclinaison mutuelle des parties qui n'ont pas encore changé de figure; c'est le cas de nos cinq premières expériences. Mais dès que les pressions deviennent énormes, les

(a) Lorsque nous disons que les surfaces de contact sont réduites aux plus petites dimensions, il ne faut pas les croire nulles. Dans les bois qui sont très-compressibles, les surfaces de contact s'étendent proportionnellement à une loi des pressions. En mesurant l'empreinte laissée par le mouvement du traîneau sur le madrier dormant, nous l'avons trouvée, pour une pression de 2000 livres, de $5 \frac{1}{2}$ lignes de largeur; ce qui donne, pour la longueur du traîneau, près de 12 pouces carrés de surface de contact. Nous l'avons trouvée de 3 lignes pour une pression de 500 livres : en général, il nous a paru que ces surfaces étoient comme la racine carrée des pressions.

206 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

surfaces se dénaturent , les cavités diminuent , les pointes deviennent plus obtuses , & ne pénètrent plus que difficilement dans les cavités : l'inclinaison des parties changeant à mesure que l'on augmente les pressions , & le diamètre des cavités devenant moindre que celui des pointes , il doit en arriver une diminution de frottement relativement à l'augmentation de pression & à l'augmentation de vitesse. Toute cette théorie sera développée plus en détail à la fin de cette première Partie , lorsque nous chercherons à déterminer la cause des variétés que l'on éprouve dans les différens genres de frottemens.

Du frottement des bois de chêne glissant à sec , & le fil de bois se recoupant à angle droit.

45. Au lieu d'attacher , comme dans les expériences précédentes , deux règles de chêne de 18 lignes de largeur suivant la longueur du traîneau , on les attache en travers aux extrémités de ce traîneau : le recoupement de chaque règle avec le madrier dormant étoit d'un pied de longueur , & la surface de contact se trouvoit de 36 pouces carrés.

Surface de contact de 36 pouces.

X.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris de 47 lb.

I.^{re} ESSAI. Le traîneau tiré par un poids de 5 livres , a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{3}{4}$ " , les deux autres en $\frac{1}{4}$ ".

XI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris de 147 lb.

I.^{re} ESSAI. Tiré par un poids de 15 livres , le traîneau a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{2}{3}$ " , les deux autres en $\frac{1}{3}$ ".

XII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris de 447 lb.

I.^{re} ESSAI. Le traîneau tiré par un poids de 51 livres , a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{4}{5}$ " , les autres en $\frac{1}{5}$ ".

XIII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 847 lb.

I.^{er} ESSAI. Tiré par un poids de 97 livres, les deux premiers pieds ont été parcourus en $\frac{7}{2}$ " , les deux derniers en $\frac{1}{2}$ ".

Continuation des mêmes Expériences pour une surface de contact nulle.

46. L'on a taillé en coin, en arrondissant un peu l'angle, le dessous des deux règles fixées au traîneau dans les quatre dernières expériences ; en sorte que la surface de contact se trouvoit réduite à des angles arrondis.

XIV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 lb.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau tiré par un poids de 5 livres, les deux premiers pieds en $\frac{2}{1}$ " , les deux autres en $\frac{1}{2}$ ".

XV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 447 lb.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau mené par une traction de 48 livres ; deux pieds en $\frac{22}{2}$ " , les deux derniers pieds en $\frac{10}{2}$ ".

II.^e ESSAI. Mené par une traction de 58 livres, deux pieds en $\frac{5}{2}$ " , les deux suivans en $\frac{3}{2}$ ".

XVI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1647 lb.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau mené par 160 livres, les deux premiers pieds en $\frac{20}{2}$ " , les deux suivans en $\frac{14}{2}$ ".

II.^e ESSAI. Mené par 172 livres, deux pieds en $\frac{1}{2}$ " , les deux suivans en $\frac{1}{2}$ ".

Observations sur ces Expériences.

46. Les résultats de ces six expériences sont analogues à ceux que nous avons trouvés, en déterminant le frottement du chêne glissant suivant son fil de bois : les deux premiers pieds de la course du traîneau sont encore parcourus ici dans un temps à peu près double des deux derniers ; conséquemment, puisque la force qui accélère le traîneau est une quantité constante, la force retardatrice du frottement sera aussi une quantité constante, & le plus ou moins de vitesse n'influera pas sur cette force. Si nous comparons le deuxième essai de chaque expérience, avec la formule $A - F = \frac{8}{30} \cdot \frac{M}{T^2}$ que nous avons expliquée dans les articles qui précèdent, nous pourrons former la Table suivante.

TABLE du frottement calculé d'après le deuxième essai de chaque Expérience.

SURFACE DE CONTACT de 36 pouces.	X. ^e	EXPÉRIENCE.	Frottement calculé.	4 lb $\frac{1}{2}$	Pression. Frottement.	$\frac{47}{4\frac{1}{2}} =$	10,4.
	XI. ^e	EXP.....	14	$\frac{147}{14}$...	10,5.
	XII. ^e	EXP.....	46	$\frac{447}{46}$...	9,9.
	XIII. ^e	EXP.....	87	$\frac{847}{87}$...	9,8.
	XIV. ^e	EXP.....	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{4\frac{1}{2}}$	10,4.
SURFACE de Dimension linéaire.	XV. ^e	EXP.....	47	$\frac{447}{47}$...	9,5.
	XVI. ^e	EXP.....	161	$\frac{1647}{161}$...	10,2.

47. Dans la Table qui précède, les quatre premières expériences ont été exécutées avec des surfaces de 36 pouces carrés. Dans les trois suivantes, le traîneau portoit sur deux angle

angles arrondis , & la surface de contact étoit réduite aux plus petites dimensions possibles : les pressions ont varié , dans ces différentes expériences , à peu près comme 35 à 1. Malgré cette différence de pression , l'on a toujours trouvé , pour le module qui mesure le rapport de la pression au frottement , une quantité constante égale moyennement à 10. Ce module ne diffère que très-peu de $9, \frac{4}{10}$ que nous avons trouvé pour le rapport de la pression au frottement , lorsque le chêne glissoit suivant son fil de bois , & que les surfaces de contact n'étoient point dénaturées par des pressions énormes.

48. Mais il y a ici deux remarques bien intéressantes à faire , qui distinguent parfaitement le frottement des bois glissant dans le sens de leur fil , d'avec ce frottement , lorsque , dans le mouvement du traîneau , le fil de bois est posé à angle droit. Nous avons vu , article 44 , que le rapport de la pression au frottement étoit une quantité constante , lorsque le bois glissoit suivant son fil , tant que les pressions n'étoient point énormes relativement à l'étendue des surfaces de contact ; mais nous avons trouvé en même temps que lorsque la surface de contact étoit réduite à un angle arrondi , non seulement le frottement diminuoit sensiblement relativement aux pressions , mais qu'il diminuoit aussi très-sensiblement en augmentant les vitesses. Ces deux effets n'ont pas lieu lorsque les bois glissent l'un sur l'autre , le fil de bois se recroisant à angle droit , quoique la surface de contact soit réduite à des dimensions angulaires. Les sept expériences qui précèdent , nous montrent clairement que , quelque différence qu'il y eût entre les pressions & entre l'étendue des surfaces , le nombre qui mesure le rapport de la pression au frottement a toujours resté une quantité constante ; d'un autre côté , j'ai constamment éprouvé , dans les trois dernières expériences où le traîneau portoit sur deux angles , que quelque vitesse primitive qu'on lui imprimât , si le poids qui le tire n'étoit pas égal à celui qui étoit nécessaire pour lui donner un mouvement continu lorsqu'on lui imprimoit une vitesse insensible , cette vitesse primitive diminuoit rapidement , & le traîneau s'ar-

rêtoit : cette différence entre ces deux espèces de frottement qui , au premier coup-d'œil , peut paroître embarrassante , s'explique cependant très-facilement. Lorsque les règles taillées en coin glissent selon le fil du bois , chaque point du madrier dormant , saisi par l'extrémité des règles , reste comprimé ensuite tout le temps que le traîneau emploie à parcourir sa longueur : comme le traîneau a 15 pouces de longueur , si le mouvement est , par exemple , de 15 pouces en 4 secondes , chaque point du madrier sera comprimé pendant 4 secondes. Ainsi , quoique les inégalités des surfaces , à cause de leur cohérence mutuelle , opposent une certaine résistance au changement de figure que leur fait prendre la compression , ce temps de 4 secondes est suffisant pour dénaturer & condenser en partie ces surfaces ; par conséquent , lorsque le traîneau , soutenu sur des angles arrondis , glissera selon le fil du bois , le frottement sera proportionnellement moindre sous les grandes que sous les petites pressions : mais lorsque les règles taillées en coin sont posées , *Fig. 5* , par le travers du traîneau , pour lors le traîneau étant en mouvement , chaque point du madrier dormant ne reste comprimé qu'un instant , qui est celui du passage de l'angle. Cet instant n'est pas assez long pour fléchir sensiblement les inégalités des surfaces ; le frottement doit donc se trouver le même ici que lorsque les surfaces ont une étendue finie , puisque , dans l'un & l'autre cas , les inégalités ne changeant de figure que d'une quantité insensible , elles doivent se pénétrer librement.

Nous allons actuellement passer aux frottemens de quelques autres espèces de bois , pour les comparer avec le chêne.

*Des frottemens de différentes espèces de bois glissant
suivant le fil de bois.*

49. Nous ne répéterons pas ici des détails où nous sommes déjà entrés pour déterminer le frottement du chêne sur lui-même : dans les expériences qui vont suivre , la surface de contact étoit de 48 pouces.

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 211

Chêne & sapin.

XVII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 lb.
Ebranlé, ne commence à se mouvoir d'un mouvement lent
que sous une traction de 7 lb $\frac{1}{2}$

XVIII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 447 lb.
Ebranlé, ne commence à se mouvoir que sous une traction
de 72 lb

XIX.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 847 lb.
Ebranlé, n'a commencé à se mouvoir que sous une traction
de 130 lb

OBSERVATIONS.

50. Pour peu que l'on augmente les tractions rapportées dans les expériences qui précèdent, le traîneau prend un mouvement uniformément accéléré, dû à l'augmentation de traction; ainsi le frottement est constant, & ne dépend point de la vitesse. Si, d'après les trois expériences qui précèdent, nous cherchons le rapport de la pression au frottement, nous trouverons :

XVII. ^e Exp.	Pression. 47	Frottement. 7 lb $\frac{1}{2}$	Rapport de la pression au frottement.	6,3.
XVIII. ^e Exp.	447	72	6,2.
XIX. ^e Exp.	847	130	6,5.

Le rapport donné, dans ces trois expériences, de la pression au frottement, se trouvant constamment le même, nous en

D d ij

212 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

tirerons des conséquences analogues à celles des articles qui précèdent.

51. Par beaucoup d'expériences du même genre, qu'il est inutile de détailler, nous avons trouvé le rapport de la pression au frottement :

Pour le sapin contre sapin. 6 à 1.

Pour l'orme contre l'orme. 10 à 1.

L'on a fait une remarque en faisant glisser le bois d'orme sur lui-même : c'est que ce bois qui paroît au tact très-velouré, donne, sous les petites pressions, un frottement qui augmente sensiblement avec les vitesses; ainsi, en soumettant à l'expérience une surface de 48 pouces carrés, l'on trouve qu'avec une pression de 47 livres, une traction de 5 livres produit une vitesse constamment uniforme d'un pied en 25"; qu'avec 6 livres de traction, la vitesse devenoit uniforme d'un pied en 15"; mais avec une traction de 9 livres, les espaces parcourus paroissent s'accélérer uniformément, les deux premiers pieds en $\frac{2}{3}$ ", les deux autres en $\frac{1}{3}$ " : sous une pression de 1647 livres, l'on ne peut produire que rarement des petites vitesses uniformes, & le rapport de la pression au frottement est constamment sous tous les degrés de vitesse, comme 10 à 1. La nature de l'orme, qui paroît au toucher très-velouté, lui fait produire ici avec une surface de 48 pouces de contact un effet qui n'est sensible, dans le frottement des bois de chêne, qu'avec des surfaces de plusieurs pieds carrés.

Du frottement des bois & des métaux.

52. Dans les expériences qui précèdent, nous venons de voir que le rapport de la pression au frottement étoit toujours à peu près une quantité constante, & que le plus ou moins de vitesse ne l'augmentoit ni ne le diminuoit. La nature paroît ici suivre une autre marche, & le frottement augmente avec la vitesse de la manière la plus sensible.

Frottement du fer & du chêne.

53. Sous le traîneau de 15 pouces de longueur, l'on a placé; *Fig. 6*, deux règles de fer de 18 lignes de largeur, & de 15 pouces de longueur, faïssant le traîneau à leurs extrémités par des retours d'équerre. Tous les angles & arêtes ont été arrondis pour qu'elles n'écorchassent point les bois : l'on a fait ensuite glisser le traîneau armé des deux règles de fer le long du madrier dormant, & l'on a remarqué les temps successifs de sa marche; mais comme l'on s'est apperçu tout de suite que, soit que le traîneau glissât naturellement, soit qu'on lui imprimât une grande vitesse, après un ou deux pieds de marche, il prenoit une vitesse uniforme, l'on s'est contenté d'observer le mouvement lorsqu'il a été réduit à l'uniformité : la surface de contact est de 45 pouces.

XX.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 53 lb.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau ne commence à se mouvoir que sous une traction de 4 lb $\frac{1}{2}$, & il prend une vitesse uniforme d'un pied en 264".

II.^e ESSAI. Avec une traction de 6 lb $\frac{1}{2}$, il parcourt uniformément un pied en $\frac{6}{5}$ ".

III.^e ESSAI. Traction, 9 lb, il parcourt uniformément un pied en $\frac{3}{4}$ ".

XXI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 453 lb.

I. ^{er} ESSAI.	35 lb de traction, il parcourt un pied d'un mouvement uniforme en	$\frac{264}{2}$ "
II. ^e ESSAI.	44	$\frac{24}{2}$ "
III. ^e ESSAI.	53	$\frac{13}{2}$ "
IV. ^e ESSAI.	65	$\frac{5}{2}$ "
V. ^e ESSAI.	78	$\frac{x}{2}$ "

XXII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 853 lb.

Un pied parcouru uniformément.

I. ^{er} ESSAI. Traction.....	67 lb	dans un temps lent & incertain.	
II. ^e ESSAI.....	80	$\frac{80''}{2}$
III. ^e ESSAI.....	105	$\frac{120}{2}$
IV. ^e ESSAI.....	150	$\frac{5}{2}$
V. ^e ESSAI.....	155	$\frac{2}{2}$

XXIII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1653 lb.

Un pied parcouru uniformément.

I. ^{er} ESSAI. Force de traction.	125 lb	dans un temps lent & incertain.	
II. ^e ESSAI.....	135	$1320''$
III. ^e ESSAI.....	160	$\frac{148}{2}$
IV. ^e ESSAI.....	185	$\frac{44}{2}$
V. ^e ESSAI.....	210	$\frac{18}{2}$
VI. ^e ESSAI.....	235	$\frac{5}{2}$
VII. ^e ESSAI.....	260	$\frac{2}{2}$

Continuation des mêmes Expériences.

54. L'on a voulu voir si, en mettant le fil de bois en travers, & réduisant aux plus petites dimensions possibles les surfaces de contact, l'on trouveroit le même résultat que dans l'expérience qui précède. L'on a ôté les deux règles de fer de dessus le traîneau, l'on y a substitué deux règles de chêne taillées en coin & attachées aux extrémités du traîneau, comme à la *Fig. 5*, le fil de bois se recoupant à angle droit : l'on a ensuite attaché sur le madrier dormant deux grandes règles de fer dressées & polies avec le plus grand soin; alors l'on a fait glisser le traîneau,

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 215

qui ne portoit sur les règles de fer que par les angles arrondis des règles de chêne.

XXIV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau est chargé, tout compris, de 1653 lb.

Un pied parcouru uniformément.

I. ^{re} ESSAI. Force de traction. 115 lb	dans	476 "
II. ^e ESSAI.....	135	$\frac{440}{2}$
III. ^e ESSAI.....	160	$\frac{260}{2}$
IV. ^e ESSAI.....	185	$\frac{96}{2}$
V. ^e ESSAI.....	210	$\frac{30}{2}$
VI. ^e ESSAI.....	235	$\frac{13}{2}$
VII. ^e ESSAI.....	260	$\frac{5}{2}$

Frottement du cuivre glissant sans enduit sur le bois de chêne, suivant le fil du bois.

55. L'on a fixé, sous le madrier de 15 pouces de longueur, deux règles de cuivre des mêmes dimensions que les règles de fer (Fig. 6.) des expériences 20, 21. L'on a fait ensuite glisser le traîneau sur le madrier dormant de la même manière que dans ces expériences : la surface de contact étoit de 45 pouces.

XXV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau est chargé, tout compris, de 50 lb.

Un pied parcouru uniformément.

I. ^{re} ESSAI. Force de traction. 2 lb $\frac{3}{4}$	dans	288 "
II. ^e ESSAI.....	3 $\frac{1}{2}$	88
III. ^e ESSAI.....	4 $\frac{1}{2}$	28
IV. ^e ESSAI.....	6 $\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
V. ^e ESSAI.....	9 $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}$

216 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

XXVI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 450 lb.

Un pied parcouru uniformément.

I. ^{er} ESSAI. Force de traction.	23 lb	dans	1440 "
II. ^e ESSAI.....	28	360
III. ^e ESSAI.....	33	200
IV. ^e ESSAI.....	43	$\frac{80}{2}$
V. ^e ESSAI.....	53	$\frac{16}{2}$
VI. ^e ESSAI.....	65	$\frac{3}{2}$
VII. ^e ESSAI.....	78	$\frac{5}{6}$

XXVII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 850 lb.

Un pied parcouru uniformément.

I. ^{er} ESSAI. Force de traction.	42 lb	dans un temps lent & incertain.	
II. ^e ESSAI.....	67	180 "
III. ^e ESSAI.....	80	$\frac{128}{2}$
IV. ^e ESSAI.....	105	$\frac{24}{2}$
V. ^e ESSAI.....	130	$\frac{6}{2}$
VI. ^e ESSAI.....	155	$\frac{5}{6}$

OBSERVATIONS.

56. Nous avons à comparer ici les frottemens sous différentes pressions & sous différens degrés de vitesse. Nous allons commencer par les essais où la vitesse étoit insensible : dans les expériences (20, 21, 22 & 23), où les lames de fer glissent à sec, suivant le fil de bois, sur le madrier dormant, la surface de contact étant de quarante-cinq pouces, nous
avons,

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 217

avons, pour les vîtesſes infenſibles, le rapport de la preſſion au frottement :

	Preſſion.	Frottement.	Rapport de la preſſion au frottement avec vîteſſe infenſible.
XX. ^e EXP. I. ^{re} ESSAI.	53 lb	4 lb $\frac{1}{2}$	$\frac{53}{4\frac{1}{2}}$ 11,8.
XXI. ^e EXP. I. ^{re} ESSAI.	453	35	$\frac{453}{35}$ 12,9.
XXII. ^e EXP. I. ^{re} ESSAI.	853	67	$\frac{453}{35}$ 12,7.
XXIII. ^e EXP. I. ^{re} ESSAI.	1653	125	$\frac{1653}{125}$ 13,2.

Le rapport de la preſſion au frottement, donné dans ces quatre expériences, eſt une quantité qui augmente très-peu, malgré les différences conſidérables des preſſions; il paroît donc certain, d'après ces expériences, que, pour le premier degré de vîteſſe, le frottement du bois de chêne & des lames de fer eſt à peu près le treizième de la preſſion.

57. Si l'on cherche actuellement à déterminer le rapport de la preſſion au frottement ſous d'autres degrés de vîteſſe, il faudra comparer entre eux les eſſais qui, avec différentes preſſions, ont donné le même degré de vîteſſe : or l'on voit, dans le dernier eſſai de chaque expérience, que la vîteſſe étoit, à peu de choſe près, d'un pied par ſeconde; ainſi nous pouvons connoître le rapport de la preſſion au frottement, qui répond à une vîteſſe d'un pied par ſeconde.

	Preſſion.	Frottement.	Rapport de la preſſion au frottement avec une vîteſſe d'un pied par ſeconde.
XX. ^e EXP. III. ^e ESSAI.	53 lb	9 lb	$\frac{53}{9}$ 5,9.
XXI. ^e EXP. V. ^e ESSAI.	453	78	$\frac{453}{78}$ 5,8.
XXII. ^e EXP. V. ^e ESSAI.	853	155	$\frac{853}{155}$ 5,5.
XXIII. ^e EXP. VII. ^e ESSAI.	1653	260	$\frac{1653}{260}$ 6,3.

Tome X.

E c

218 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

Le peu de variété qui règne dans les résultats précédens, nous apprend que pour un même degré de vitesse, quelque soit la pression, elle sera toujours dans un rapport constant avec le frottement.

58. Il sembleroit que l'on pourroit conclure de la vingt-troisième expérience comparée avec la vingt-quatrième, que l'étendue des surfaces de contact ni la position du fil de bois n'ont aucune influence sur le frottement. Dans la vingt-troisième expérience, une surface de quarante-cinq pouces carrés est comprimée par un poids de 1653 lb; le frottement se fait suivant le fil de bois. Dans la vingt-quatrième expérience, la charge est de 1650 lb; la surface de contact est nulle, ou au moins est formée par la compression d'un angle arrondi; le fil de bois est placé à angle droit avec la direction de la marche du traîneau; & malgré ces différences, le résultat des deux expériences se trouve à peu près le même: il faut cependant prévenir que cette augmentation de frottement qui, d'après les expériences qui précèdent, suit progressivement l'augmentation de vitesse, n'a lieu pour les petites surfaces de contact comprimées par des poids considérables, que lorsque les bois sortent des mains de l'Ouvrier, & qu'après un frottement de plusieurs heures, la vitesse cesse presque en entier d'influer sur le frottement.

59. Il ne reste, pour compléter la théorie du frottement des métaux glissant sans enduit sur les bois, que de chercher suivant quelles loix les augmentations de traction font croître les vitesses: prenons la vingt-troisième expérience, dans laquelle la pression est de 1653 lb, elle fournit un assez grand nombre d'essais; nous y remarquerons qu'à chaque essai les forces de traction étant augmentées de 25 lb, chaque vitesse est à peu près triple de celle qui la précède. Présentons ici notre expérience de manière à rendre sensible la loi de cette progression.

*Récapitulation de la vingt-troisième expérience pour
déterminer la loi des vitesses.*

	Traction.	Vitesse éprouvée.	Vitesse calculée d'après le troisième Essai.
II. ^e ESSAI.....	135 lb	1320 "	
III. ^e ESSAI.....	160	$\frac{148}{2}$	148 "
IV. ^e ESSAI.....	160 + 25.....	$\frac{44}{2}$	$\frac{493}{2}$
V. ^e ESSAI.....	160 + 2.25.....	$\frac{18}{2}$	$\frac{164}{2}$
VI. ^e ESSAI.....	160 + 3.25.....	$\frac{5}{2}$	$\frac{55}{2}$
VII. ^e ESSAI.....	160 + 4.25.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{18}{2}$

L'on voit par cette table , que depuis le troisième essai jusqu'au septième , les tractions étant augmentées de 25 lb à chaque essai , la vitesse correspondante est toujours à peu près le tiers de la précédente ; c'est ce qui résulte évidemment de la dernière colonne calculée d'après le troisième essai , & comparée avec l'avant dernière colonne qui représente les vitesses observées. Ainsi les tractions croissant suivant une progression arithmétique , les vitesses croissent suivant une progression géométrique.

60. Il sera facile , d'après tout ce que nous venons de dire , de trouver une formule qui exprime , dans ce genre de frottement , la loi des tractions & des vitesses. Voici les données que nous avons pour établir cette formule : dans la vingt-troisième expérience où la pression est de 1653 lb , nous trouvons qu'au dessous de 125 lb de traction , l'on ne peut produire aucun mouvement ; que la vitesse va ensuite en augmentant suivant une progression géométrique , à mesure que les forces de traction augmentent suivant une progression arithmétique , en sorte que 260 lb , ou une augmentation de traction de 135 lb produit une vitesse d'un pied par seconde.

Nous remarquons ensuite , en comparant entre elles les

E e ij

différentes expériences, que l'étendue des surfaces n'influe pas sensiblement sur les résistances que produit le frottement; en sorte que, sous les mêmes pressions & avec les mêmes degrés de vitesse, le frottement est à peu près le même pour les grandes & les petites surfaces.

Ces remarques seroient suffisantes pour établir, à l'aide de quelques expériences, la formule générale qui indiqueroit la marche du traîneau. Mais il faut prévenir, comme nous l'avons déjà fait à la fin de l'article 58, que l'on ne pourra regarder une pareille formule que comme un à peu près qui ne doit déterminer les loix des frottemens relativement à la vitesse, que pendant les premières heures où l'on soumet le traîneau aux expériences; qu'ensuite les frottemens ne croissent plus dans une aussi grande proportion relativement aux vitesses; qu'il arrive même qu'après que le mouvement d'une très-petite surface a été continué pendant long-temps sous de très-grandes pressions, la vitesse cesse en entier d'avoir de l'influence sur le frottement; c'est de quoi nous trouverons plusieurs exemples dans la suite de ce Mémoire.

SECTION DEUXIÈME.

Des surfaces qui glissent l'une sur l'autre, garnies d'un enduit.

61. **L**ES seuls enduits qui puissent convenir pour diminuer le frottement des bois, sont le suif & le vieux oing; l'huile ne peut être employée que dans les métaux: comme les enduits sont des corps mous, ils n'adoucissent le frottement des surfaces que parce qu'ils remplissent les cavités; & qu'interposés entre les surfaces, ils les soutiennent à une certaine distance l'une de l'autre: de là il arrive que, sous les grandes pressions, les enduits les plus mous sont toujours les plus mauvais; que sous les grandes pressions, lorsque les surfaces de contact sont réduites à des angles arrondis, les enduits diminuent très-peu

le frottement du traîneau : l'on remarque encore que lorsque le traîneau , ayant une grande surface de contact , a passé deux ou trois fois sur le même suif , le suif s'applique sur le madrier , pénètre dans ses pores , & ne s'oppose plus qu'imparfaitement à l'engrainage des parties ; en sorte que , dans différens essais répétés sans renouveler les enduits , on trouve une augmentation de frottement très-considérable. Avant de rapporter les expériences que nous avons faites en enduisant les bois à chaque essai , nous devons parler d'une cause qui jette souvent la plus grande incertitude dans les résultats.

Lorsque le madrier & le traîneau sortent des mains de l'Ouvrier , quelque soin que l'on ait pris pour bien unir les surfaces en les polissant avec la varlope & une peau de chien de mer , ou même en les faisant glisser plusieurs fois à sec l'une sur l'autre , l'on trouve qu'en enduisant les surfaces elles donnent d'abord de grandes inégalités dans les frottemens. Ces inégalités sont d'autant plus remarquables , que les surfaces sont plus étendues & la pression moindre : elles augmentent très-sensiblement les frottemens , à proportion que les vitesses sont plus grandes. Ces variétés suivent des loix incertaines , & dont aucune théorie ne peut rendre raison ; mais lorsqu'en enduisant de suif ou de vieux oing , l'on fait glisser le traîneau pendant plusieurs jours consécutifs sous de fortes charges , l'on trouve ensuite que le frottement est presque toujours proportionnel à la pression , & que l'augmentation des vitesses ne l'augmente que d'une manière insensible : voici nos expériences pour déterminer le frottement du bois de chêne enduit de suif.

Frottement du bois de chêne enduit de suif , renouvelé à chaque essai.

62. L'on s'est servi d'un traîneau de 15 pouces de longueur , qui portoit sur le madrier dormant par une surface de contact de 180 pouces carrés : il y avoit déjà huit jours que ce traîneau servoit aux expériences du frottement , & l'on avoit fait , avec des enduits de suif que l'on renouveloit souvent , plus de deux

222 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

cents expériences sous des pressions de plusieurs milliers. Les cinquante premières avoient donné beaucoup de variété ; mais les autres étoient moins incertaines , & le traîneau ainsi que le madrier dormant paroissoient avoir pris tout le poli dont le bois de chêne peut être susceptible ; le traîneau ainsi préparé a été enduit de suif à chaque expérience : la surface de contact étoit de 180 pouces carrés.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , tout compris , de 3250 lb.

I.^{re} ESSAI. Etant ébranlé , le traîneau a commencé à se mouvoir d'un mouvement continu , mais lent & incertain , avec une traction de 118 lb.

II.^e ESSAI. Le traîneau , tiré par un poids de 124 livres , a parcouru successivement 2 pieds en $\frac{11}{2}$ " , & les deux suivans en $\frac{10}{2}$ " .

II.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , tout compris , de 1650 lb.

I.^{re} ESSAI. Ebranlé , le traîneau marche d'un mouvement continu , mais lent & incertain , avec une traction de 64 livres.

II.^e ESSAI. Tiré par 70 livres , a parcouru successivement les deux premiers pieds en $\frac{12}{2}$ " , les deux autres en $\frac{10}{2}$ " .

III.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , tout compris , de 850 lb.

I.^{re} ESSAI. Avec une traction de 36 livres , le traîneau marche d'un mouvement continu , mais lent & incertain.

IV.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , tout compris , de 450 lb.

I.^{re} ESSAI. Le mouvement , sous une traction de 21 livres , a été lent , mais à peu près uniforme à raison d'un pied en $\frac{10}{2}$ " .

V.^{ème} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, tout compris, de 250 lb.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 13 livres & demie, prend une vitesse uniforme d'un pied en 60".

II.^e ESSAI. Avec une traction de 20 livres s'accélère d'abord, puis prend une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{4}{3}$ ".

VI.^{ème} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 50 lb.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 6 livres & demie, prend une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{11}{2}$ ".

II.^e ESSAI. Avec une traction de 13 livres s'accélère rapidement, &, après une marche de 3 pieds, paroît parcourir les deux derniers pieds avec une vitesse uniforme d'un pied par seconde.

O B S E R V A T I O N S.

63. Si nous cherchons d'abord, d'après les six expériences qui précèdent, quel est le rapport de la pression au frottement, lorsque la force de traction est seulement suffisante pour donner au traîneau une vitesse insensible, nous trouverons, d'après le premier essai de chaque expérience :

I. ^{ère} EXPÉRIENCE.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{3250}{118}$ 27,6.
II. ^e EXP.		$\frac{1650}{64}$ 25,8.
III. ^e EXP.		$\frac{850}{36}$ 23,6.
IV. ^e EXP.		$\frac{450}{21}$ 21,5.
V. ^e EXP.		$\frac{250}{13\frac{1}{2}}$ 18,5.
VI. ^e EXP.		$\frac{50}{6\frac{1}{2}}$ 7,7.

Si l'on observe la marche du rapport de la pression au frotte-

224 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

ment dans le tableau qui précède, l'on voit que ce rapport diminue sensiblement d'une expérience à l'autre ; mais que la marche de cette diminution, lente depuis la première expérience jusqu'à la cinquième, devient très-rapide de la cinquième à la sixième ; en sorte que l'on trouve ici une espèce de saut qui paroît dépendre de la cohérence des parties du suif & de l'étendue des surfaces, comme nous l'avons déjà apperçu en faisant glisser sans enduit des grandes surfaces.

Si cette cohérence est la cause qui fait varier le rapport de la pression au frottement, il est évident que la résistance constante qu'elle produit ne peut influer que très-peu sur ce rapport déterminé dans la première expérience : nous pourrions donc regarder le rapport 27,6 à 1, donné par cette expérience, comme celui qui représente le frottement dans toutes les autres, & notamment dans la dernière ; ainsi, puisque nous trouvons que le frottement, plus la cohérence produisent, avec une pression de 50 livres, une résistance de 6 livres & demie, la cohérence est à peu près pour notre surface de 180 pouces, équivalente à 5 livres : ôtons par-tout 5 livres des tractions qui ont été trouvées nécessaires pour produire des vitesses insensibles, & nous aurons pour le rapport de la pression au frottement corrigé de la résistance due à la cohérence :

I. ^{re} EXPÉRIENCE.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{3250}{113}$	28,7.
II. ^e EXP.		$\frac{1650}{59}$	27,9.
III. ^e EXP.		$\frac{850}{31}$	27,4.
IV. ^e EXP.		$\frac{450}{16}$	28,1
V. ^e EXP.		$\frac{250}{8\frac{1}{2}}$	29,4.
VI. ^e EXP.		$\frac{50}{1\frac{1}{2}}$	28,6.

Ce tableau donne à présent, pour les six expériences, le rapport de la pression au frottement presque exactement le même :

même : la différence des résultats est si petite , que , quelques précautions que l'on ait prises dans les expériences , l'on ne peut l'attribuer qu'aux imperfections inévitables des opérations.

64. Dans les trois dernières expériences où les pressions sont peu considérables , l'on apperçoit une augmentation de frottement à mesure que les vîteses augmentent , car en augmentant les forces de traction au delà de celles qui sont nécessaires pour vaincre le frottement dans les vîteses insensibles , l'on produit bientôt une vîtesse uniforme , & non pas une vîtesse uniformément accélérée. L'on retrouve ici la même marche que nous déjà apperçue lorsque nous avons fait glisser des surfaces d'une grande étendue l'une sur l'autre. La cohésion des surfaces nous avoit paru produire une résistance due à la vîtesse ; & absolument indépendante des pressions : la cohésion du suif produit ici le même phénomène d'une manière plus marquée. Pour qu'il ne restât aucun doute , comme j'avois remarqué que le vieux oing avoit une cohésion beaucoup plus considérable que le suif , je fis tout de suite , avec le même traîneau , les expériences qui vont suivre.

L'on a enduit avec une couche abondante de vieux oing le madrier dormant , ainsi que le traîneau des expériences précédentes : la surface de contact étoit toujours de 180 pouces carrés ; en poussant le traîneau , on lui donnoit une vîtesse primitive à peu près d'un pied par seconde : lorsque le traîneau avoit parcouru deux ou trois pieds , cette vîtesse se ralentissoit & devenoit à peu près uniforme , mais plus ou moins grande suivant le degré de traction : à chaque essai l'on renouveloit l'enduit ; l'on a observé seulement les vîteses devenues uniformes.

VII.^{ème} E X P É R I E N C E .

Le traîneau chargé , son poids compris , de 50 lb.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 13 livres , la vîtesse uniforme a été d'un pied en 540^{''}.

II.^e ESSAI. Avec une traction de 16 livres , d'un pied en $\frac{8}{5}$ ^{''}.

III.^e ESSAI. Avec une traction de 22 livres , d'un pied en $\frac{1}{2}$ ^{''}.

VIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 250 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 20 livres, le traîneau marche d'un mouvement extraordinairement lent.
- II.^e ESSAI. Avec une traction de 26 livres, le traîneau a pris une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{2}{3}$ ''.
- III.^e ESSAI. Avec une traction de 32 livres, le traîneau a pris une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{3}{2}$ ''.

IX.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 450 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 34 livres, le traîneau lancé prend une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{2}{3}$ ''.
- II.^e ESSAI. Avec une traction de 40 livres, le traîneau a pris une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{1}{2}$ ''.

Ces trois expériences faites avec le plus grand soin, ont prouvé que le vieux oing adouciſſoit le frottement moins que le ſuiſ; mais elles ont prouvé d'une manière encore plus ſûre, que la réſiſtance produite par l'augmentation des vitelles étoit abſolument indépendante des preſſions, puifque ſous trois degrés de preſſion très-différens, lorsque les tractions étoient telles que le traîneau prenoit une vitesse uniforme d'un pied en $\frac{8}{2}$ '', une augmentation de traction conſtante & égale à 6 livres, donnoit, quelquequ'il fût la preſſion, la même vitesse uniforme d'un pied en $\frac{3}{2}$ '': ainſi la réſiſtance due aux augmentations de vitesse dépend uniquement de la nature des ſurfaces & de la cohérence des enduits, & elle eſt abſolument indépendante de la preſſion : l'on peut, dans la pratique, la négliger lorsque les vitelles ne paſſent pas 4 ou 5 pouces par ſeconde, & que chaque pied carré de ſurface de contact eſt chargé de trois ou quatre milliers : elle peut à peu près être eſtimée de 6 à 7 livres par pied carré, pour les ſurfaces enduites de ſuiſ mues avec des vitelles d'un pied par ſeconde.

65. En suivant la marche de nos six premières expériences, l'on s'imagineroit peut-être qu'en diminuant autant qu'il est possible la surface de contact, & en l'enduisant de suif, l'on trouveroit le rapport de la pression au frottement comme 27 à 1; l'on se tromperoit, lorsque les surfaces de contact sont très-petites, l'enduit n'est pas en état de soutenir la pression qu'éprouve chaque point de contact; le suif pénètre dans l'intérieur des pores du bois, ou est chassé en avant par la partie antérieure du traîneau en mouvement: par-là les deux surfaces se rapprochent presque autant que s'il n'y avoit point d'enduit; j'ai fait glisser plusieurs fois mon traîneau porté sur deux petites règles, de manière que la surface de contact n'étoit que de 30 pouces carrés sous des pressions de 2000 livres. Il ne m'a pas été possible, en ébranlant seulement le traîneau, ou même en lui donnant une vitesse primitive d'un ou deux pouces par seconde, d'avoir le rapport de la pression au frottement plus grand que 16 ou 17 à 1: il est vrai cependant qu'avec une couche épaisse de suif, & en imprimant une vitesse primitive d'un pied par seconde, il arrivoit quelquefois que le traîneau continuoit à se mouvoir d'un mouvement même qui paroissoit s'accélérer sous une traction qui n'étoit que le vingt-septième de la pression. Mais si, par quelque accident, la vitesse diminuoit, ou si même l'on imprimoit au traîneau une vitesse primitive moindre qu'un pied par seconde, il s'arrêtoit tout de suite: l'explication de ce que l'on observe ici est très-facile; comme la longueur du traîneau est peu considérable, l'enduit, qui n'est affaibli que peu à peu par la pression, ne l'est pas en entier lorsque la vitesse est d'un pied par seconde; ainsi il contribue à adoucir le mouvement.

66. Il nous reste encore à déterminer le frottement des bois enduits de graisse, lorsque les surfaces de contact sont réduites aux plus petites dimensions possibles: comme je voulois avoir mes surfaces dans un état permanent sans les enduire à chaque opération, j'ai essuyé la surface de mon madrier dormant; mais d'après toutes les expériences qui précèdent, le suif avoit pénétré dans les pores du bois à plus d'une ligne de profondeur;

228 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

& le madrier essuyé restoit onctueux & luisant : c'est dans cet état ; où se trouvent à peu près les machines qui agissent pendant un certain temps , sans qu'on renouvelle les enduits , que nous avons d'abord cherché à déterminer le frottement des surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions : l'on a placé à l'ordinaire , sous le traîneau , deux règles taillées en coin , & qui ne touchoient le madrier dormant que par leurs angles arrondis ; ces règles étoient placées sur les côtés du traîneau , de manière que , dans sa marche , elles glissoient suivant le fil de bois : l'on a fait parcourir au traîneau plusieurs fois la longueur du madrier dormant , pour donner aux surfaces de contact tout le poli dont elles sont susceptibles : l'on a fait ensuite les expériences qui suivent.

Frottement du bois de chêne enduit de suif, lorsque les surfaces de contact sont nulles.

X.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris , de 50 lb.

I.^{er} ESSAI. Ne commence à marcher d'un mouvement continu qu'avec une traction de 3 livres.

XI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris , de 250 lb.

I.^{er} ESSAI. Ne commence à marcher que sous une traction de 15 livres.

XII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris , de 450 lb.

I.^{er} ESSAI. Ne commence à marcher qu'avec une traction de 28 livres.

XIII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé , son poids compris , de 850 lb.

I.^{er} ESSAI. Marche d'un mouvement continu avec une traction de 50 livres.

XIV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 1650 lb.

I.^{er} ESSAI. Marche d'un mouvement continu en donnant une vitesse primitive d'un pouce par seconde, avec une traction de 100 livres.

Remarques sur ces Expériences.

67. Soit qu'on enduisît de suif le madrier dormant à chaque essai, soit qu'on l'essuyât, & qu'il restât seulement luisant & onctueux, à cause du suif qui, dans toutes les opérations précédentes, avoit pénétré dans les pores du bois, les résultats se sont toujours trouvés les mêmes; en sorte que le plus ou moins de suif ne diminue point le frottement lorsque les surfaces de contact sont nulles : la vitesse paroît aussi très-peu influer dans ce genre de frottement, & le mouvement a été accéléré uniformément dans différens autres essais que j'ai cru inutiles de rapporter ici. Cette accélération étoit toujours due à l'excédent des tractions qui la produisoit sur les tractions nécessaires pour donner un mouvement très-lent : l'on doit cependant remarquer que, dans ces expériences, le traîneau ne part pas sous un simple ébranlement, lorsque les pressions sont très-considérables; mais il faut lui imprimer une vitesse primitive d'un ou deux pouces par seconde, & pour lors il continue à se mouvoir d'une vitesse uniformément accélérée.

Nous allons actuellement déterminer le rapport de la pression au frottement dans les plus petites surfaces de contact possibles, d'après les expériences qui précèdent.

X. ^e EXPÉRIENCE.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$...	$\frac{50}{3}$	16,7.
XI. ^e EXP.	$\frac{250}{15}$	16,6.
XII. ^e EXP.	$\frac{450}{28}$	16,1.
XIII. ^e EXP.	$\frac{850}{50}$	17,0.
XIV. ^e EXP.	$\frac{1650}{100}$	16,5.

230 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

68. Malgré les augmentations de pression qui , dans ces expériences, se trouvent de la dixième à la quatorzième, comme 1 à 33 , l'on trouve toujours le même rapport entre la pression & le frottement; & ce rapport moyen se mesure par celui des nombres $16\frac{1}{2}$ à 1. Ici ce rapport n'a pas été différent sous les grandes & les petites pressions, comme nous l'avions trouvé en faisant glisser sans enduit le traîneau sur le madrier dormant (art. 46); nous en donnerons les raisons dans la dernière Section de ce Chapitre, lorsque nous essaierons de déterminer les causes & la théorie des frottemens.

69. Lorsqu'au lieu de faire glisser, comme dans les quatorze expériences qui précèdent, les règles qui portent le traîneau suivant le fil de bois, nous avons posé ces règles en travers aux deux extrémités du traîneau, & que nous les avons fait glisser, le fil de bois se recoupant à angle droit, nous avons toujours eu, pour des surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions, le même degré de frottement que dans l'article qui précède. Pour une pression de 50 livres, le frottement a été de 3 livres, & pour une pression de 1650 livres, il a été de 100 livres : l'on a même observé qu'un simple ébranlement produisoit toujours, sous tous les degrés de pression, un mouvement continu uniformément accéléré, plus régulier que lorsque le bois glissoit suivant son fil; ce qui vient de ce qu'ici tous les points de contact du madrier dormant changent à chaque instant dans le mouvement, & qu'ils n'ont pas le temps de se dénaturer sous les grandes pressions (a).

70. Le traîneau, portant sur le madrier dormant par une surface de contact de quelques pieds d'étendue, pénétré de suif par des opérations antérieures, restant onctueux après avoir été essuyé, ou même conservant son ancien suif, mais écrasé

(a) Lorsque les bois enduits de suif glissent par le travers du fil de bois, & que les surfaces de contact ont de l'étendue, l'on trouve que le frottement est le même que celui trouvé en pareil cas (art. 62), lorsque le traîneau glissoit suivant son fil de bois.

& appliqué contre le bois par huit ou dix opérations qui ont précédé, se trouve dans les mêmes circonstances des deux articles qui précèdent, & les surfaces de contact se joignent ici immédiatement. Aussi trouve-t-on toujours pour lors le rapport de la pression au frottement sous des pressions même de deux milliers par pied carré, moindre que 16 à 1. Dans une surface de deux pieds carrés, soumise aux expériences depuis deux jours avec un enduit de suif, l'on a trouvé, en essuyant cette surface qui étoit encore très-onctueuse, que le rapport de la pression au frottement étoit comme 13 à 1 : sans essuyer le suif, mais faisant glisser le traîneau dix fois sans le renouveler, l'on a trouvé le rapport de 14 à 1. Ce traîneau, au surplus, n'avoit point encore pris tout-à-fait son poli dans deux jours d'opérations, quoiqu'il eût parcouru plus de cinquante fois une course de cinq pieds sous des pressions de trois & quatre milliers : la résistance due à la cohérence des surfaces étoit, dans cette expérience, de plus de 7 livres par pied carré.

71. Je ne puis trop avertir, avant de terminer les épreuves du frottement des bois glissant avec des enduits, que l'on ne peut absolument compter sur des résultats suivis que lorsque le bois aura pris tout son poli, & que le suif aura pénétré dans ses pores par beaucoup d'opérations préliminaires ; ce n'est qu'après une quantité d'expériences qui nous sont devenues inutiles, que nous nous sommes aperçu de la nécessité de cette précaution (a). Nous nous étendrons davantage sur cet article, lorsqu'à la fin de ce Chapitre nous rassemblerons tous nos résultats, pour tâcher de découvrir les causes du frottement.

(a) En faisant glisser un traîneau neuf sur le madrier dormant enduit une seule fois de suif au commencement des opérations, l'on a trouvé qu'après deux jours de travail, pendant lesquels l'on pouvoit avoir fait quarante expériences en chargeant le traîneau de 5800 livres,

Une traction de 400 lb donnoit un mouvement uniforme d'un pouce en 80''.

Une traction de 525 12.

Une traction de 600 2.

Des métaux glissant sur les bois enduits de suif.

72. Lorsque les métaux glissent sur des bois enduits de matières grasses, le frottement en paroît très-adouci, & l'on produit des vitesses insensibles avec des degrés de traction moins considérables que dans toutes les autres espèces de frottemens : mais pour peu que l'on veuille augmenter les vitesses, l'on retrouve, comme dans la première Section, lorsqu'on a fait glisser sans enduit les métaux sur le bois, que le frottement augmente beaucoup avec la vitesse ; & l'on a, pour le rapport de l'augmentation des vitesses & du degré de traction qui produit cette augmentation, à peu près les mêmes loix que nous avons cherché à déterminer dans le frottement des métaux glissant à sec sur les bois ; mais si l'on ne renouvelle pas les enduits à chaque expérience, ils se coagulent, changent de nature, & le frottement augmente successivement : l'on trouvera plus bas une expérience qui montrera avec quelle rapidité le frottement augmente lorsqu'on ne renouvelle pas les enduits. Nous allons d'abord commencer par exposer les essais où le suif a été renouvelé à chaque opération.

Frottement du fer contre le chêne garni d'un enduit de suif, que l'on renouvelle à chaque opération.

73. L'on a attaché au traîneau de 15 pouces de longueur ; les deux règles de fer de 15 pouces de longueur & de 18 lignes de largeur (Fig. 6), dont nous nous sommes déjà servi dans plusieurs opérations ; elles glissoient suivant le fil de bois du madrier dormant, qui étoit enduit de nouveau suif à chaque essai : la surface de contact étoit de 45 pouces.

XV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 53 lb.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 3 lb $\frac{1}{2}$, le traîneau a parcouru 1 pouce en 4', 15".

II.^e ESSAI. 5 lb $\frac{1}{2}$, 2, 6.

III.^e ESSAI. 10 lb, 6.

XVI.^{ème}

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 233

XVI.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 450 lb.

I. ^{er} ESSAI. Avec une traction de	12 lb	1 pouce en	380''
II. ^e ESSAI.	18	1	85
III. ^e ESSAI.	23	1	10
IV. ^e ESSAI.	33	12 pouces en	$\frac{60}{2}$
V. ^e ESSAI.	53	12	$\frac{5}{2}$

XVII.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 850 lb.

I. ^{er} ESSAI. Avec une traction de	30 lb	1 pouce en	100''
II. ^e ESSAI.	55	1	24
III. ^e ESSAI.	80	12 pouces en	$\frac{32}{2}$
IV. ^e ESSAI.	105	12	$\frac{8}{2}$
V. ^e ESSAI.	130	12	$\frac{3}{1}$

XVIII.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1650 lb.

I. ^{er} ESSAI. Avec une traction de	47 lb	1 pouce en	240''
II. ^e ESSAI.	50	1	180
III. ^e ESSAI.	85	1	60
IV. ^e ESSAI.	110	12 pouces en	$\frac{60}{2}$
V. ^e ESSAI.	135	12	$\frac{25}{2}$
VI. ^e ESSAI.	160	12	$\frac{6}{2}$
VII. ^e ESSAI.	185	12	$\frac{2}{1}$

Frottement du cuivre contre le chêne garni d'un enduit de suif que l'on renouvelle à chaque opération.

74. L'on a substitué aux deux règles de fer qui portoient le traîneau dans les expériences qui précèdent, deux règles de cuivre (*Fig. 6.*), dont les dimensions étoient les mêmes que celles de fer : ainsi la surface de contact étoit encore de 45 pouces.

XIX.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1650 lb.

I. ^{er} ESSAI. Avec une traction de ...	35 lb	1 pouce en	1', 43''
II. ^e ESSAI.....	47	1	60
III. ^e ESSAI.....	60	1 pied en	24
IV. ^e ESSAI.....	110	1	$\frac{2}{1}$

Observations sur les cinq dernières Expériences.

75. Nous croyons inutile de calculer le rapport des pressions, des frottemens & des vitesses, d'après les expériences qui précèdent : l'on retrouve ici à peu près les mêmes loix que l'on avoit entreues dans les essais du frottement des métaux glissant à sec sur le bois ; mais l'on éprouve beaucoup d'irrégularités dans le résultat des expériences. Quelquefois le traîneau s'arrête au milieu de sa course, quoique mené par une traction qui devoit lui faire parcourir un pied en 60'' : quelquefois il marche avec des vitesses plus grandes que celles que nous venons d'indiquer. L'on conçoit qu'un peu plus ou un peu moins de consistance, dans quelques parties du suif qu'on renouvelle à chaque opération, doit produire toutes ces variétés qu'il est impossible d'empêcher ni de soumettre à aucunes loix réglées. La seule conséquence certaine que l'on peut tirer de ces différentes épreuves, c'est qu'un enduit de suif entre le bois & les métaux, diminue le frottement, au moins dans les vitesses insensibles, beaucoup plus que dans toutes les autres natures de corps que nous avons soumis à l'expérience. En calculant le rapport de la pression au frottement, dans les premiers degrés de vitesse, d'après la dix-huitième & la dix-neuvième expérience, l'on aura :

XVIII. ^e EXP. I. ^{er} ESSAI. Fer & chêne.....	Pression.	$\frac{1650}{47}$ 35,1.
	Frottement.		
XIX. ^e EXP. I. ^{er} ESSAI. Chêne & cuivre jaune.		$\frac{1650}{35}$ 47,1.

76. Mais dès l'instant que l'on cesse de renouveler le suif à chaque essai, les parties acquièrent de la cohérence ; & l'on voit sensiblement augmenter la résistance à mesure que l'on continue les opérations. Pour en donner un exemple, j'ai fait glisser le traîneau garni des deux règles de cuivre, quinze fois

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 235

de suite sur le madrier dormant, sans renouveler l'enduit de suif, & sans changer la force de traction qui étoit triple de celle que nous avons trouvée nécessaire dans la dix-neuvième expérience pour produire une vitesse insensible lorsque l'enduit étoit neuf : la vitesse uniforme que prenoit le traîneau a diminué à chaque essai, & enfin il a cessé de se mouvoir : voici le détail de cette expérience.

XX.^{ème} EXPÉRIENCE.

De l'augmentation du frottement des bois & des métaux, à mesure que les enduits vieillissent.

Cuivre & chêne, surface de 45 pouces.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1650 lb : l'on a enduit de suif au premier essai ; mais cet enduit n'a pas été renouvelé dans les essais qui ont succédé. Le traîneau pouvoit parcourir 5 pieds de longueur ; on lui imprimoit une vitesse primitive qu'il perdoit en partie dans le commencement de sa course, & il marchoit les trois derniers pieds d'un mouvement uniforme.

La force de traction a été constamment dans tous les essais de 100 livres.

I. ^{er} Ess. 3 pieds ont été parcourus uniformément en	$\frac{8''}{2}$	IX. ^e Ess. 3 pieds ont été parcourus uniformément en	$\frac{21''}{2}$
II. ^e Ess.	$\frac{8}{2}$	X. ^e Ess.	$\frac{23}{2}$
III. ^e Ess.	$\frac{9}{2}$	XI. ^e Ess.	$\frac{30}{2}$
IV. ^e Ess.	$\frac{11}{2}$	XII. ^e Ess.	$\frac{63}{2}$
V. ^e Ess.	$\frac{12}{2}$	XIII. ^e Ess.	550
VI. ^e Ess.	$\frac{15}{2}$	XIV. ^e Ess.	900
VII. Ess.	$\frac{17}{2}$	XV. ^e Ess.	1140.
VIII. ^e Ess.	$\frac{20}{2}$	XVI. ^e Ess. Le traîneau s'est arrêté à tous les instans, quelque vitesse primitive qu'on lui imprimât.	

G g ij

236 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

Il paroît résulter de cette expérience, que lorsque les surfaces de contact sont enduites de suif à chaque opération, elles adoucissent beaucoup le mouvement, sur-tout dans les petits degrés de vîtesses ; mais que lorsqu'elles doivent se mouvoir long-temps sur le même enduit, cet enduit est plus nuisible qu'utile.

Du frottement des bois & des métaux, lorsque les surfaces de contact sont réduites à de très-petites dimensions.

77. L'on a fixé, suivant la longueur du madrier dormant, deux fils de cuivre de 6 lignes de diamètre & de 6 pieds de longueur. Ils étoient percés à leurs extrémités & attachés sur le madrier avec des clous à tête perdue : l'on a fait courir le traîneau de 15 pouces sur ces deux fils de cuivre ; & l'on a trouvé que, soit que le traîneau fût enduit de suif ou seulement onctueux, les résultats étoient à peu près les mêmes : voici les expériences faites avec un enduit.

XXI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 47 lb.

I. ^{re} ESSAI. Traction.....	2 lb $\frac{1}{2}$	Un pied parcouru uniformément en	420 ^r
II. ^e ESSAI.....	4 $\frac{1}{2}$	80
III. ^e ESSAI.....	7 $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}$

XXII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 447 lb.

I. ^{re} ESSAI. Force de traction.....	21 lb	Un pied parcouru uniformément en	36' 4"
II. ^e ESSAI.....	28	280
III. ^e ESSAI.....	40	$\frac{18}{2}$
IV. ^e ESSAI.....	53	$\frac{8}{2}$

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 237

XXIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 847 lb.

I. ^{er} ESSAI. Force de traction.....	55 lb	Un pied parcouru uniformément en	120 ⁿ
II. ^e ESSAI.....	80	$\frac{26}{2}$
III. ^e ESSAI.....	105	$\frac{5}{2}$

XXIV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 1647 lb.

I. ^{er} ESSAI. Force de traction.....	85 lb	Un pied parcouru uniformément en	1640 ⁿ
II. ^e ESSAI.....	110	410
III. ^e ESSAI.....	135	120
IV. ^e ESSAI.....	160	$\frac{40}{2}$
V. ^e ESSAI.....	210	$\frac{10}{2}$

OBSERVATIONS.

78. L'on trouve, en comparant ces expériences avec la dix-neuvième, & avec celles de l'article 55, que l'enduit de suif n'influe que très-peu ici sur le frottement, parce que les surfaces de contact étant presque nulles, la cohérence du suif n'est pas assez forte pour empêcher les surfaces de se joindre d'aussi près que s'il n'y avoit point d'enduit; l'on voit de plus, que l'étendue des surfaces change très-peu le rapport des frottemens relativement aux vîteses. Il faut cependant faire ici la même observation que nous avons rapportée à la fin de l'article 60; c'est que ces résultats n'ont lieu que pour les premières opérations, & qu'en répétant les mêmes expériences plusieurs fois, le degré de vitesse influe beaucoup moins sur le frottement. Plusieurs causes étrangères au frottement contribuent d'ailleurs à rendre irrégulières les quatre dernières expériences.

79. Il nous reste encore à déterminer le frottement des

233 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

métal & des bois enduits de suif, lorsque le traîneau étant posé, comme à la Fig. 5, par deux règles posées par son travers, & taillées en coin, l'une des surfaces de contact n'est soumise qu'un seul instant à la compression de la charge du traîneau.

Frottement du fer & du chêne enduit de suif, les surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions, & marchant par le travers du fil de bois, comme à la Fig. 5.

80. L'on a posé, comme à la Fig. 5, deux règles de chêne taillées en coin aux deux extrémités & en travers du dessous du traîneau de 15 pouces de longueur. L'on a ensuite cloué sur le madrier dormant deux grandes règles de fer de 4 pieds de longueur, & l'on a fait glisser le traîneau sur ces règles garnies d'un enduit de suif abondant.

XXV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 47 lb.

- I.^{re} ESSAI. Avec une traction de 3 livres, marche d'un mouvement uniforme avec le degré de vitesse qui lui est imprimé, sans paroître retarder sa marche.
- II.^e ESSAI. Avec une traction de 3 livres & demie, ébranlé, parcourt successivement 18 pouces en $\frac{7}{5}$ ", & 18 pouces suivans en $\frac{4}{5}$ ".

XXVI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 447 lb.

- I.^{re} ESSAI. Quelque degré primitif de vitesse qu'on lui imprime, le traîneau s'arrête sous une traction de 22 livres.
- II.^e ESSAI. Mais avec une traction de 26 livres, quelque grande que soit la vitesse primitive qu'on lui imprime, au lieu de retarder sa marche pour prendre une vitesse uniforme, il continue à s'accélérer.

XXVII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1647 lb.

I.^{er} ESSAI. L'enduit étant renouvelé, le traîneau a paru se mouvoir avec une traction de 70 livres sans accélérer ni retarder; mais conservant la vitesse primitive qu'on lui imprimoit, quelle que fût cette vitesse.

II.^e ESSAI. Mais lorsque le traîneau a eu passé cinq ou six fois sur l'enduit sans qu'il fût renouvelé, il a fallu 90 livres de traction pour qu'il pût se mouvoir d'un mouvement continu. L'augmentation des vitesses n'influe pas dans cet essai sur le frottement; il s'accélère également en lui imprimant une vitesse d'un pied ou d'un pouce par seconde; si la force de traction est de 90 livres ou au dessus; il se ralentit & s'arrête, si elle est au dessous. On a répété vingt fois de suite ce dernier essai sans renouveler l'enduit, & l'on a toujours trouvé que 90 livres suffisoient pour vaincre le frottement, & qu'il n'étoit plus susceptible que d'une très-petite augmentation.

OBSERVATIONS.

81. Ce dernier genre de frottement nous présente des résultats différens de ceux qui ont précédé. Jusqu'ici, dans toutes nos expériences sur le frottement des bois & des métaux, nous avons trouvé que l'augmentation de vitesse faisoit croître les frottemens de la manière la plus sensible, & que cet effet ne cessoit d'avoir lieu pour les bois glissant sur les métaux suivant le fil de bois, qu'après un très-grand nombre d'opérations; mais il paroît, d'après les dernières expériences que nous venons de rapporter, qu'ici les fibres du bois pliées par le travers du fil de bois sont collées par l'enduit, & perdent en entier leur élasticité dès la première opération: il ne nous restoit plus qu'à voir si, en essuyant les règles qui étoient pénétrées de graisse, & qui restoient toujours onctueuses, quelque soin

240 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

que l'on prit à les essuyer, nous trouverions un résultat analogue à celui de nos dernières expériences.

Continuation des mêmes Expériences.

Surfaces onctueuses, mais non enduites.

82. L'on a laissé les règles de chêne taillées en coin, clouées sous le traîneau & glissant par le travers du fil de bois, comme dans les trois dernières expériences qui précèdent; mais l'on a essuyé avec beaucoup de soin les règles de fer fixées sur le madrier dormant; par toutes les opérations antérieures, le suif avoit pénétré dans l'intérieur des pores du fer, & la surface de ces règles, quoiqu'essuyée avec soin, restoit luisante & onctueuse.

XXVIII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau est chargé, tout compris, de 47 lb.

I.^{re} ESSAI. Avec une traction de 3 livres & demie, le traîneau continue à se mouvoir sans ralentir sa marche, quelle que soit la vitesse primitive qu'on lui imprime; il s'arrête sous une moindre traction.

XXIX.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 447 lb.

I.^{re} ESSAI. Il s'arrête sous les tractions moindres que 30 livres; mais lorsque ces tractions sont plus grandes que 30 livres, il s'accélère, quelle que soit la vitesse primitive qu'on lui imprime.

XXX.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 1647 lb.

I.^{re} ESSAI. Il s'arrête sous les tractions moindres que 115 livres; mais sous celles qui sont plus grandes, il continue à s'accélérer, quelque vitesse primitive qu'on lui imprime.

OBSERVATIONS.

OBSERVATIONS.

83. L'on observe absolument les mêmes loix dans ces expériences que dans celles expliquées à l'article 81 ; elles nous apprennent que dès l'instant que les surfaces sont pénétrées par le suif, quoiqu'elles n'en soient pas enduites, les vitesses cessent d'influer sur les frottemens. Si l'on cherche le rapport de la pression au frottement dans les trois dernières expériences, l'on trouvera :

XXVIII. ^e EXPÉRIENCE.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{47}{3\frac{1}{2}}$	13,4
XXIX. ^e EXP.....		$\frac{447}{30}$	14,9.
XXX. ^e EXP.....		$\frac{1647}{115}$	14,3.

Ainsi le rapport de la pression au frottement se trouvant ici une quantité à peu près constante, l'on en conclut que ce genre de frottement, qui est analogue à celui de toutes les machines où des axes de fer tournent dans des boîtes de bois, rentre dans la classe de tous les frottemens que nous avons déjà examinés, où nous avons trouvé que le rapport de la pression au frottement étoit toujours constant, &c où le plus ou moins de vitesse n'influoit que d'une manière insensible.

SECTION TROISIÈME.

Du frottement des métaux.

84. COMME les métaux sont d'un grand usage dans toutes les machines destinées à soulever de grands poids ; comme d'ailleurs ils forment une classe particulière, j'ai cru qu'il seroit avantageux de rassembler, dans une même section, toutes les expériences relatives à leur frottement, quoique le résultat d'une partie de ces expériences eût déjà été annoncé dans le

242 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

Chapitre qui précède. L'on a fait polir avec le plus grand soin deux règles de fer de 4 pieds de longueur & de 2 pouces de largeur ; on les a fixées par leurs extrémités au madrier dormant. L'on a fait faire ensuite quatre autres règles, deux de fer & deux de cuivre jaune de 15 pouces de longueur & de 18 lignes de largeur, formant crochet à leurs extrémités, pour saisir le traîneau de 15 pouces sous lequel on vouloit les placer : tous les angles de ces règles étoient arrondis. La Fig. 7, qui est une section verticale, dans le sens de la longueur du traîneau du madrier dormant, représente le traîneau garni de ses règles de cuivre ou de fer, & glissant sur le madrier dormant, garni des longues règles de fer.

Du frottement du fer contre le fer sans enduit.

Surface de contact de 45 pouces.

P R E M I È R E E X P É R I E N C E.

85. Le traîneau chargé, son poids compris, de 53 lb.

I.^{re} ESSAI. Il faut toujours une force de traction de 15 livres pour donner un mouvement continu au traîneau ; mais soit qu'on l'ébranle, soit qu'on lui imprime une vîtesse quelconque, le frottement paroît constamment le même.

II.^{me} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, tout compris, de 453 lb.

I.^{re} ESSAI. Le traîneau s'est arrêté sous toutes les forces de traction au dessous de 125 livres. Avec une traction plus considérable, il s'accélère uniformément avec une vîtesse due à cette augmentation de force.

Nota. Les règles de fer se sont rayées, & il n'a pas été possible de continuer les expériences sous de plus grandes pressions.

Du frottement du fer & du cuivre sans enduit.

Surface de contact de 45 pouces.

86. L'on a substitué les deux règles de cuivre de 15 pouces de longueur aux règles de fer qui étoient fixées au traîneau dans les deux dernières expériences.

III.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 52 lb.

I.^{er} ESSAI. Une traction de 12 livres & demie met le traîneau en mouvement : il n'est pas nécessaire de l'ébranler ; il part seul avec ce degré de traction, qui ne peut pas être moindre pour que le mouvement soit continu, quelque vitesse primitive que l'on donne au traîneau.

IV.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 452 lb.

I.^{er} ESSAI. Une traction de 110 livres met le traîneau en mouvement avec les mêmes circonstances que dans la dernière expérience.

Nota. Les règles commencent à se rayer, & l'on ne peut pas continuer les observations en employant de plus grandes pressions.

Observations sur ces Expériences.

87. Nous aurions désiré de continuer nos expériences en employant des pressions plus considérables que 450 livres ; mais toutes les fois que nous avons voulu l'essayer, les règles se sont rayées, les frottemens sont devenus incertains ; il a donc fallu se contenter des quatre expériences qui précèdent, d'où il résulte :

H h ij

244 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

FER ET FER.	I. ^{re} EXPÉRIENCE.	Pression. Frottement.	$\frac{53}{15}$	3,5°
	II. ^e EXP.		$\frac{463}{125}$	3,6°
FER ET CUIVRE.	III. ^e EXP.		$\frac{52}{12\frac{1}{2}}$	4,2°
	IV. ^e EXP.		$\frac{452}{110}$	4,1°

Comme le rapport de la pression au frottement se trouve ici exactement le même pour chaque couple d'expérience, quoique les pressions soient entre elles comme 9 à 1, l'on en peut conclure que, dans les métaux glissant sans enduit l'un sur l'autre, le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces : les remarques faites à chaque expérience nous apprennent aussi qu'il est indépendant des vitesses. Nous pouvons encore faire ici une observation intéressante, & qui distingue parfaitement le frottement des métaux de celui des bois ; c'est qu'en comparant les résultats du premier & du deuxième Chapitre, nous trouvons que dans les bois, les forces nécessaires pour vaincre les frottemens ou pour ébranler le traîneau après un certain temps de repos, sont souvent quadruplés de celles nécessaires pour entretenir le mouvement continu uniforme du traîneau : ici l'on trouve la même intensité de frottement, soit qu'il faille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qu'il faille entretenir une vitesse uniforme. Nous reviendrons à cette observation à la fin de ce Chapitre, lorsque nous chercherons les causes du frottement.

Le rapport de 4 à 1, que nous trouvons par les troisième & quatrième expériences pour le fer & le cuivre, ne peut, ainsi que nous l'avons déjà dit, être regardé comme exact, que lorsque les surfaces sont neuves & très-étendues. Car en réduisant les surfaces de contact aux plus petites dimensions possibles, ce rapport varie en s'approchant de celui de 6 à 1, qu'il ne joint que lorsque, par un frottement continu de plus d'une heure, le cuivre & le fer ont pris tout le poli dont ils peuvent être sus-

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 245

ceptibles. Il faut cependant, pour que cette dernière opération réussisse, & que le cuivre ne soit pas rayé par le frottement des règles de fer, que les métaux soient d'un grain fin & homogène. Nous développerons cette observation dans les expériences destinées à déterminer le frottement des axes; nous allons passer au frottement des métaux garnis d'un enduit.

*Du frottement des métaux glissant l'un sur l'autre,
avec un enduit interposé.*

88. Avant de commencer les expériences sur les métaux enduits de suif, de vieux oing ou d'huile, il est absolument nécessaire d'avoir soumis nos règles à quelques opérations préliminaires, pour leur donner tout le degré de poli qu'elles peuvent prendre; il faut d'abord les enduire de suif, & les faire glisser en les attachant au traîneau, sur les règles de fer que nous avons fixées dans les dernières expériences au madrier dormant. Cette opération se continue sous une grande pression pendant une demi-heure, en renouvelant de temps en temps l'enduit; par-là le suif pénètre dans les pores du métal, & les règles prennent un degré de poli qu'il seroit difficile de leur donner autrement. Dans le commencement de l'opération, le frottement est incertain, mais à mesure que les surfaces se polissent, il devient plus régulier. Nous allons commencer par rapporter les expériences où nos surfaces de 45 pouces de contact étoient enduites à chaque essai: nous donnerons ensuite celles où les surfaces étoient seulement onctueuses; enfin nous chercherons le frottement des surfaces enduites ou onctueuses, mais réduites au plus petit nombre de points de contact possible.

*Frottement du fer contre le fer avec enduit de suif
renouvelé à chaque essai.*

Surface de contact de 45 pouces.

89. Les deux règles de fer de 15 pouces de longueur sont attachées au traîneau: celles de 4 pieds de longueur le sont au madrier dormant.

V.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 53 lb.

- I.^{er} ESSAI. Une traction de 8 livres & demie suffit pour donner un mouvement continu au traîneau.

VI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 453 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 40 livres, si on donne au traîneau une vitesse de 7 à 8 pouces par seconde, il continue à se mouvoir, & même paroît s'accélérer; il s'arrête sous un moindre degré de vitesse: mais si on ne fait qu'ébranler le traîneau ou même lui imprimer une vitesse d'un pouce par seconde, il ne continuera à se mouvoir qu'avec une traction de 45 livres.

VII.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 1653 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 140 livres, si on donne au traîneau une vitesse de 7 à 8 pouces par seconde, il continuera à se mouvoir sans ralentir sa marche; mais si on ne fait que l'ébranler, il ne prendra un mouvement continu qu'en employant une traction de 160 livres.

*Frottement du fer & du cuivre enduits de nouveau suif
à chaque essai.*

Surface de contact de 45 pouces.

90. L'on a remplacé les deux règles de fer attachées au traîneau dans les trois dernières expériences, par les deux règles de cuivre des mêmes dimensions: la surface de contact se trouvoit encore de 45 pouces.

VIII.^{me} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 52 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une force de traction de 6 livres & demie, le traîneau se meut d'un mouvement incertain; mais en l'ébranlant, il s'accélère toujours très-rapidement, s'il est tiré par un poids de 7 livres & demie.

IX.^{me} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 452 lb.

- I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 42 livres, en imprimant au traîneau une vitesse insensible, il continue à se mouvoir & s'accélère rapidement; mais si on lui imprime une vitesse de 7 à 8 pouces par seconde, il ne faut qu'une traction de 30 livres pour qu'il continue à se mouvoir sans être retardé.

X.^{me} E X P É R I E N C E.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 1652 lb.

- I.^{er} ESSAI. Le traîneau continue à se mouvoir sans ralentir sa marche, avec une traction de 90 livres, lorsqu'on lui imprime une vitesse primitive d'un pied en $\frac{1}{2}$ ''; mais lorsqu'on ne fait que l'ébranler ou même lui imprimer une vitesse insensible, il ne continue à se mouvoir qu'avec une traction de 150 livres; pour lors il accélère sa marche rapidement: cependant, avec cette traction de 150 livres, j'ai produit deux fois un mouvement uniforme d'un pouce en $\frac{10}{2}$ ''; ce mouvement uniforme a duré la première fois 2', après quoi le traîneau s'est accéléré très-prompement: j'ai détaché une fois le traîneau après 3' de repos avec cette même traction de 150 livres; mais en général, l'on a trouvé qu'après 3', une heure & 4 jours de repos, il falloit, pour détacher le traîneau, une traction de 170 livres.

*Continuation des mêmes Expériences.**Fer & cuivre enduits d'huile sur enduit de suif.*

91. L'on a voulu voir si en mettant un enduit d'huile sur l'enduit de suif, l'on changeroit la valeur du frottement.

XI.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 52 lb.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau seulement ébranlé s'accélère avec rapidité avec une traction de 6 livres & demie.

Après un repos de 3' & d'une heure, il a fallu un poids de 10 livres pour détacher le traîneau.

XII.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 452 lb.

I.^{er} ESSAI. Si on ne fait qu'ébranler le traîneau, il faut, pour qu'il continue à se mouvoir, une force de traction de 56 livres, avec laquelle il s'accélère très-rapidement; mais si on lui imprime une vitesse primitive de 8 ou 10 pouces par seconde, il continue à se mouvoir sans ralentir sa marche, avec une traction de 45 livres.

XIII.^{me} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 1652 lb.

I.^{er} ESSAI. Lorsqu'on ne fait qu'ébranler le traîneau, il faut une traction de 210 livres pour qu'il puisse se mouvoir: il faut à peu près le même degré de traction pour qu'il ne s'arrête pas si on lui imprime une vitesse d'un pouce par seconde; mais si on lui imprime une vitesse primitive de 8 ou 10 pouces par seconde, il continuera son mouvement sans ralentir sa marche, avec une traction de 196 livres.

Pour détacher le traîneau, il a fallu, après $\frac{1}{2}$ ^e de repos, une traction de 250 livres: après 3', il a fallu une fois 280 livres, une autre fois 330 livres.

OBSERVATIONS.

92. Le rapport de la pression au frottement, dans les expériences

expériences qui précèdent, dépend de la nature de l'enduit & du degré de vitesse du traîneau : lorsque les métaux sont enduits de suif, le frottement diminue beaucoup sous les grandes pressions à mesure que la vitesse augmente. Nous trouvons par exemple, dans la dixième expérience, que lorsque la vitesse est d'un pied par seconde, le frottement du traîneau, chargé de 1652 livres, est de plus d'un tiers moindre que lorsque la vitesse est insensible, ou même d'un pouce par seconde. Cet effet que nous appercevons ici, de la diminution du frottement à mesure que la vitesse augmente, ne peut être attribué qu'à la dureté & à la consistance du suif ; car, en essuyant nos règles, & en y répandant un enduit d'huile d'olive, le frottement n'est que très-peu diminué sous les grandes pressions en passant d'une vitesse insensible à une vitesse de 4 à 5 pouces par seconde. Nous allons chercher, d'après nos expériences, le rapport de la pression au frottement dans les vitesses insensibles.

*Rapport de la pression au frottement dans les mouvemens
au dessous d'un pouce par seconde.*

FER CONTRE FER enduit de suif à chaque essai.	V. ^e EXPÉRIENCE.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{53}{8\frac{1}{2}}$	6,2.
	VI. ^e EXP.....		$\frac{453}{45}$	10,1.
	VII. ^e EXP.....		$\frac{1653}{160}$	10,3.
FER CONTRE CUIVRE enduit de suif à chaque essai.	VIII. ^e EXP.....		$\frac{52}{6\frac{1}{2}}$	8,0.
	IX. ^e EXP.....		$\frac{452}{42}$	10,7.
	X. ^e EXP.....		$\frac{1652}{150}$	11,0.
FER CONTRE CUIVRE enduit de suif & d'huile non renouvelée.	XI. ^e EXP.....		$\frac{52}{6\frac{1}{2}}$	8,0.
	XII. ^e EXP.....		$\frac{452}{56}$	8,1.
	XIII. ^e EXP.....		$\frac{1652}{210}$	7,9.

250 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

En ne prenant, dans chaque article de ces résultats, que les deux dernières expériences, l'on trouve que le rapport de la pression au frottement est pour le fer contre le fer, avec enduit de suif, comme 10 à 1.

Pour le fer & le cuivre enduits de suif, comme 11 à 1.

Et pour le fer & le cuivre enduits primitivement de

suif, & ensuite d'huile, comme 8 à 1.

Dans les enduits de suif, le rapport de la pression au frottement se trouve moindre sous des pressions de 52 livres que sous les grandes pressions. Nous avons vu déjà (art. 34 & 35) que cette variété provenoit de la cohérence du suif qui oppose, sous tous les degrés de pression, une résistance constante proportionnelle à l'étendue des surfaces : cette résistance constante, qui n'est sensible que sous les petites pressions, peut s'évaluer ici, pour notre surface de contact de 45 pouces carrés, à une livre & demie pour le fer & le cuivre, & à 3 livres pour le fer contre le fer.

Mais par la onzième expérience, comparée avec les deux suivantes, il paroît qu'avec les enduits d'huile d'olive la cohérence peut être regardée comme nulle. Nous avons répété les expériences qui précèdent, en plaçant les règles de fer ou de cuivre attachées au traîneau en travers, & aux deux extrémités du traîneau ; elles recoupoient à angle droit la direction des grandes règles de fer attachées aux madriers dormans. Par-là la surface de contact étoit réduite à 12 pouces au lieu de 45 pouces : éprouvées sous des pressions de 2000 livres, l'on a eu les mêmes résultats que précédemment ; en sorte que la diminution des surfaces n'a influé, dans ce rapport, que d'une manière insensible.

Avec des enduits de vieux oing, le frottement n'a jamais été moindre que le neuvième de la pression. Sa résistance dépend absolument de la consistance de l'enduit, & le frottement augmente à proportion que l'enduit est plus mou.

Lorsque les surfaces sont enduites de suif, & qu'elles ont une

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 251

grande étendue, le frottement dénature le suif, & augmente sensiblement à mesure que l'on continue les essais sans renouveler l'enduit : cependant je l'ai toujours trouvé moindre que le huitième de la pression ; mais lorsque le suif est noyé d'huile, comme dans nos trois dernières expériences, & que les surfaces de contact sont très-petites, pour lors cet effet est moins sensible. J'ai fait, pendant trois heures de suite, des expériences avec un axe de fer enduit primitivement de suif & d'huile, sans rafraîchir l'enduit, & sans éprouver aucune irrégularité ni aucun accroissement dans le rapport de la pression au frottement.

Cuivre & fer enduits, les surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions possibles.

72. Nous avons fait arrondir avec beaucoup de soin la tête de quatre gros clous de cuivre ; nous les avons enfoncés aux quatre coins du traîneau, de manière que le traîneau ne portoit sur les deux grandes règles de fer attachées au madrier dormant que par la convexité comprimée de quatre demi-sphères de 6 lignes de diamètre. Nous avons d'abord essuyé avec soin nos règles dormantes ; mais pénétrées de suif par toutes les expériences qui avoient précédé, elles restoient onctueuses, luisantes & grasses au toucher : c'est à peu près l'état où sont les machines dont on n'a pas renouvelé l'enduit depuis quelque temps. Nous avons voulu savoir quel seroit le frottement de nos quatre têtes de clous sur une pareille surface.

Surfaces restant onctueuses après son ancien enduit essuyé.

XIV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 47 lb.

ESSAI. Avec une traction de 5 livres & demie, le traîneau commence à se mouvoir en l'ébranlant ; il s'arrête sous une moindre traction, quelque vitesse primitive qu'on lui imprime.

252 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

XV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 447 lb.

ESSAI. Avec une traction de 51 livres, le traîneau ébranlé se met d'un mouvement continu; il s'arrête sous une moindre traction, quelque vitesse primitive qu'on lui imprime: l'on n'a jamais pu produire une vitesse uniforme, & le traîneau ou s'accélère dans sa marche ou s'arrête.

XVI.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 847 lb.

ESSAI. Il faut une force de traction de 112 livres, pour que le traîneau continue à se mouvoir. Il faut même lui imprimer une vitesse primitive d'un ou deux pouces par seconde; car souvent il ne marche pas lorsqu'on ne fait que l'ébranler.

*Surface de contact réduite aux plus petites dimensions,
& enduites d'une couche de suif.*

XVII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 847 lb.

ESSAI. L'on a mis une couche de suif sur les règles dormantes, il a fallu, en ébranlant seulement le traîneau pour qu'il prît un mouvement continu, une traction de 95 livres: mais en lui imprimant une vitesse primitive de 5 ou 6 pouces par seconde, le traîneau continue à se mouvoir en s'accéléralant lorsqu'il est tiré par un poids de 88 livres.

*Même enduit que dans l'expérience précédente,
avec une couche d'huile.*

XVIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 847 lb.

ESSAI. En répandant de l'huile sur l'enduit de suif, de l'expérience qui précède, le traîneau s'arrêtoit toujours, quelque

vitesse primitive qu'on lui imprimât, lorsqu'il n'étoit tiré que par un poids de 106 livres : mais tiré par 112 livres, il marche toujours en s'accéléraut, quelque petite que soit la vitesse primitive qu'on lui imprime.

OBSERVATIONS.

93. Lorsque les surfaces sont comme ici réduites aux plus petites dimensions possibles & seulement onctueuses, il paroît que les vitesses influent très-peu dans les frottemens : toutes les fois que nous avons ôté un dixième du poids nécessaire pour donner au traîneau une vitesse continue, en ne faisant que l'ébranler, il a ralenti son mouvement & s'est arrêté, quelque degré de vitesse primitive qu'on lui ait imprimé.

Lorsque, dans la dix-septième expérience, nous avons enduit les règles dormantes de fer avec beaucoup de suif, pour lors le frottement a paru diminuer un peu à mesure que l'on augmentoit la vitesse; mais cette diminution étoit beaucoup moindre que lorsque les surfaces de contact étoient comme à l'article 90, de plusieurs pouces carrés.

En répandant, expérience dix-huitième, de l'huile sur le suif, pour lors le suif perd sa consistance, & le frottement redevient à peu près le même que lorsque les surfaces étoient seulement onctueuses, & qu'il n'y avoit point de suif interposé.

94. Nous allons actuellement déterminer, d'après nos expériences, le rapport de la pression au frottement pour les surfaces onctueuses.

Rapport de la pression au frottement dans les surfaces onctueuses, sous tous les degrés de vitesse.

XIV ^e . EXPÉRIENCE.....	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{47}{5\frac{1}{2}}$	8,5.
XV ^e . EXP.....	$\frac{447}{51}$		8,7.
XVI ^e . EXP.....	$\frac{847}{112}$		7,6.

*Surfaces enduites de suif, vitesse de deux pouces
par seconde & au dessous.*

XVII. ^e EXPÉRIENCE. ...	Pression.	847	8,9.
	Frottement.	95		

Même enduit avec couche d'huile, vitesse quelconque.

XVIII. ^e EXPÉRIENCE. ...	Pression.	847	7,6.
	Frottement.	112		

CHAPITRE III.

Essai sur la théorie du frottement.

95. **A**VANT de chercher les causes physiques du frottement, nous allons rassembler les principaux résultats de nos expériences.

1.^o Le frottement des bois glissant à sec sur les bois, oppose, après un temps suffisant de repos, une résistance proportionnelle aux pressions : cette résistance augmente sensiblement dans les premiers instans de repos ; mais après quelques minutes elle parvient ordinairement à son *maximum* ou à la limite.

2.^o Lorsque les bois glissent à sec sur les bois avec une vitesse quelconque, le frottement est encore proportionnel aux pressions ; mais son intensité est beaucoup moindre que celle que l'on éprouve en détachant les surfaces après quelques minutes de repos : l'on trouve, par exemple, que la force nécessaire, pour détacher & faire glisser deux surfaces de chêne après quelques minutes de repos, est (articles 10 & 44) à celle nécessaire pour vaincre le frottement, lorsque les surfaces ont déjà un degré de vitesse quelconque, comme 9,5 à 2,2.

3.^o Le frottement des métaux glissant sur les métaux sans

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 255

enduit, est également proportionnel aux pressions; mais son intensité est la même, soit qu'on veuille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qu'on veuille entretenir une vitesse uniforme quelconque.

4.^o Les surfaces hétérogènes, telles que les bois & les métaux, glissant l'une sur l'autre sans enduit, donnent pour leurs frottemens des résultats très-différens de ceux qui précèdent, car l'intensité de leur frottement, relativement au temps de repos, croît lentement, & ne parvient à sa limite qu'après quatre ou cinq jours & quelquefois davantage; au lieu que, dans les métaux, elle y parvient dans un instant, & dans les bois dans quelques minutes: cet accroissement est même si lent, que la résistance du frottement, dans les vitesses insensibles, est presque la même que celle que l'on surmonte en ébranlant ou détachant les surfaces après trois ou quatre secondes de repos. Ce n'est pas encore tout, dans les bois glissant sans enduit sur les bois, & dans les métaux glissant sur les métaux, la vitesse n'influe que très-peu sur les frottemens; mais ici (articles 55 & suivans) le frottement croît très-sensiblement à mesure que l'on augmente les vitesses; en sorte que le frottement croît à peu près suivant une progression arithmétique, lorsque les vitesses croissent suivant une progression géométrique.

Ces quatre principaux faits vont former la base de notre théorie du frottement.

96. Le frottement ne peut venir que de l'engrènement des aspérités des surfaces, & la cohérence ne doit y influer que très-peu: car nous trouvons que le frottement est, dans tous les cas, à peu près proportionnel aux pressions, & indépendant de l'étendue des surfaces: or la cohérence agiroit nécessairement suivant le nombre des points de contact ou suivant l'étendue des surfaces. Nous trouvons cependant que cette cohérence n'est pas précisément nulle, & nous avons eu soin de la déterminer dans les différens genres d'expériences qui ont précédé. Nous l'avons trouvée, art. 44, d'une livre deux tiers par pied carré pour les surfaces de chêne non enduites; mais, dans la

pratique, la résistance qui peut venir de cette cohérence peut être négligée, toutes les fois que chaque pied carré est chargé de plusieurs quintaux.

97. Dans les faits que nous venons de rapporter, les surfaces ne sont dénaturées par aucun enduit; ainsi la variété des phénomènes ne peut tenir qu'à quelque différence essentielle dans la nature des parties constitutives des bois & des métaux: les bois sont composés de fibres alongées, de parties flexibles & élastiques; les métaux au contraire sont composés de parties angulaires, globuleuses, dures & inflexibles, en sorte qu'aucun degré de pression ni de traction ne peut changer la figure des parties qui tapissent la surface des métaux, tandis que les fibres ou les espèces de poil dont les bois sont formés peuvent se plier aisément dans tous les sens.

98. Ainsi, pour nous servir d'une comparaison simple, nous concevons (*Fig. 8.*) que les fibres dont la surface du bois est couverte, entrent les uns dans les autres, comme le pourroient faire les crins de deux brosses. Pour avoir le degré de traction nécessaire pour faire glisser l'une des brosses sur l'autre, il faudroit examiner la différente position des crins dans le moment où, après un certain temps de repos, l'on feroit un effort pour détacher les brosses, & celles où les crins se trouveroient, lorsqu'en glissant l'une sur l'autre, les brosses auroient un mouvement respectif quelconque.

Nous supposons donc (*Fig. 8.*) que lorsqu'on pose une planche bien polie sur une autre, les fibres, dont les surfaces sont hérissées, entrent librement les unes dans les autres, comme on le voit dans cette Figure. Si à présent l'on veut faire glisser la planche supérieure sur l'inférieure, les fibres des deux surfaces se plieront mutuellement jusqu'à ce qu'elles se touchent, sans cependant se désengrainer; cette position des fibres est représentée dans la neuvième Figure. Arrivées à cette position, les fibres se touchant mutuellement ne peuvent pas se coucher davantage, & l'angle de leur inclinaison dépendant de la grosseur des fibres, sera le même sous tous les degrés de pression: ainsi

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 257

ainsi il faudra , sous tous les degrés de pression , une force proportionnelle à la pression , pour que les fibres glissant suivant cette inclinaison , puissent se désengrainer.

Mais si l'on détache le traîneau , & qu'on continue à le faire glisser , tous les fibres (*Fig. 10.*) se désengraineront , & en se désengrainant il restera un vide entre les fibres voisines d'une même surface ; ainsi elles se coucheront les unes sur les autres jusqu'à ce qu'elles se touchent , & elles prendront conséquemment encore une inclinaison plus grande que la précédente , mais qui sera encore toujours la même pour tous les degrés de pression. Ainsi , dans les surfaces en mouvement , le frottement sera encore proportionnel aux pressions : l'on ne trouvera de variété , relativement à cette théorie , que lorsque les surfaces de contact seront réduites à leurs plus petites dimensions , parce que pour lors les parties intérieures des surfaces venant à céder sous les pressions énormes qu'elles éprouvent , les fibres pourront encore s'incliner : c'est effectivement ce que nous avons trouvé en faisant glisser suivant le fil de bois (art. 38 & suiv.) le traîneau porté sur deux angles de chêne arrondis.

L'on expliquera avec facilité , par cette théorie , une observation que nous avons faite (art. 46 & 47.) ; c'est que lorsque les angles de chêne qui portent le traîneau glissent dans le sens de leur longueur , les points du madrier dormant , placés sous ces angles , se trouvant comprimés tout le temps que le traîneau emploie à parcourir sa longueur , ce temps est assez long pour que les surfaces fléchissent , & que les fibres s'inclinent davantage que lorsque leurs extrémités seulement se touchent. Mais lorsque les angles qui portent le traîneau sont placés (*Fig. 5.*) à l'extrémité & en travers du traîneau , pour lors les points de contact avec le madrier dormant n'étant soumis qu'un instant à la compression , n'ont pas le temps de fléchir d'une manière sensible , & le rapport de la pression au frottement reste le même pour les grandes & les petites pressions.

100. Les métaux n'étant point composés de fibres ni de parties flexibles , la situation des cavités , leur figure , ne variera

258 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

dans aucune circonstance : conséquemment , soit que le traîneau soit en mouvement , soit qu'il soit en repos , l'intensité du frottement sera toujours la même , parce qu'elle dépend de la figure des molécules élémentaires qui constituent les surfaces , & de l'inclinaison du plan tangentiel dans les points de contact : la *Fig. 11* représente deux surfaces du genre des métaux , posées l'une sur l'autre.

101. Lorsque les bois glissent sur les métaux , ce sont pour lors les fibres élastiques du bois qui , en se pliant le long des parois des cavités , pènerent dans les cavités : or comme ces fibres sont flexibles & élastiques , elles ne s'enfoncent que peu à peu dans ces cavités ; ainsi la résistance due au frottement augmentera à mesure que le temps de repos qui précédera l'effort pour faire glisser les surfaces sera plus long. Mais si nous supposons le traîneau en mouvement , les fibres dont les surfaces du bois sont couvertes , rencontrant les inégalités du métal , seront fléchies pour franchir le sommet de ces inégalités. Cette flexion sera nécessairement telle que la réaction de l'élasticité des fibres soit proportionnelle à la pression : ainsi , dans les vitesses insensibles , le frottement se trouvera encore proportionnel à la pression , comme nous l'avons trouvé par nos expériences (art. 55 & suiv.) : lorsque le traîneau sera mu avec une vitesse quelconque , pour lors , comme les cavités de la surface du métal ont de l'étendue , relativement à la grosseur des fibres du bois , les fibres , après avoir passé sur les sommets des inégalités des surfaces métalliques , se releveront en partie comme des faisceaux de ressort. Il faudra donc les plier de nouveau , pour leur faire franchir l'inégalité suivante. Plus la vitesse sera grande , plus il faudra plier de fois les fibres : ainsi le frottement doit croître suivant une loi de la vitesse ; mais cependant on les pliera sous un moindre angle , à mesure que la vitesse augmentera , parce qu'en passant d'une sommité à l'autre , les fibres n'ont pas le temps de se redresser en entier.

Dans le frottement des bois & des métaux enduits de suif , les surfaces de contact étant réduites à des angles arrondis ,

nous avons trouvé que, les règles marchant par le travers du fil de bois, la vitesse cessoit d'influer dans le frottement : il paroît que, dans ce genre de frottement, le suif colle les fibres du bois les uns contre les autres, & leur fait perdre en partie leur élasticité : voici à ce sujet une observation intéressante. En faisant tourner une poulie de gaïac sur un axe de fer, sans y avoir mis aucun enduit, j'ai trouvé que pendant les vingt premières minutes, la poulie étant neuve, le frottement augmentoit avec la vitesse, suivant des loix analogues à celles que nous trouvons pour le bois & le fer dans le mouvement du traîneau. Cependant, après deux heures d'un frottement continu, sous une rotation rapide, les fibres du bois avoient perdu la plus grande partie de leur élasticité, & l'augmentation de vitesse n'augmentoit presque plus le frottement. Cet effet a été produit bien plus rapidement en enduisant l'axe de suif : car, après une minute de mouvement de rotation, sous une pression de 600 livres, une poulie de gaïac, montée sur un axe de fer enduit de suif, a toujours eu le même frottement avec un degré quelconque de vitesse.

Je ne m'étendrai pas davantage sur cette théorie ; elle paroît expliquer avec facilité tous les phénomènes du frottement ; mais l'Académie ne demande aujourd'hui que des recherches qui puissent être utiles : ainsi il seroit dangereux de trop se livrer à un système qui pourroit peut-être influencer sur la manière de rendre compte des expériences qui nous restent à faire.



DEUXIÈME PARTIE.

De la force nécessaire pour plier les cordes , & du frottement des axes.

102. **N**ous sommes obligés d'interrompre ici l'ordre des matières , & de déterminer la roideur des cordes avant de donner nos expériences sur le frottement des axes ; parce qu'après plusieurs tentatives , nous avons trouvé que le moyen qui convenoit le mieux pour déterminer ce genre de frottement , étoit de suspendre deux poids égaux des deux côtés d'une poulie mobile sur son axe , & de donner un ébranlement à tout le système , après avoir ajouté un petit poids du côté qui doit vaincre le frottement , & d'observer ensuite le temps des chutes : mais dans cette expérience , la résistance due au frottement se trouve confondue avec celle de la roideur de la corde , que nous allons d'abord déterminer , pour la défalquer de la résistance totale qui nous sera donnée par nos expériences. La première méthode dont nous avons fait usage , est celle de M. Amontons : elle est très-commode pour faire des expériences avec des rouleaux d'un petit diamètre ; mais elle ne peut pas convenir à des rouleaux d'un pied , ni même de 6 pouces de diamètre : d'ailleurs cette méthode n'est pas directe ; c'est ce qui nous a déterminés à en vérifier les résultats par un autre moyen , qui peut être employé indistinctement avec des rouleaux de toutes les grosseurs. Les loix que nous trouverons par ces deux méthodes pour la roideur des cordes , seront encore confirmées en déterminant le frottement des axes dans le deuxième Chapitre.



CHAPITRE PREMIER.

De la roideur des cordes.

103. **M.** AMONTONS, dans le Volume de l'Académie des Sciences pour 1699, a donné une méthode très-ingénieuse pour déterminer la roideur des cordes : elle a été suivie par M. Désaguilliers, dans son Cours de Physique, qui a répété les expériences de M. Amontons avec le plus grand soin. Il a paru résulter des tentatives de ces deux Auteurs, que les forces nécessaires pour plier des cordes autour d'un cylindre, sont en raison inverse du rayon des rouleaux, & en raison directe de la tension & du diamètre de la corde; mais ce résultat, qui n'est fondé que sur des expériences très en petit, est plutôt propre à fournir des inductions probables que des règles sûres : voici la manière dont nous nous sommes servis de l'appareil de M. Amontons pour faire les expériences en grand.

104. A une poutre AA' (Fig. 13, n.º 1 & 2.) est soutenu, au moyen de deux crochets & d'une corde a b d d' b' a', un plateau BB' chargé de gueuses de 50 livres : le cylindre bb' est enveloppé par la corde, comme on le voit au n.º 2 de la treizième Figure : l'on y voit en même temps un petit bassin de balance Q, soutenu par une ficelle très-flexible qui enveloppe le cylindre : ce bassin est chargé de poids jusqu'à ce qu'il fasse descendre le rouleau.

Dans cette expérience, chaque corde soutient la moitié de la charge, & les poids du petit bassin Q sont uniquement employés à plier la corde autour du cylindre qu'elle enveloppe : le poids Q que nous trouvons par cette méthode, est, comme nous le verrons dans la deuxième Section de ce Chapitre, la moitié de celui qui est nécessaire pour plier une corde placée dans la gorge d'une poulie du même diamètre que le rouleau,

il faut, dans toutes les expériences de cette Section, empêcher, avec le plus grand soin, les cordes pliées sur le rouleau de se toucher & de frotter l'une contre l'autre.

SECTION PREMIÈRE.

Expériences pour déterminer la roideur des cordes, en employant l'appareil de M. Amontons.

105. **D**ANS les expériences qui suivent, nous avons toujours réuni la moitié du poids du cylindre bb' au poids du petit bassin Q , parce que le centre de gravité de ce cylindre n'a, relativement au point de suspension qui répond, n.º 2, à la verticale gd , qu'un bras de levier égal au rayon du cylindre, tandis que le levier du poids Q est égal à son diamètre.

106. Nous avons fait fabriquer dans la corderie d'un des principaux Ports de France, avec du chanvre de premier brin, trois cordes à trois torons : les fils de carret qui forment les torons, se trouvoient réduits à l'ordinaire par les différentes torsions données dans l'atelier aux deux tiers à peu près de leur longueur primitive : ces trois cordes sont les mêmes qui nous ont servi ensuite pour déterminer, au moyen d'une poulie, le frottement des axes.

CORDE, n.º 1. Cette corde étoit formée de six fils de carret ou de trois torons de deux fils de carret chacun : la circonférence de la corde étoit de $12\frac{1}{2}$ lignes; les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{2}{4}$ gros.

CORDE, n.º 2. Cette corde étoit composée de quinze fils de carret, ou de trois torons de cinq fils chacun : le tour de la corde étoit de 20 lignes; les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{25}{4}$ gros.

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 263

CORDE, n.^o 3. Cette corde étoit formée de trente fils de carret, ou de trois torons de dix fils de carret chacun : le tour de la corde étoit de 28 lignes, & les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{49}{4}$ gros.

Pour mettre ces cordes à peu près dans le même état que celles dont nous nous servons dans la manœuvre des machines, on les plaçoit dans la gorge d'une poulie ; l'on y suspenoit des deux côtés un poids de 4 à 500 livres ; un homme faisoit alternativement monter & descendre ce poids de 8 ou 10 pieds de hauteur pendant une grosse heure : lorsque la corde avoit ainsi acquis une flexibilité à peu près uniforme dans toute sa longueur, on la soumettoit aux expériences qui devoient déterminer sa roideur. Cette préparation est absolument indispensable, si l'on veut éviter des irrégularités qui nous mettroient hors d'état de tirer aucun parti des expériences.

Les rouleaux bb' , dont on s'est servi depuis le diamètre d'un pouce jusqu'à celui de 6 pouces, avoient été tournés avec le plus grand soin : la moitié de leur poids a toujours été ajoutée, dans les expériences, à celui du petit bassin Q ; lorsque le poids du rouleau étoit considérable, on le soutenoit au moyen d'un petit contre-poids ϕ , & d'une ficelle qui passoit sur une petite poulie n (*Fig. 13*, n.^o 2.) attachée à la poutre AA' . Dans la réduction de la charge du petit bassin Q , l'on avoit égard à ce petit contre-poids.

107. Les trois Tables qui suivent, représentent les forces nécessaires pour plier nos trois cordes autour de différens rouleaux : la première colonne désigne le poids du plateau BB' & de sa charge : les autres colonnes marquent en livre & dixième de livre la charge du bassin Q réunie à la moitié du poids du rouleau bb' , dans l'instant où ce rouleau commence à descendre : en tête de chaque colonne, l'on trouve en pouce le diamètre des rouleaux qui ont servi aux expériences.



TABLE pour déterminer la roideur des cordes à trois torons non goudronnées.

POIDS qui tend les CORDES en livres.	I. ^{re} TABLE.			II. ^e TABLE.			III. ^e TABLE.		
	CORDE, n. ^o 1, de 6 fils de carret.			CORDE, n. ^o 2, de 15 fils de carret.			CORDE, n. ^o 3, de 30 fils de carret.		
	Diamètre des rouleaux.			Diamètre des rouleaux.			Diamètre des rouleaux.		
	1 pouc.	2 pouc.	4 pouc.	1 pouc.	2 pouc.	4 pouc.	2 pouc.	4 pouc.	6 pouc.
lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb
25	2,0	*	*	7,0	3,2	1,7	11,0	5,0	*
125	11,0	4,0	*	22,0	9,0	5,0	21,0	8,5	*
225	17,0	6,5	*	30,0	17,0	7,0	29,0	14,0	*
425	31,0	12,0	5,7	65,0	31,0	13,0	47,0	23,0	*
625	43,0	15,0	7,2	92,0	41,0	16,7	67,0	31,0	*
1025	*	*	11,0	*	*	27,0	*	50,0	34,0

108. La Table qui précède est le résultat d'un travail long & pénible ; mais malgré tous les soins que l'on a pu prendre pour rendre les expériences exactes , elles ne sont pas parfaitement régulières : cependant elles suffisent , dans la pratique , pour conclure que , sous les grandes tensions , les forces nécessaires pour plier les cordes autour de différens rouleaux , sont à peu près en raison directe des tensions des cordes , & inverse du diamètre des rouleaux (a) , comme l'ont trouvé MM. Amon-ton & Défaguiers ; mais elles ne sont pas , ainsi que l'ont voulu

(a) Il paroît par la Table qui précède , & par quelques autres expériences , que les forces nécessaires pour plier les cordes autour des rouleaux , croissent pour les petits rouleaux dans un plus grand rapport que celui suivant lequel le diamètre des rouleaux diminue ; mais lorsqu'il le diamètre des rouleaux est très grand , relativement à celui des cordes , ce qui a presque toujours lieu dans la pratique , pour lors la loi que nous établissons ici est assez conforme à l'expérience.

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 265

ces deux Auteurs, en raison directe du diamètre des cordes : car si l'on compare nos trois cordes pliées autour d'un rouleau de 4 pouces, & tendues par un poids de 625 livres, l'on trouvera pour la force qui plie les cordes :

N.º 1. Corde de 6 fils & de $12\frac{1}{2}$ lignes de tour. 7,2 lb

N.º 2. Corde de 15 fils & de 20 lignes de tour. 16,7

N.º 3. Corde de 30 fils & de 28 lignes de tour. 31,0.

Nous avons ici même rouleau & même tension ; ainsi en supposant, en pareil cas, que les forces qui plient les cordes sont comme une puissance m de leur diamètre, nous aurons, en comparant n.º 1 avec n.º 3, $31,0 : 7,2 :: 28^m : 12\frac{1}{2}^m$, d'où

$$m = \frac{\log. \left(\frac{310}{72} \right)}{\log. \left(\frac{28}{12\frac{1}{2}} \right)} \dots\dots\dots 1,8$$

En comparant n.º 1 avec n.º 2, l'on aura $m \dots\dots 1,7$

En comparant n.º 2 & n.º 3, l'on aura $m \dots\dots 1,8$.

Il résulte de ces trois expériences, & généralement de toutes celles comprises dans notre Table, que les forces nécessaires pour plier les cordes autour d'un rouleau sont très-approchant comme le carré des diamètres des cordes : il paroît cependant que la valeur de cette quantité m n'est pas la même dans toutes les espèces de cordes ; elle dépend pour les cordes d'une même fabrique, de l'usé & du plus ou moins de flexibilité de la corde ; mais quoiqu'elle diminue à mesure que les cordes s'usent, je ne l'ai jamais trouvée au dessous du nombre 1,4.

Il se pourroit que les forces nécessaires pour plier des ficelles d'une ou deux lignes de diamètre, telles que celles mises en expériences par MM. Amontons & Désaguiers,

fulsent , à cause de leur grande flexibilité , comme le simple diamètre des cordes : d'ailleurs , M. Délaguilliers (Cours de Physique , tom. I , pag. 247 & 248.) avoue que lorsqu'il s'est servi d'une corde de $\frac{5}{10}$ pouces de diamètre , c'est la plus grosse qu'il ait employée , il a trouvé que la force nécessaire pour plier cette corde a été à proportion plus considérable que dans les autres. Mais ce que je puis assurer , c'est qu'en comparant des cordes d'une grosseur suffisante pour manœuvrer plusieurs quintaux , que les cordes soient neuves ou vieilles , pourvu qu'elles aient servi à peu près également , jamais l'on ne trouvera le nombre m aussi petit que l'unité : je l'ai trouvé une seule fois égal à 1,4 ; mais les cordes étoient si usées qu'elles étoient presque hors d'état de servir.

109. Le rapport donné par MM. Amontons & Délaguilliers , relativement à la tension proportionnelle aux forces qui plient les cordes , exige , dans les gros cordages , une correction dont ces deux Auteurs travaillant en petit , n'ont pas pu s'appercevoir. Si l'on examine la première colonne de notre troisième Table , où la corde est de trente fils de carret , & le rouleau de 2 pouces de diamètre , l'on trouvera qu'avec une tension de 25 livres , il faut 11 livres pour faire descendre le rouleau , tandis qu'avec une tension de 625 livres , il faut 67 livres. Si nous retranchons 11 livres de 67 livres , il en résultera qu'une augmentation de tension égale à 600 livres exige , pour faire descendre le rouleau , une force de 56 livres , ce qui , suivant la règle , donneroit 9,3 livres par quintal , & conséquemment $2, \frac{3}{10}$ pour une tension de 25 livres. Mais nous trouvons par l'expérience , qu'une tension de 25 livres exige 11 livres pour vaincre la roideur de notre corde , ainsi c'est 8,7 livres de plus que nous n'aurions dû avoir. Cependant si en comptant sur une force de 11 livres pour une tension de 25 livres , nous calculons pour tous les autres degrés de tension à raison de 9,3 livres par quintal , nous trouverons , pour les forces qui plient la corde , à peu près les mêmes nombres que

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 267

dans nos expériences : c'est ce que l'on peut voir dans la petite Table que je joins ici, où la deuxième colonne est donnée par l'expérience, & où la troisième est calculée.

CORDE, n.º III, de trente fils de carret, rouleau de 2 pouces.		
TENSION en livre.	EXPÉRIENCE.	THÉORIE calculée.
lb	lb	lb
25	11	11,0
125	21	20,3
225	29	29,6
425	47	48,2
625	67	67,0

Les forces requises pour plier une corde autour d'un rouleau, sont donc, d'après cette observation, représentées par deux termes; le premier est une quantité constante, & l'autre est proportionnel au poids qui tend la corde : la quantité constante ne peut être attribuée qu'aux différens degrés de tension & de torsion que les cordes éprouvent dans leur fabrique. Chaque fil de carret y est tendu par une certaine force, & il conserve son degré de tension lorsque la corde est ourdie, parce que les fils de carret ferrés & engagés les uns dans les autres, sont retenus par leur frottement. Ainsi dans une corde qui soutient un poids, chaque fil est tendu, non seulement par le poids qu'il soutient, mais encore suivant le degré de tension qu'il conserve d'après l'ourdissage de la corde : or si les forces nécessaires pour plier une corde sont proportionnelles aux tensions, il en résulte qu'elles seront proportionnelles à une quantité constante plus au poids dont la corde est chargée; cette quantité constante doit varier suivant le degré de tension & de torsion que l'on fait éprouver aux cordes dans leur fabrique : dans des cordes neuves à trois torons, elle suit assez exactement le rapport du carré des diamètres des cordes : lorsque les cordes servent depuis longtemps, les fils de carret se détendent, & la quantité constante qui répond à leur tension primitive diminue.

Cette quantité constante diminue encore proportionnellement au diamètre des rouleaux. Ainsi la formule qui

Ll ij

268 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

représentera les forces nécessaires pour plier les cordes, sera assez exactement exprimée par $\frac{r^m}{R} (a + b P)$ où r est le diamètre de la corde ; R est le diamètre du rouleau ; a & b sont deux quantités constantes que l'expérience détermine pour des cordes d'une même nature ; P est le poids que soutient la corde ; m , art. 108, est égale à 1,7 pour les cordes neuves, & à 1,4 pour les vieilles cordes.

Si nous voulons déterminer les quantités a & b d'après les expériences & les observations de cet article, où la corde de trente fils de carret, dont le diamètre est à peu près 9 lignes, se plie sur un rouleau de 24 lignes de diamètre, nous aurons $\frac{r^m a}{R} = \frac{9^{\frac{17}{10}}}{24} a = 8,7 \text{ lb}$, & $\frac{r^m b}{R} 100 \text{ lb} = \frac{9^{\frac{17}{10}}}{24} 100 \text{ lb}$ $b = 9,3 \text{ lb}$, d'où l'on tirera facilement a & b . Il faut seulement remarquer que comme le rouleau, dans nos expériences, est soutenu par deux cordes, la quantité que nous trouvons pour la constante a est double de celle que nous trouverions pour une seule corde.

Cable blanc de cent douze fils de carret à quatre torons.

110. Pour rendre notre travail plus utile dans la pratique, nous allons rapporter le résultat de quelques expériences pour déterminer les forces nécessaires pour plier les cables autour d'un rouleau.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Nous avons mis en expérience un cable formé de quatre torons, de vingt-huit fils de carret chacun, en tout cent douze fils ; au centre de ce cable étoit une meche pour remplir le vide que la réunion des quatre torons laisse entre eux : le tour du cable étoit de 57 lignes ; les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{170}{4}$ gros.

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 269

I.^{er} ESSAI. Ce cable éprouvé sous une tension de 1000 livres, & roulé autour d'un cylindre de 6 pouces de diamètre, suivant la méthode d'Amontons, n'a été mené que par un poids de 100 livres.

II.^e ESSAI. Avec le même rouleau de 6 pouces & une tension de 100 livres, le rouleau n'a été entraîné que par une force de 19 livres.

Observations sur cette Expérience.

III. En comparant ce cable avec la corde de trente fils de carret qui, dans la troisième Table, art. 107, lorsqu'elle est tendue par un poids de 1000 livres, & qu'elle enveloppe un rouleau de 6 pouces, exige une force de 34 livres pour faire descendre le rouleau, l'on trouve en suivant le procédé de l'ar-

ticle 108, $m = \frac{\log. \left(\frac{100}{34} \right)}{\log. \frac{57}{28}} = 1,5$, quantité plus petite que

celle que nous avons trouvée par nos premières expériences; quoique le cable fût presque neuf: l'on ne doit pas être surpris de cette diminution dans la quantité m , parce que, comme nous l'avons observé, il y avoit ici une meche de 10 ou 12 lignes de tour au centre du cable; & que, dans la fabrique des cables, il n'est pas possible que chaque fil de carret se tende aussi parfaitement que dans les cordes d'une grosseur moyenne.

Roideur des cordages blancs imbibés d'eau.

112. Comme dans l'usage des machines il arrive souvent que les cordes sont mouillées par la pluie, nous avons cherché quelles étoient les forces nécessaires pour plier nos trois cordes n.^o 1, 2 & 3 sur différens rouleaux, après qu'elles ont eu trempé dans l'eau pendant 5 ou 6 heures, & nous avons trouvé les résultats contenus dans la Table qui suit.

TABLE pour évaluer la roideur des cordes blanches imbibées d'eau.

POIDS quitend les CORDES en livre.	I. ^{re} TABLE.		II. ^e TABLE.		III. ^e TABLE.	
	CORDE, n. ^o 1, de 6 fils de carret.		CORDE, n. ^o 2, de 15 fils de carret.		CORDE, n. ^o 3, de 30 fils de carret.	
	Diamètre des rouleaux.		Diamètre des rouleaux.		Diamètre des rouleaux.	
	2 pouces.	4 pouces.	2 pouces.	4 pouces.	2 pouces.	4 pouces.
lb	lb	lb	lb	lb	lb	lb
25	*	5	5,0	2,0	2,5	9,0
125	4,5	2,2	11,0	4,5	35,0	13,0
225	7,0	3,0	17,0	*	45,0	17,0
425	11,0	5,1	28,0	10,0	64,0	26,0
625	14,0	6,5	38,0	15,0	82,0	35,0
1625	*	*	*	23,0	*	5,4

Nous avons marqué, dans cette Table, d'une * les expériences qui n'ont pas été faites, ou que nous n'avons pas retrouvées sur notre registre. Si nous comparons ce Tableau avec celui de l'article 107, nous trouvons que, relativement aux deux cordes de quinze & de six fils de carret, l'humidité a plutôt augmenté la flexibilité de la corde que sa roideur. Les mêmes forces répondent à peu près au même degré de tension dans les deux Tableaux : il n'y a ici que la corde, n.^o 3, de trente fils de carret dont l'augmentation de roideur paroît très-sensible, sur-tout lorsqu'elle n'est chargée que de 25 livres : car nous trouvons ici, troisième Table, qu'avec un rouleau de 2 pouces de diamètre, la force qu'il faut pour plier la corde de trente fils de carret mouillée, & pour faire descendre le rouleau, est elle-même de 25 livres, au lieu que nous la trouvons seulement de 11 livres pour la corde sèche. Mais si nous

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 271

retranchons 25 livres de 82 livres, force qui répond ici, dans l'avant-dernière colonne, à une charge de 625 livres, nous trouvons qu'avec la corde, n.^o 3, mouillée, une augmentation de charge de six quintaux exige, pour faire descendre le rouleau de 2 pouces, une force de 57 livres : or nous avons trouvé en pareille circonstance pour la corde sèche 56 livres. Ainsi l'augmentation de roideur que nous trouvons ici est mesurée uniquement par une quantité constante qu'il faut attribuer à l'augmentation de tension, que l'eau, en s'insinuant dans les interstices de la corde & en y adhérant, fait contracter à tous les fils. Si cette augmentation de tension ne produit pas un effet sensible dans les petites cordes, c'est peut-être parce que l'eau s'en exprime avec beaucoup de facilité.

Evaluation de la roideur des cordes goudronnées.

113. Les cordes goudronnées étant les seules dont on fasse usage dans la Marine pour les manœuvres à découvert, nous avons cherché à déterminer, par plusieurs expériences, les forces nécessaires pour plier cette espèce de corde ; nous nous contenterons d'en rapporter les résultats.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Corde goudronnée neuve, de trente fils de carret.

Nous avons soumis à l'expérience une corde goudronnée neuve, de trois torons de dix fils de carret chacun ; elle avoit 33 lignes de circonférence ; les 6 pouces pesoient $\frac{57}{4}$ gros.

I.^{re} ESSAI. Nous avons trouvé qu'avec un rouleau de 6 pouces & une charge de 1000 livres, il falloit, pour faire descendre le rouleau, une force de 42 livres.

II.^e ESSAI. Nous avons trouvé qu'avec un rouleau de 4 pouces, il falloit, pour une charge de 1000 livres, une force de 65 livres pour faire descendre le rouleau, & que, pour une charge de 25 livres, il falloit une force de 8 livres.

272 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

III.^e ESSAI. Avec un rouleau de 2 pouces & une charge de 25 livres, il faut 21 livres pour faire descendre le rouleau.

II.^{eme} EXPÉRIENCE.

Corde goudronnée neuve, de quinze fils de carret.

Nous avons mis en expérience une corde neuve goudronnée, & à trois torons de cinq fils de carret chacun; sa circonférence étoit de 24 lignes, & 6 pouces de longueur pesoient $\frac{28}{4}$ gros.

I.^{er} ESSAI. Sur un rouleau de 4 pouces, avec une charge de 1000 livres, il falloit, pour faire descendre le rouleau, une force de 30 livres; & pour une charge de 25 livres, il falloit à peu près 2 livres & demie.

III.^{eme} EXPÉRIENCE.

Corde goudronnée neuve, de six fils de carret.

Nous avons mis en expérience une corde neuve goudronnée, formée de trois torons de deux fils de carret chacun; elle avoit 13 lignes de tour; les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{12}{4}$ gros,

I.^{er} ESSAI. Avec un rouleau de 2 pouces de diamètre, la corde éprouvée depuis 25 livres jusqu'à 600 livres; le poids qui entraînoit le rouleau s'est trouvé de 25 livres par millier; la constante à ajouter n'alloit pas à $\frac{3}{4}$ livres.

II.^e ESSAI. Avec un rouleau de 4 pouces de diamètre, le poids qui entraîne le rouleau est de 12 livres par millier; la quantité constante est trop petite pour que l'expérience puisse la saisir.

R É S U L T A T.

114. Il résulte des expériences que nous venons de rapporter, que les forces qu'il faut employer pour plier une corde goudronnée

goudronnée autour d'un rouleau, seront exprimées par les mêmes formules que nous avons trouvées pour les cordes blanches, c'est-à-dire, qu'il faut ajouter au degré de force qui répond à la charge de la corde, une quantité constante, relative à celle que nous avons trouvée à l'article 109.

Si nous comparons, pour les cordes formées du même nombre de fil de carret, la roideur d'un cordage goudronné avec celle d'un cordage blanc, nous trouverons en général que les forces employées pour plier la corde goudronnée, sont à peine d'un sixième plus considérable que celle qu'il faut employer pour vaincre la roideur de la même corde non goudronnée : car, en prenant pour exemple les différentes cordes blanches ou goudronnées que nous avons soumises à l'expérience, nous trouvons qu'avec un cylindre de 4 pouces & une charge d'un millier, nous aurons :

Cordes blanches.

Les cordes chargées de 1025 lb.

N. ^o 1. Six fils de carret, il faut, pour vaincre la roideur, 11 lb	Article 107.
N. ^o 2. Quinze fils de carret,	27.
N. ^o 3. Trente fils de carret,	50.

Cordes goudronnées.

Les cordes chargées de 1000 lb.

Corde de six fils de carret.	12 lb	Article 113.
Corde de quinze fils de carret.	30	
Corde de trente fils de carret.	65.	

La roideur des deux espèces de corde diffère peu pour les cordes de six & de quinze fils (1); il n'y a que dans les gros

(1) En comparant les résultats trouvés pour les cordes goudronnées, comme nous l'avons fait, art. 108, pour les cordes blanches, l'on trouve que la roideur des cordes goudronnées suit à peu près le rapport du nombre de fils de carret qui les compose.

274 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

cordages où l'augmentation de roideur pour les cordes goudronnées devient sensible ; mais il paroîtroit qu'elle dépend encore ici, au moins en grande partie, comme nous l'avions déjà trouvée dans les cordes imbibées d'eau , de l'augmentation du terme constant, ou du degré de tension indépendant de la charge, que le goudron , en remplissant les interstices de la corde, fait contracter à tous les fils qui la composent.

115. Lorsqu'on a soumis à l'expérience du vieux cordage goudronné , l'on a trouvé qu'il avoit à peu près la même roideur que le cordage goudronné neuf : si d'un côté , par l'usage , les parties du chanvre se détendent ; de l'autre , l'exposition à l'air & à la pluie durcit le goudron : trois cordes, l'une de six fils de carret, l'autre de quinze , & la troisième de trente fils de carret qui servoient depuis quinze mois dans les manœuvres d'un vaisseau qui venoit de faire campagne, ont donné à peu près les mêmes résistances que les cordes neuves goudronnées.

116. Rien n'est si facile que d'appliquer à la pratique les résultats qui précèdent : nous allons en donner un exemple, en cherchant les forces nécessaires pour plier les cordes de nos expériences autour d'un rouleau d'un pied de diamètre ; mais il faut toujours remarquer, comme nous le verrons plus bas, art. 121 , que les forces nécessaires pour plier les cordes dans la méthode d'Amontons, ne sont que la moitié de celles qu'il faudroit employer pour vaincre cette roideur en élevant un poids avec une poulie ou un cabestan.

Nous trouvons , art. 107 , qu'une corde blanche de trente fils de carret, se roulant autour d'un cylindre de 4 pouces de diamètre, exige, pour faire descendre le cylindre, une force de 50 livres sous une charge de 1025 livres. Nous trouvons également qu'il faut 5 livres de force pour une charge de 25 livres. C'est donc, indépendamment de la quantité constante, une force de 45 livres par millier, & 4 livres à peu près pour la force constante indépendante de la charge ; mais comme la charge & le rouleau sont soutenus par deux cordes, la conf-

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 275

tante qui répond à une seule corde n'est que de 2 livres : ainsi si nous voulons nous servir de cette corde sur une poulie de 12 pouces de diamètre, il faut prendre, pour les forces qui plient la corde, le tiers des quantités trouvées pour un rouleau de 4 pouces ; ce fera $\frac{7}{10}$ livres pour la constante, & 15 livres par millier de charge. Nous calculerons, par le même moyen, les autres cordes, & nous aurons :

Forces nécessaires pour plier les cordes blanches autour d'un rouleau dans la Méthode de M. Amontons.

Corde blanche de trente fils de carret, N.º 3.

Sur un rouleau de 4 pouces de diamètre, la quantité constante est	2 lb
La force proportionnelle à la charge est par quintal.	4,5
Sur un rouleau de 12 pouces, la force constante est de	0,7
La force proportionnelle à la charge est par quintal.	1,5.

Corde blanche de quinze fils de carret, N.º 2.

Sur un rouleau de 4 pouces, la force constante est de $\frac{5}{10}$ livres, & celle proportionnelle à la tension, de 2,6 livres par quintal.

Corde blanche de six fils de carret, N.º 1.

Sur un rouleau de 4 pouces de diamètre, la force constante peut s'évaluer à $\frac{1}{10}$ livres, & la force proportionnelle aux charges, à 1,1 livres par quintal.

Corde goudronnée de trente fils de carret.

Sur un rouleau de 4 pouces, la force constante peut s'évaluer

M m ij

276 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

à 3,3 livres, & la force proportionnelle aux charges, à 5,8 livres par quintal.

Corde goudronnée de quinze fils de carret.

Sur un rouleau de 4 pouces, la force constante peut s'évaluer à une livre, & la force proportionnelle à la charge, à 2,8 livres par quintal.

Corde goudronnée de six fils de carret.

Sur un rouleau de 4 pouces, la force constante peut s'évaluer à $\frac{2}{10}$ livres, & la force proportionnelle aux charges, à 1,2 livres par quintal.

Quant aux forces qui répondent à la grosseur des cordes, & qu'il faut employer pour les plier autour d'un rouleau, elles se calculeront assez exactement dans la pratique, en se conformant pour les cordes blanches, suivant qu'elles seront vieilles ou neuves, aux observations de l'article 109; & pour les cordes goudronnées les plus en usage dans la Marine, en supposant ces forces proportionnelles au nombre des fils de carret qui entrent dans la corde.

117. Les expériences des cordes goudronnées ont été faites pendant l'hiver par un vent d'ouest, le thermomètre de Reaumur de 5 ou 6 degrés au dessus de la congélation; mais il paroît que la gelée augmente la roideur de cette espèce de cordage, sur-tout dans les grosses cordes : la corde de quinze fils de carret goudronnée, éprouvée le thermomètre de 4 degrés au dessous de la congélation, a demandé une force plus grande à peu près d'un sixième que lorsque le thermomètre étoit de 6 degrés au dessus de la congélation; mais cette augmentation ne suit pas le rapport des charges; c'est encore ici la partie de la force qui est constante, qui paroît augmenter le plus sensiblement.

Addition envoyée après le jugement du Prix, pour être insérée à la fin de l'art. 117, relatif à la roideur des cordes.

Dans le courant des expériences de cette Section, nous avons oublié de prévenir, & ce résultat a également lieu de quelque manière & de quelque procédé dont on se serve pour éprouver la roideur des cordes, que si les cordes étant chargées, l'on relève le rouleau en le tournant à force de bras, & que l'on le laisse tomber tout de suite, la roideur de la corde sera souvent d'un tiers plus petite que dans nos expériences. Ce résultat a lieu avec les cordes blanches comme avec les goudronnées, avec les vieilles comme avec les neuves. Il est seulement plus sensible avec les grosses cordes & avec les neuves qu'avec les petites, avec les petits rouleaux qu'avec les gros : mais si l'on laisse le rouleau remonté quelque temps en repos, sans l'obliger à redescendre, l'on trouvera que la roideur de la corde augmente sensiblement, & qu'elle ne parvient à sa limite, telle que nous l'avons trouvée dans nos expériences, qu'après un repos de 5 ou 6 minutes. Ainsi dans un mouvement alternatif où les forces seroient employées à faire monter & descendre un poids, comme, par exemple, dans les sonnettes qui servent à élever le mouton pour battre les pilotis, la roideur de la corde seroit un peu moindre que dans nos expériences. Il en seroit de même d'une corde qui passeroit sur deux poulies très-proche l'une de l'autre : pour peu que le mouvement fût rapide, la force qu'il faudroit employer pour vaincre la roideur de la corde, en la pliant sur la deuxième poulie, seroit moindre, quoique sous le même degré de tension, que la force employée à la plier sur la première.

Il paroît résulter de cette observation, que les parties de la corde pliée ne se redressent que lentement, comme nous l'observerons dans la théorie des cordes, & que la roideur plus ou moins grande dépend du redressement des parties.

Cette observation au surplus doit rarement influencer dans les

278 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

calcul des machines destinées à la Marine, dont les mouvements sont lents, & où les poulies sont presque toujours assez éloignées l'une de l'autre, pour que chaque partie de la corde, en passant d'une poulie à l'autre, ait le temps de reprendre toute sa roideur. D'ailleurs il est presque toujours nécessaire, dans l'évaluation des machines, de calculer les résistances dans le cas le plus défavorable pour les forces motrices.

SECTION DEUXIÈME.

Deuxième méthode pour déterminer, par l'expérience, la force nécessaire pour plier les cordes, & pour vaincre le frottement d'un cylindre, ou d'une roue qui roule sur un plan.

118. **L**A Méthode que je vais décrire, & qui m'a été utile pour déterminer la roideur des cordes, & le frottement des cylindres qui roulent sur des plans horizontaux, est plus directe que celle de M. Amontons : elle a d'ailleurs l'avantage de faire connoître les forces nécessaires pour plier une corde sur un rouleau d'un pied de diamètre ; ce qui n'est pas praticable dans la première méthode, sans employer un contre-poids pour soutenir le poids du rouleau, ce qui, multipliant les forces, jette nécessairement de l'incertitude dans le résultat des expériences.

Frottement des rouleaux.

-FIGURE 14.

119. L'on a posé sur deux treteaux de 6 pieds de hauteur, solidement assis (Fig. 14, n.^o 1 & 2.), deux pièces de bois équarries : sur ces deux pièces de bois, l'on a fixé deux règles de chêne DD, D'D' dressées à la varlope, & polies avec une peau de chien de mer : l'on a fait tourner avec soin deux cylindres de bois de gaïac, l'un de 6 pouces de diamètre, & l'autre de 2 pouces : l'on a fait également exécuter autour plusieurs cylindres de bois d'orme, depuis 2 jusqu'à 12 pouces de diamètre.

L'on a posé successivement les rouleaux sur les deux règles de chêne, de manière que l'axe des rouleaux se trouvoit, ainsi qu'on le voit (*Fig. 14.*), perpendiculaire à l'alignement des règles dont avoit arrondi les arêtes : les deux règles étoient parfaitement de niveau : l'on suspendoit des deux côtés du rouleau des poids de 50 livres, avec des ficelles très-flexibles de 2 lignes de tour, & dont la roideur n'étoit pas le trentième de celle de notre corde de six fils de carret : au moyen de plusieurs ficelles distribuées sur les rouleaux, & chargées chacune de 50 livres de chaque côté, l'on produisoit sur les règles une pression déterminée : l'on cherchoit ensuite, au moyen d'un petit contre-poids que l'on suspendoit alternativement des deux côtés du rouleau, quelle étoit la force nécessaire pour lui donner un mouvement continu insensible, ou pour vaincre son frottement. Voici le résultat des expériences dans lesquelles, à chaque essai, l'on commençoit par ébranler le rouleau.

Rouleaux de bois de gaïac.

CHARGE des ROULEAUX, leur poids compris.	FORCES qui produisent un mouvement continu très - lent.	
	DIAMÈTRE des rouleaux, 6 pouces.	DIAMÈTRE des rouleaux, 2 pouces.
100 lb	0,6 lb	1,6 lb
500	3,0	9,4
1000	6,0	18,0

Il résulte de cette Table, que le frottement des cylindres qui roulent sur des plans horizontaux, est en raison directe des pressions, & inverse du diamètre des rouleaux. Nous avons éprouvé que les enduits ne donnent ici aucune diminution sensible dans les frottemens.

Rouleaux de bois d'orme.

Les rouleaux de bois d'orme ont donné un frottement de $\frac{2}{5}$ plus grand que les rouleaux de gaïac : avec un rouleau d'orme de 6 pouces de diamètre, nous avons trouvé, pour une pression de 1000 livres, le frottement de 10 livres, & de 5 livres avec un rouleau de 12 pouces de diamètre : l'on remarque seulement que, sous les petites pressions, le frottement paroît un peu plus grand que celui qui résulteroit de la loi des frottemens proportionnels aux pressions ; mais cette différence est trop peu considérable, pour pouvoir produire des erreurs sensibles dans la pratique.

Evaluation de la roideur des cordes d'après les Expériences de cette nouvelle Méthode.

120. Le frottement des rouleaux nous étant connu par l'article qui précède, nous allons, au moyen de quelques Expériences, chercher les forces qui sont nécessaires pour plier des cordes chargées de différens poids, posées sur ces mêmes rouleaux, ou sur des poulies du même diamètre.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Corde blanche, n.º 3, de trente fils de carret, sur rouleau de bois d'orme de 12 pouces de diamètre pesant 110 livres.

I.º ESSAI. Chaque côté de la corde étant chargé de 100 livres, il a fallu un poids de 5 livres pour faire mouvoir le système d'un mouvement insensible continu.

II.º ESSAI. Chargé de 300 livres de chaque côté, il a fallu 11 livres.

III.º ESSAI. Chargé de 500 livres, il a fallu 20 livres.

II.º

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 281

II.^{ème} EXPÉRIENCE.

Même corde , n.º 3 , de trente fils de carret , sur rouleau de bois d'orme , de 6 pouces de diamètre , pesant 25 livres.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté chargé de 200 livres , il faut , en imprimant une vitesse insensible au rouleau , pour que le mouvement soit continu , une traction de 18 livres.

III.^{ème} EXPÉRIENCE.

Même corde de trente fils de carret , sur rouleau de gaïac , de 6 pouces de diamètre , pesant 50 livres.

I.^{er} ESSAI. Le rouleau chargé de 200 livres de chaque côté , il faut un poids de 16 livres pour produire un mouvement continu.

IV.^{ème} EXPÉRIENCE.

Même corde de trente fils de carret sur rouleau de gaïac , de 2 pouces de diamètre , pesant 4 livres & demie.

I.^{er} ESSAI. Chargé de 25 livres de chaque côté , il faut , en imprimant une vitesse insensible , pour que le mouvement soit continu , une force de traction de 11 livres.

II.^e ESSAI. Chargé de 200 livres , il faut , en imprimant une vitesse insensible , pour que le mouvement soit continu , une traction de 52 livres.

V.^{ème} EXPÉRIENCE.

Corde de quinze fils de carret , n.º 2 , sur rouleau de gaïac , de 6 pouces de diamètre , pesant 50 livres.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté chargé de 25 livres , il faut 1 lb ½

II.^e ESSAI. Chaque côté chargé de 100 livres , . . 6

III.^e ESSAI. Chaque côté chargé de 200 livres , . . 11

IV.^e ESSAI. Chaque côté chargé de 500 livres , . . 24.

282 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

VI.^{ème} EXPÉRIENCE.

Corde de six fils de carret, n.^o 1, sur rouleau de gaïac, de 6 pouces de diamètre.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté chargé de 100 livres, il faut 3 lb

II.^e ESSAI. Chaque côté chargé de 200 livres, . . . 6.

Calcul des Expériences pour le rouleau de 12 pouces.

120. En ajoutant le poids du rouleau à celui dont les cordes sont chargées, nous aurons le résultat de la première expérience sous la forme suivante :

I. ^{ère} EXPÉRIENCE. I. ^{er} ESSAI. Pression.	315 lb	Le frottement calculé d'après l'art. 119.	1,5 lb
II. ^e ESSAI.	721	3,6
III. ^e ESSAI.	1130	5,6.

En retranchant ces frottemens des quantités trouvées à chaque expérience, il reste, pour la force qui plie la corde sur un rouleau de 12 pouces de diamètre :

I. ^{ère} EXP. I. ^{er} ESSAI. La corde chargée de 100 lb	Roideur de la corde.	3,5 lb
II. ^e ESSAI. 300	7,4
III. ^e ESSAI. 500	14,4.

Nous trouverions, art. 116, par la méthode de M. Amon-
rons, que les forces nécessaires pour plier une pareille corde
sur un rouleau de 12 pouces, sont :

Pour une tension de 100 livres,	2,2 lb
Pour une tension de 300 livres,	5,2
Pour une tension de 500 livres,	8,2.

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 283

*Calcul pour les trois cordes, avec un rouleau de gaïac
de 6 pouces de diamètre.*

Corde, n.º 3, de trente fils de carret.

Dans la troisième Expérience, les règles sont chargées de
466 livres, le frottement, art. 119, 2,8 lb;
il reste, pour la roideur de la corde. 13,2.

Nous trouverions pour cette force, par la méthode de M.
Amontons, art. 116, 7,4 lb.

Corde, n.º 2, de quinze fils de carret.

Dans la cinquième Expérience, les règles sont chargées;
dans le troisième essai, de 461 livres; le frottement des
rouleaux est de 2,8 lb;
il reste, pour la roideur de la corde, 8,2.

Nous trouverions, par la méthode de M. Amontons;
art. 116, 3,7 lb.

Dans le quatrième essai de la même Expérience, les règles
sont chargées de 1074 livres, le frottement est de 6,4 lb;
il reste, pour la roideur de la corde, 17,6.

Nous trouverions, art. 116, pour cette force, . 8,9 lb.

Corde, n.º 1, de six fils de carret.

Dans la sixième Expérience, les règles sont chargées au
deuxième essai de 456 livres, c'est pour le frottement 2,7 lb;
il reste, pour la roideur de la corde, 3,3.

Nous trouverions, par l'art. 116, 1,5 lb.

Il résulte des calculs qui précèdent, que la force nécessaire
pour plier une corde autour d'une poulie mobile sur son axe, est
double de celle que nous avons trouvée par la méthode de M.
Amontons; il n'y a que la corde de trente fils de carret, pre-

284 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

mière & troisième Expériences, qui ne donne pas tout à fait le double des forces déterminées par l'art. 116; mais cette différence doit être attribuée à ce que la roideur de notre corde n'a été éprouvée, par cette deuxième méthode, qu'à la fin de nos opérations, lorsqu'elle étoit usée par un grand nombre d'essais; au lieu que, lorsqu'elle a été mise en expérience, par la méthode de M. Amontons, elle n'avoit été encore rompue que par quelques opérations décrites au commencement de la Section précédente.

La correspondance que nous trouvons ici entre des résultats auxquels nous sommes parvenus par deux marches d'expériences absolument différentes, leur sert de preuves réciproques. Il n'est plus question que de voir pourquoi les forces trouvées par notre deuxième méthode, sont doubles de celles trouvées par la première.

121. (a) La Fig. 15 qui correspond au n.^o 2 de la treizième Figure, représente une partie de l'appareil de M. Amontons; la corde Q P soutient la charge P: en Π est le poids qui plie la corde autour du rouleau: la roideur de la corde fait prendre à sa partie inférieure une courbure $e n g$, excentrique au cercle de la section du rouleau; mais la partie supérieure $n L$ de la corde qui se déroule, reprenant son état naturel, n'oppose point de résistance, en sorte que la partie supérieure de la corde est verticale & tangente au rouleau: dans le moment où l'on suppose que tout le système est prêt à se mouvoir, le rouleau étant entraîné par le poids Π , le centre de gravité doit répondre à la verticale $r L$; & si Q P est une verticale passant par le centre de gravité P du poids, l'on aura, lorsque le rouleau sera supposé entraîné d'un mouvement insensible & uniforme, l'équation $P. Q r = \Pi, R r$ ou $\Pi = \frac{P O r}{r C}$: mais dans la seizième

(a) L'on trouvera cette théorie plus en détail à l'article 147. & suivans. Dans les Figures de cet article, l'on a supposé que les actions agissoient à l'extrémité du rayon du rouleau, au lieu que la traction moyenne passe par le centre de la corde: si l'on employoit de grosses cordes, il faudroit y avoir égard dans les calculs.

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 285

Figure où la corde soutient des poids des deux côtés d'un rouleau ou d'une poulie, comme dans les expériences de la deuxième méthode, si le poids $(P + \Pi)$ entraîne le poids P d'un mouvement insensible uniforme, le côté de la corde qui soutient le poids P prendra la courbure eng , la même sous le même degré de tension que dans la quinzième Figure du côté $P + \Pi$; la corde se dépliera sans effort, & sera tangente à la poulie. L'on aura donc, à cause du mouvement supposé insensible & uniforme, l'équation $(P + \Pi) RC = P (rC. + rQ)$ d'où $\Pi = \frac{P Q r}{R C r}$, quantité double de celle que nous venons de trouver, pour la méthode de M. Amontons.

En finissant ce Chapitre, nous préviendrons ceux qui voudroient recommencer les expériences de cette Section, sous des pressions de 1000 & 1200 livres, qu'elles exigent beaucoup d'attention, parce que la mobilité des rouleaux les rend dangereuses dans le moment où l'on charge les cordes : nous devons aussi les avertir de s'assurer toujours, dans les expériences en grand, de la solidité des nœuds. Il ne faut jamais charger les cordes au delà de 80 livres par fil de carret, quoiqu'en général elles puissent soutenir, sans se rompre, de 100 à 120 livres. Après deux mois de travail, les événemens m'avoient rendu très-circonspect, & je savois perdre plusieurs heures à prendre des précautions pour la sûreté des hommes que j'employois.

CHAPITRE II.

Du frottement des axes.

122. **D**ANS les cabestans, les grues & les poulies destinées à soutenir de grandes pressions, l'on emploie presque toujours des axes de fer qui roulent dans des boîtes de cuivre : dans les petites manœuvres & dans le gréage des vaisseaux, les poulies sont ordinairement de bois de gâïac, portées par des axes de chêne vert ou de buis : l'on commence même, dans nos ports,,

à ne plus employer que des axes de chêne vert, qui sont plus sûrs & moins cassans que ceux de buis. Nous allons traiter ici chaque objet suivant son degré d'utilité dans la pratique. Ainsi nous commencerons par les axes de fer & les boîtes de cuivre; nous passerons de là aux poulies de gâfac sur axe de chêne vert. Nous parcourrons ensuite les frottemens de plusieurs autres matières qui sont quelquefois employées dans les mouvemens de rotation.

Etablissement pour exécuter les Expériences.

123. Une poulie C (*Fig. 17, n.º 1 & 2.*) d'un pied de diamètre bien centrée, est soutenue, au moyen de son axe, sur deux pièces de bois BB & B' B' : cette poulie se trouve élevée de 10 pieds au dessus du sol du hangard où les expériences ont été exécutées : une corde qui passe dans la gorge de la poulie, porte, au moyen de deux crochets, des poids P & P', formés d'un assemblage de gueuses de 50 livres chacune, qui sont percées à leur extrémité comme au n.º 3 de la même Figure : l'on passe une corde dans le trou des gueuses, & l'on en attache ensemble une quantité suffisante pour former le poids que l'on veut mettre en expérience. Dans notre Figure il y a six gueuses liées ensemble de chaque côté de la poulie; le milieu de l'axe A A' (*Fig. 17, n.º 2.*) qui porte la poulie, est tourné avec soin; mais les deux extrémités sont équarries, entrent dans des mortaises, & se fixent solidement aux deux pièces de bois BB, B' B'.

Pour que les expériences soient régulières, il faut que l'axe soit posé horizontalement, & la poulie exactement centrée; autrement elle varie dans ses mouvemens de rotation, & se jette à droite & à gauche contre les pièces de bois.

Lorsqu'on veut déterminer le frottement de l'axe, qui se trouve dans cette expérience, joint aux forces nécessaires pour plier la corde, l'on ajoute alternativement de chaque côté

un petit poids p (a), l'on donne ensuite un mouvement insensible, & l'on observe en demi-secondes le temps que le poids $P + p$ emploie, en tombant de 6 pieds, pour parcourir les trois premiers & les trois derniers pieds de la chute.

Dans toutes les expériences qui vont suivre, nous chercherons seulement à déterminer le frottement des axes dans les machines en mouvement, parce qu'il est impossible de trouver rien de régulier lorsqu'on veut ébranler le système après un temps quelconque de repos : nous en expliquerons les raisons dans le courant de ce Chapitre.

SECTION PREMIÈRE.

Frottement des axes de fer dans des boîtes de cuivre.

124. L'AXE de fer dont nous nous sommes servis avoit 19 lignes de diamètre ; la poulie avoit 144 lignes de diamètre ; le jeu de l'axe, dans le trou de la poulie, n'étoit que d'une ligne trois quarts : le corps de la poulie étoit de bois de gaïac ; mais elle avoit été garnie à son centre d'une boîte de cuivre ; le tout pesoit 14 livres.

Frottement des axes de fer dans des boîtes de cuivre sans enduit.

125. L'on a fixé l'axe de la poulie aux deux pièces de bois BB & B'B' (Fig. 17, n.º 2.) ; l'on a fait ensuite passer une corde sur la poulie : des hommes agissant aux deux extrémités de cette corde, comme s'ils sonnoient une cloche, ont fait tourner avec activité la poulie sur son axe, pour lui donner tout le poli dont elle peut être susceptible : après cette opération

(a) Dans chaque Expérience, il faut alternativement observer, avec une petite charge p , les chutes de chaque côté de la poulie : l'on prend la moyenne entre ces deux observations.

288 THEORIE DES MACHINES SIMPLES.

absolument nécessaire pour faire disparaître les irrégularités , l'on a commencé les expériences.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

L'on s'est servi , dans cette expérience , d'une ficelle de 3 lignes de circonférence , à laquelle l'on a attaché un poids de 103 livres de chaque côté de la poulie ; il a fallu un petit contre-poids p de 6 livres , pour produire un mouvement lent & irrégulier.

II.^{me} EXPÉRIENCE.

L'on s'est servi , dans cette expérience , de la corde , n.^o 1 , de six fils de carret ; elle a été chargée de 200 livres de chaque coté de la poulie ; il a fallu :

I.^{re} ESSAI. Pour donner un mouvement lent & irrégulier ; il faut ajouter réciproquement de chaque côté 10,5 lb.

II.^e ESSAI. Avec une force de 13 livres & demie , les trois premiers pieds de chute parcourus en $\frac{12''}{2}$, les trois autres en $\frac{6''}{2}$.

III.^{me} EXPÉRIENCE.

L'on s'est servi de la même corde de six fils de carret ; elle a été chargée de 400 livres de chaque côté ; il a fallu :

I.^{re} ESSAI. 21 livres pour donner un mouvement lent & continu.

II.^e ESSAI. Avec 28 livres , les trois premiers pieds en $\frac{11''}{2}$, les trois autres en $\frac{5''}{2}$.

III.^e ESSAI. Avec 39 livres , les trois premiers pieds en $\frac{6''}{2}$, les trois autres en $\frac{3''}{2}$.

Résultat

*Résultat de ces trois Expériences.**Calcul du premier Essai.*

(a) Dans la première expérience, premier essai, les poids étoient soutenus par une ficelle très-flexible; ainsi la roideur de la corde peut être regardée comme nulle : le rapport du diamètre de la poulie à celui de son axe est très-approchant, comme 7 à 1; ainsi le frottement réduit à l'axe sera de 42 lb,

$$\& \frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}} = \frac{206 + 14 + 6}{42} \dots\dots\dots 5,4.$$

Dans la deuxième expérience, premier essai, l'on s'est servi de la corde de six fils de carret, n.^o 1 : la force nécessaire, pour la plier sur une poulie de 12 pouces, est, art. 116 & 120, pour une tension de 200 livres, 1,5 livres; ainsi il reste 9 livres pour le frottement, comme la corde a 4 lignes à peu près de diamètre, & que le centre de sa tension peut, dans la pratique, être supposé passer par son milieu, l'on aura 7,2 à 1 pour le rapport du diamètre de la poulie à celui de son axe. Ainsi la force employée pour vaincre le frottement, calculée relativement au rayon de l'axe, sera de 65 livres, d'où l'on tirera :

$$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}} = \frac{400 + 14 + 10}{65} \dots\dots\dots 6,5.$$

Dans la troisième expérience, premier essai, la corde est la même que la précédente; il faut donc un poids de 3 livres pour plier la corde, & $\frac{\text{Frottement.}}{\text{Pression.}} = \frac{800 + 14 + 21}{130} = \dots\dots 6,4.$

Calcul du frottement d'après la poulie en mouvement.

L'on remarque d'abord, d'après le deuxième & troisième essai de chaque expérience, que la vitesse n'influe pas au moins sensiblement sur le frottement, puisque les trois premiers pieds de chute sont toujours parcourus dans un temps à

(a) Il faut, comme on le verra à l'art. 157, évaluer le diamètre de l'axe de la poulie, non pas d'après la grosseur de l'axe, mais d'après celui du trou de la poulie qui est ici 20, $\frac{1}{4}$ lignes.

290 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

peu près double des trois derniers, ce qui annonce une vitesse uniformément accélérée, & une force accélératrice constante, d'où il résulte que le frottement est aussi constant; mais pour confirmer cette remarque, calculons nos essais d'après la formule $Q = \frac{2^{\frac{1}{2}} a M}{g T^2}$, dans laquelle Q représente la force constante qui produit l'accélération de la chute; a est la chute totale qui est de 6 pieds dans nos expériences; M est la masse totale des poids en mouvement qu'il faut augmenter de 7 livres pour l'énergie du momentum de la poulie qui pèse 14 livres, & qui a un pied de diamètre; g est la force de la gravité $= \frac{30^{\text{pieds}}}{1^2}$; T est le temps observé pour la chute des 6 pieds: en calculant les essais d'après cette formule, nous aurons:

Deuxième expérience, deuxième essai, $Q = 2$ livres; ainsi il reste 11 livres & demie pour la résistance due à la roideur de la corde & au frottement, au lieu de 10 livres que nous avions pour une vitesse insensible dans le premier essai de cette même expérience.

Troisième expérience, deuxième essai, $Q = 5,2$; la force employée étoit 28 livres; il reste 22,8 livres, au lieu de 21 livres données dans le premier essai.

Troisième expérience, troisième essai, $Q = 16,9$ livres; la force employée est de 39 livres; il reste 22,1 livres, au lieu de 21 livres données par le premier essai.

126. Il résulte évidemment de ces différens essais, que la vitesse n'influe que d'une manière insensible dans les frottemens. Si, dans la troisième expérience, nous prenons une moyenne entre les trois essais pour déterminer le poids qui équivaut à la roideur de la corde & au frottement, nous le trouvons de 22 livres, & le rapport de la pression au frottement comme 6,1 à 1.

En nous servant d'une vieille corde très-flexible, & dont nous connoissons la roideur par les procédés dont nous avons

déjà fait usage, nous avons également trouvé que le même axe chargé d'une pression de 2000 livres, le frottement étoit encore un peu moindre que le sixième de la pression, en sorte que le rapport de la pression au frottement se trouve moyennement, dans le fer & le cuivre, glissant sans enduit l'un sur l'autre, comme $6 \frac{3}{10}$ à 1 : l'on ne trouve d'exception à cette règle, que lorsque la pression de l'axe & des boîtes est au dessous de 200 livres ; pour lors la loi du frottement augmente, non seulement dans les mouvemens insensibles, mais encore relativement à l'augmentation des vîteses. Cette variété paroît ne pouvoir s'attribuer qu'à l'imperfection du poli, & qu'à quelques inégalités élastiques dont les surfaces sont hérissées, qui ne sont pas pliées en entier par des pressions au dessous de 200 livres. Une remarque qui confirme cette idée, c'est que lorsque les axes ont été enduits de quelques matières graisseuses, & que, par un mouvement continu, sous une pression de 5 ou 600 livres, ils ont acquis tout le degré de poli dont ils sont susceptibles, le plus ou moins de pression ne paroît plus influencer, au moins sensiblement, sur le rapport de la pression au frottement, qui reste le même sous tous les degrés de vîtesse : il sembleroit que les inégalités flexibles des surfaces une fois couchées & collées l'une contre l'autre, ne peuvent plus se relever, & perdent leur élasticité.

Du frottement des axes de fer dans des chapes de cuivre garnies de différens enduits, avec enduit de suif.

127. Le suif bien pur, sans mélange & sans fibres, est de tous les enduits celui qui réussit le mieux pour adoucir le frottement des machines. Nous en avons frotté notre axe & l'intérieur de notre chape : nous avons fait ensuite tourner notre poulie pendant plusieurs minutes, pour que le suif se répandît uniformément, & qu'il prît le même degré de consistance ; l'on a attaché différens poids à la corde de six fils de carret, n.^o 1, & l'on observoit une chute de 6 pieds, comme dans l'article qui précède.

292 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

IV.^{ème} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. L'on s'est servi, dans cette expérience, d'une petite ficelle très-flexible, de 2 lignes de circonférence, & dont la roideur peut être négligée : en chargeant cette ficelle de 100 livres de chaque côté, il a fallu, pour donner un mouvement lent & continu, une force de traction de 2,5 lb.

II.^e ESSAI. Avec un poids de 6 livres, les trois premiers pieds de la chute sont parcourus en $\frac{7''}{2}$, les trois autres en $\frac{3''}{2}$.

V.^{ème} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. La corde, n.^o 1, de six fils de carret, a été chargée de 200 livres de chaque côté; il a fallu, pour donner un mouvement lent & continu, une traction de 6,5 lb.

II.^e ESSAI. Avec une traction de 10 livres, les trois premiers pieds en $\frac{7''}{2}$, les trois autres en $\frac{3''}{2}$.

VI.^{ème} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. La même corde, n.^o 1, chargée de 400 livres, il faut, pour donner un mouvement lent & continu, une traction de 13 lb.

II.^e ESSAI. Avec 18 livres, 3 pieds en $\frac{11''}{2}$, & 3 pieds en $\frac{4''}{2}$.

III.^e ESSAI. Avec 24 livres, 3 pieds en $\frac{6''}{2}$, & 3 pieds en $\frac{4''}{2}$.

Résultat de ces Expériences:

Calcul du premier Essai.

Dans la quatrième expérience, premier essai, la roideur de la corde est nulle; ainsi $\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}} = \frac{217}{17,5} \quad . \quad . \quad 12,4.$

Dans la cinquième expérience, l'on s'est servi d'une corde

de six fils de carret : ainsi en suivant le procédé de l'art. 125 ,

$$\text{On aura : } \frac{\text{Pression}}{\text{Frottement.}} = \frac{400 + 14 + 6}{36} \dots \dots = 11,6.$$

Dans la sixième expérience, premier essai, la corde est tendue par 400 livres ; il faut 3 livres pour la plier, il reste 10 livres pour le frottement réduit à l'axe ; l'on aura :

$$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}} = \frac{800 + 14 + 13}{72} \dots \dots = 11,5.$$

Calcul du deuxième & troisième Essai.

Quatrième expérience, deuxième essai, l'on a $Q = 3,4$ livres ; en suivant le procédé de l'art. 125 , la force employée étoit 6 livres ; il reste donc 2,6 livres pour le frottement & la roideur de la corde : dans le premier essai de cette même expérience, l'on avoit 2,5 lb.

Cinquième expérience, deuxième essai, l'on a $Q = 3,7$ livres ; nous avons employé , pour produire le mouvement , une force de 10 livres ; il reste 6,3 livres : dans le premier essai , l'on avoit eu 6,5 lb.

Sixième expérience, deuxième essai, l'on a $Q = 5,9$ livres ; nous avons employé , pour produire la chute , une force de 18 livres ; il reste 12,1 livres , au lieu de 13 livres données par le premier essai.

Sixième expérience, troisième essai , l'on a $Q = 13,2$ livres ; nous avons employé une force de 24 livres pour produire la chute , il reste 10,8 livres , au lieu de 13 livres données par le premier essai.

127. Ainsi dans les axes enduits de suif très-pur , le rapport de la pression au frottement est comme 11 & demie à 1 pour les petites vitesses ; mais nous avons trouvé (art. 92.) que lorsqu'une lame de cuivre glissoit sur une lame de fer enduite de suif , le frottement étoit à peu près le onzième de la pression ; ainsi ces deux genres d'expérience se correspondent , & se servent de preuves réciproques.

Remarquons cependant que , dans le mouvement des axes , nous avons toujours trouvé le frottement moindre que dans celui du traîneau. Il semble en effet que , dans le mouvement de rotation , les parties en contact peuvent se désengrainer bien plus facilement que lorsque les surfaces glissent l'une sur l'autre. Voici encore une remarque qui distingue ces deux espèces de frottemens. Lorsque l'on fait passer plusieurs fois les lames de cuivre sur les lames de fer sans renouveler l'enduit , le suif s'use & le frottement augmente : l'on éprouve cet effet beaucoup moins sensiblement dans le frottement des axes. Les quatre dernières expériences ont été faites sans renouveler l'enduit , & répétées quatre ou cinq fois chacune ; le frottement à la dernière n'avoit pas paru augmenter sensiblement : d'ailleurs , dans le frottement des surfaces qui glissent l'une sur l'autre , lorsque ces surfaces ont été réduites aux plus petites dimensions possibles , comme à quatre points de contact avec les têtes de clous * , le suif n'empêchant qu'imparfaitement le contact des surfaces , diminue moins le frottement que lorsque les surfaces ont de l'étendue. Mais , dans le frottement des axes , quoique le contact se fasse par la tangente des surfaces , le frottement n'a jamais été trouvé plus grand que la onzième partie de la pression , au lieu qu'avec les quatre têtes de clous glissant sur les lames de fer enduites de suif , il étoit à peu près le neuvième de la pression.

* Art. 93 & 94.

Le calcul des essais où les poids ont acquis de la vitesse dans leur chute , nous apprend que le frottement diminue un peu à mesure que la vitesse augmente. Nous avons déjà fait cette remarque dans les expériences de l'art. 90 ; mais comme toutes les machines de rotations employées dans la Marine sont ordinairement manœuvrées à bras d'hommes , & n'élèvent des fardeaux qu'avec de petites vitesses , la diminution du frottement due à l'augmentation de vitesse ne doit presque jamais influer dans la pratique. Il ne restera à ce sujet aucun doute , si l'on remarque que , dans le dernier essai , une vitesse moyenne de 6 pieds en 5 secondes n'a paru diminuer le frottement que de la cinquième partie de ce qu'il a été trouvé avec une vitesse insensible : d'ailleurs cette diminution du frottement , en aug-

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 295

mentant les vîtesses, n'a lieu qu'avec des enduits de suif; elle n'est pas sensible avec les enduits mous, tels que le vieux oing & l'huile, comme nous allons le voir tout à l'heure.

Frottement des axes de fer dans des chapes de cuivre, avec enduit de vieux oing.

128. L'axe de fer & la chape de cuivre enduits de suif dans l'expérience qui précède, ont été essuyés avec beaucoup de soin; l'on y a substitué un enduit de vieux oing : dans les trois premières expériences, les poids étoient soutenus par une ficelle de 2 lignes de circonférence; dans les suivantes, par notre corde, n.^o 1, de six fils de carret.

VII.^{eme} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté de la ficelle, chargé de 50 livres, il a fallu, pour donner un mouvement lent & continu, augmenter d'un côté la charge de 2,5 lb.

VIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté de la même ficelle, chargé de 100 livres, il a fallu 3,7 lb.

IX.^{eme} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté de la même ficelle, chargé de 150 livres, il a fallu 5,7 lb.

X.^{eme} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. Avec la corde, n.^o 1, de six fils de carret, chargée de 100 livres de chaque côté, il a fallu, pour donner un mouvement lent, incertain & continu, une traction de 4,3 lb.

II.^e ESSAI. Avec une traction de 9 livres, les trois premiers pieds de la chute ont été parcourus en $\frac{6}{2}$, les trois autres en $\frac{3''1}{2}$.

XI.^{ème} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. La corde de six fils de carret, chargée de 200 livres de chaque côté, il faut, pour produire un mouvement incertain & continu, une traction de 8,5 lb.

II.^e ESSAI. Avec une traction de 14 livres, 3 pieds en $\frac{8''}{2}$,
3 pieds en $\frac{4''}{2}$.

III.^e ESSAI. Avec une traction de 20 livres, les 6 pieds en $\frac{7''}{2}$.

XII.^{ème} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. La corde de six fils de carret, chargée de 400 livres de chaque côté, l'on produit un mouvement incertain, avec une traction de 17 lb.

II.^e ESSAI. Avec une traction de 22 livres, 3 pieds en $\frac{13''}{2}$,
3 pieds en $\frac{5''}{2}$.

III.^e ESSAI. Avec une traction de 28 livres, 3 pieds en $\frac{8''}{2}$,
3 pieds en $\frac{3''}{2}$.

Calcul du premier essai de chaque Expérience.

Dans la septième expérience & dans les deux suivantes, la force employée à plier la ficelle peut être regardée comme nulle; ainsi en réduisant la force qui représente le frottement, d'après la différence des diamètres du rayon & de l'axe, nous aurons :

VII. ^e EXPÉRIENCE. I. ^{er} ESSAI.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$= \frac{100+14+3}{17,5}$	6,7.
VIII. ^e EXPÉRIENCE. I. ^{er} ESSAI.	$= \frac{200+14+4}{26}$	8,3.
IX. ^e EXPÉRIENCE. I. ^{er} ESSAI.	$= \frac{300+14+6}{40}$	8,0.

Dans la dixième expérience, premier essai, la tension de la corde

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 297

corde de six fils de carret est de 100 livres; il faut, par l'art. 116, une force de $\frac{7}{10}$ livres pour la plier sous cette charge autour d'une poulie d'un pied de diamètre : nous avons trouvé 4,3 livres pour la force totale, il reste 3,6 livres pour le frottement : dans la huitième expérience, avec la ficelle, sous le même degré de pression, nous avons eu 3,5 livres. Si nous réduisons tous les frottemens à l'axe de la poulie, le rapport du diamètre de la poulie à celui de son axe, étant ici, à cause de la grosseur de la corde, comme 7,2 à 1, nous aurons, en retranchant les forces nécessaires, pour plier la corde de six fils de carret :

X. ^e EXPÉRIENCE.	I. ^{er} ESSAI.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$= \frac{200+14+4}{26}$	8,5.
XI. ^e EXPÉRIENCE.	I. ^{er} ESSAI.	$= \frac{400+14+8}{50}$	8,4.
XII. ^e EXPÉRIENCE.	I. ^{er} ESSAI.	$= \frac{800+14+17}{101}$	8,2.

Calcul du frottement suivant le degré de vitesse.

Nous n'avons pas cherché à déterminer l'influence des vitesses, dans les expériences où les poids étoient soutenus par des ficelles, parce que, dans les chutes accélérées, les poids éprouvent des chocs qui auroient pu casser les ficelles & occasionner des accidens; mais en se servant de la corde de six fils de carret, nous avons eu :

Dixième expérience, deuxième essai. La force accélératrice* * Art. 125.
 $Q = 4,3$ livres qu'il faut retrancher de 9 livres; ainsi il reste 4,7 livres pour la résistance due à la roideur de la corde & au frottement de l'axe : nous avons trouvé, dans le premier essai, 4,3 livres; ainsi la vitesse n'a pas influé, au moins sensiblement, dans le frottement.

Onzième expérience, deuxième essai. $Q = 4,7$ livres; dans l'expérience, la force employée étoit de 14 livres; il reste

298 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

9,3 livres , au lieu de 8,5 livres trouvées dans le premier essai.

Onzième expérience, troisième essai. $Q = 14,2$ livres. La force employée étoit de 20 livres ; ainsi il reste 7,8 livres , au lieu de 8,5 livres données par le premier essai.

Douzième expérience, deuxième essai. $Q = 4,1$ livres. La traction employée est de 22 livres ; il reste 17,9 , au lieu de 17 livres données , dans cette expérience , par le premier essai.

Douzième expérience, troisième essai. $Q = 11,1$ livres. La traction employée étoit de 28 livres ; ainsi il reste 16,9 livres pour le frottement & la roideur de la corde , au lieu de 17 livres trouvées par le premier essai : ainsi il paroît que l'on peut , dans la pratique , supposer , sans erreur sensible , que les vitesses n'influent point sur le frottement.

129. Il résulte donc de ces expériences , que le frottement des axes de fer , dans des chapes de cuivre , est beaucoup moins adouci par le vieux oing que par le suif ; que le rapport de la pression au frottement est une quantité constante , non seulement sous tous les degrés de pression , mais encore sous tous les degrés de vitesse : car , dans le calcul du deuxième & troisième essai de chacune de nos expériences , nous n'avons jamais trouvé que le frottement diminuât sensiblement , quelque rapides que fussent les chutes : il semble donc que la diminution du frottement trouvée avec les enduits de suif , à mesure que les vitesses augmentent , doit être attribué à la dureté du suif qui , interposé entre les points de contact , oppose une telle résistance à la pression , qu'il faut un certain temps de repos pour que les surfaces se touchent immédiatement , & qu'elles se touchent plus ou moins suivant le degré de vitesse.

Si cet effet n'a pas lieu avec le vieux oing , c'est que , par sa fluidité , il n'oppose qu'une faible résistance à la compression , & que le contact est le même avec tous les degrés de vitesse :

voici le résultat de plusieurs expériences qui confirment l'opinion que nous avançons ici.

Du frottement des axes de fer dans des boîtes de cuivre enduites d'huile d'olive, ou seulement onctueuses, & telles à peu près qu'elles se trouvent dans l'usage des machines qui n'ont pas été enduites depuis long-temps.

130. En essuyant le vieux oing dont les surfaces étoient enduites dans les expériences qui précèdent, elles ont resté onctueuses, parce que le suif avoit pénétré dans les pores du métal; & l'on a trouvé par l'expérience, que depuis une pression de 200 livres jusqu'à celle de 1000 & 1200 livres, le rapport de la pression au frottement a été le même que dans l'article qui précède, c'est-à-dire, comme 8 à 1.

131. Lorsque nous avons mis un enduit d'huile d'olive sur notre surface onctueuse, le rapport de la pression au frottement a été encore trouvé comme 8 à 1, & même un peu plus petit, mais jamais au dessous de 7 & demie à 1 : ces résultats se trouvent conformes à ceux de l'article 94.

132. Dans l'usage ordinaire des machines, les axes de fer & les boîtes de cuivre ont été enduites anciennement de quelque matière grasseuse que l'on ne renouvelle que de loin en loin. Il n'en étoit dans le plan de notre travail, de faire des recherches sur cette espèce de frottement : nous nous sommes servis d'un axe de fer qui portoit une poulie de cuivre, & qui servoit depuis trois mois à manœuvrer des poids de plus de cinq milliers, sans que l'enduit de suif dont il avoit été garni eût été renouvelé : l'axe ainsi que le trou de la poulie étoient très-doux au toucher, sans cependant laisser de graisse sur les doigts : cette poulie soumise à l'expérience, nous a donné, pour le rapport de la pression au frottement, 7 & demie à 1 : d'autres axes du même genre & dans les mêmes circonstances, ont quelquefois donné ce rapport un peu plus petit ; mais presque jamais au dessous de 7 à 1, ni au dessus de 8 à 1 : ainsi, dans les usages ordinaires, relatifs à la

Marine, où toutes les manœuvres étant exposées à l'air, à la pluie & au soleil, les axes de fer à boîte de cuivre conservent rarement long-temps les suifs & les autres enduits dont ils ont été garnis au commencement de la campagne : l'on doit calculer le frottement comme $\frac{1}{7\frac{1}{2}}$ de la pression.

SECTION TROISIÈME.

Résultat de plusieurs Expériences pour connoître le frottement des différentes espèces de bois qui entrent ordinairement dans les machines de rotation.

133. **P**OUR rendre les frottemens plus sensibles, nous nous sommes servis, dans toutes les expériences qui vont suivre, de poulies de 12 pouces de diamètre, montées sur des axes de 3 pouces ; en sorte que le rapport du diamètre de la poulie au diamètre de son axe étoit comme 4 à 1 : quelquefois l'on fixoit les axes à la poulie, & on les faisoit tourner dans des boîtes attachées solidement aux pièces de bois BB de la dix-septième Figure ; l'on trouvoit le même frottement que lorsque la poulie étoit mobile autour de son axe.

Comme nous avons déjà remarqué que le frottement des bois qui sortent de la main de l'Ouvrier varie pendant quelque temps, & diminue sensiblement à mesure que, par le mouvement de rotation, sous une pression considérable, les parties des surfaces se polissent & se condensent : pour être assurés d'avoir ces frottemens à peu près au même degré où ils se trouvent dans le mouvement ordinaire des machines, nous faisons enduire les axes de suif avant de commencer nos expériences ; ensuite, au moyen d'une corde posée dans la gorge de la poulie, & chargée de 1000 ou 1200 livres, nous produisons à force de bras un mouvement de rotation pendant une heure ou deux : dans le cours de cette opération, le suif étoit rasfrâchi deux ou trois fois,

Axe de chêne vert , boîte de gaïac.

134. Lorsque l'axe de chêne vert & la poulie de gaïac ont été enduits de suif, l'on a trouvé le rapport de la pression au frottement moyennement , comme 26 à 1.

En essuyant l'enduit , la surface restant seulement onctueuse, le rapport du frottement à la pression a été trouvé comme 17 à 1.

Axe de chêne vert , boîte d'orme.

135. L'axe de chêne vert , dans des boîtes d'orme , est , dans tous nos essais , celui qui a constamment moins de frottement

Enduits de suif , le rapport de la pression au frottement a été trouvé comme 33 à 1.

En essuyant les boîtes & l'axe , les surfaces restant seulement onctueuses , le frottement a été réduit au vingtième de la pression.

Axe de buis , poulie de gaïac.

136. Une poulie de bois de gaïac , tournant sur un axe de buis enduit de suif , a donné le rapport de la pression au frottement comme 23 à 1.

L'axe & la boîte essuyés & restant onctueux , le rapport de la pression au frottement a été trouvé comme 14 à 1.

Axe de buis , boîte d'orme.

137. Un axe de buis enduit de suif , & tournant dans des boîtes d'orme , a donné le rapport de la pression au frottement comme 29 à 1.

En essuyant l'axe & la boîte de la poulie , ce rapport a été trouvé comme 20 à 1.

Axe de fer , boîte de bois.

138. Les axes de fer , dans leurs mouvemens de rotation

sur le bois, ont donné des effets analogues à ceux que nous avons apperçus en faisant mouvoir nos traîneaux armés de règles de fer ou de cuivre sur le madrier dormant : lorsque les poulies sortent de la main de l'Ouvrier, & qu'elles n'ont encore reçu aucun enduit, l'on produit un mouvement uniforme très-lent, avec des axes de fer tournant dans des boîtes de gaïac : une traction qui répondoit au vingtième de la pression, a produit un mouvement uniforme d'un pouce en 40'', & qui a été continué sur 2 pieds de chute : l'on a toujours eu des mouvemens uniformes assez lents, tant que la force de traction a été au dessous du quinzième de la pression ; mais lorsqu'elle a été le douzième de la pression, les 6 pieds de chute ont été parcourus en moins de 5 secondes.

Cette augmentation de frottement, à mesure que les vitesses augmentent, n'a absolument lieu que lorsque les chapes de bois sortent de la main de l'Ouvrier : car en faisant tourner une poulie de bois de gaïac pendant une heure sur un axe de fer, avec une pression de 1000 livres, sans employer aucun enduit, la vitesse cessoit peu à peu d'influer sur le frottement qui pour lors étoit le vingtième de la pression, sous tous les degrés de vitesse ; même rapport que nous avons trouvé dans les vitesses insensibles, avant que les fibres flexibles dont la surface du bois est hérissée, eussent perdu leur élasticité & leur roideur par un long mouvement de rotation.

En enduisant de suif l'axe de fer, & en le faisant tourner quelque temps avant de commencer les expériences, l'on trouve encore que le rapport de la pression au frottement est comme 20 à 1 : l'on trouve un rapport plus grand, mais variable entre la pression & le frottement dans l'instant où l'enduit vient d'être rafraîchi : il paroît même, dans ce dernier cas, que l'augmentation de vitesse diminue un peu le frottement, mais pas assez sensiblement pour qu'il faille y avoir égard dans la pratique.

Les parties élastiques dont les surfaces du bois poli à neuf sont hérissées, perdent, dans moins de 3 minutes, toute leur élasticité, lorsqu'au lieu de faire frotter les axes à sec dans les boîtes, on

les garnit de suif, & que l'on produit un mouvement de rotation sous des pressions de sept à huit cens livres.

Ces observations s'accordent très-bien avec la théorie du frottement, que nous avons cherché à expliquer dans le troisième Chapitre du premier Livre.

R E M A R Q U E S.

139. Lorsque les axes de bois, tournant dans des chapes de bois, sont seulement onctueux, & que le suif a été essuyé, l'augmentation de vitesse ne paroît pas diminuer au moins sensiblement les frottemens. Cet effet n'a eu lieu que dans le moment où le suif venoit d'être rafraîchi; mais beaucoup moins que nous ne l'avions déjà observé avec des axes de fer dans des chapes de cuivre.

140. Le rapport de 17 à 1 que nous avons trouvé; celui de la pression au frottement, pour axe de chêne vert, dans des boîtes de gaïac, après avoir essuyé l'enduit, est un peu plus grand que celui des poulies de la même nature, employées à gréer les vaisseaux, & qui servent depuis plusieurs mois sans qu'on ait rafraîchi les enduits. Plusieurs axes & poulies de ce genre qui venoient de faire une campagne de six mois, étant doux, luisans, polis au toucher, sans cependant graisser les doigts, ont donné le rapport de la pression au frottement entre les nombres 16 & 13 à 1, & la vitesse a toujours très-peu influé sur les frottemens.

141. Lorsque des axes secs ou enduits de toute espèce de bois sont employés à soutenir des poulies, le premier effort qu'il faut employer pour vaincre le frottement, est une quantité très-incertaine & très-irrégulière; en voici la raison: comme il faut toujours conserver un peu de jeu entre l'axe & la boîte, si nous supposons (*Fig. 18.*) que l'axe, au commencement du mouvement, est placé de manière que le point du contact réponde à une tangente horizontale, l'axe se détachera du fond de la boîte sans aucun effort, & avec la même facilité qu'un cylindre qui roule sur un plan horizontal; il s'élèvera

ensuite dans la boîte jusqu'à ce que le point de contact soit en g , dont la tangente gf est telle relativement à la verticale Cf , que la normale $Cg : gf$, comme la pression est au frottement; en sorte que l'effort nécessaire pour ébranler, après un certain temps de repos, un axe renfermé dans une boîte, dépend du jeu, de la position de l'axe & de la compressibilité du bois.

142. Nous ne pouvons trop répéter que, quoique les bois qui sortent de la main de l'Ouvrier nous paroissent bien unis à l'œil & au toucher, il s'en faut de beaucoup qu'ils aient acquis le degré de poli qu'ils prennent sous de grandes pressions dans un mouvement de rotation de plusieurs heures : un axe de chêne vert, de 36 lignes de diamètre, tourné avec soin, & posé sur des boîtes de gârac non enduites, a donné, sous une pression de 400 livres, pendant les dix premières minutes de son mouvement, le sixième à peu près de la pression pour son frottement : après 30 minutes de mouvement, le frottement étoit à peu près la dixième de la pression : l'on a fait encore une autre remarque relative à la vitesse, c'est que, pendant les premières minutes, le frottement paroissoit augmenter avec les vitesses; mais dès que, par un mouvement continu de plusieurs heures, l'axe a eu pris tout le degré de luisant & de poli dont il peut être susceptible, le frottement paroît plutôt diminuer qu'augmenter, à mesure que les vitesses augmentent.

SECTION QUATRIÈME.

Expériences pour déterminer la résistance due à la roideur des cordes dans les machines en mouvement.

143. **D**ANS les expériences du premier Chapitre de ce Livre, nous avons seulement déterminé les forces nécessaires pour plier les cordes autour d'un rouleau, lorsque le mouvement du rouleau est insensible; il se pourroit qu'avec une vitesse finie, l'effet qui résulte de la roideur des cordes fût augmenté

ou

ou diminué; c'est ce que nous allons chercher ici par l'expérience.

Nous nous sommes servis, comme à l'art. 127, d'une poulie à boîte de cuivre & à axe de fer, que nous avons enduite de suif: le diamètre de la poulie étoit, comme dans cet article, de 144 lignes, & celui de l'axe de 20 lignes & demie; mais au lieu d'employer, comme à l'art. 127, la corde, n.^o 1, de six fils de carret, nous nous sommes servis de celle de trente fils, n.^o 3, dont nous connoissons la roideur dans les vitesses insensibles, par les différentes expériences qui précèdent.

P R E M I È R E E X P É R I E N C E.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté de la corde étant chargé de 100 livres, il a fallu, pour produire un mouvement lent & continu, une traction de 7,5 lb.

II.^e ESSAI. Avec une force de 12 livres, les trois premiers pieds ont été parcourus en $\frac{6''}{2}$, les trois autres en $\frac{3''}{2}$.

III.^e ESSAI. Avec 15 livres de traction, trois pieds en $\frac{4''}{2}$, trois pieds en $\frac{3''}{2}$.

II.^{eme} E X P É R I E N C E.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté chargé de 200 livres, il a fallu, pour donner un mouvement lent & continu, une traction de 11 lb.

II. ESSAI. Avec 15 livres de traction, trois pieds en $\frac{12''}{2}$, trois pieds en $\frac{6''}{2}$.

III.^e ESSAI. Avec 19 livres de traction, trois pieds en $\frac{7''}{2}$, trois pieds en $\frac{3''}{2}$.

III.^{eme} E X P É R I E N C E.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté chargé de 400 livres, il faut, pour donner un mouvement continu, 20,5 lb.

306 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

II.^e ESSAI. Avec 24 livres, trois pieds en $\frac{12''}{2}$, trois pieds en $\frac{6''}{2}$.

III.^e ESSAI. Avec 31 livres, trois pieds en $\frac{6''}{2}$, trois pieds en $\frac{4''}{2}$.

IV.^{me} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. Chaque côté chargé de 600 livres, il faut, pour donner un mouvement incertain & continu, 31,5 lb.

II.^e ESSAI. Avec 37 livres, trois pieds en $\frac{12''}{2}$, trois pieds en $\frac{7''}{2}$.

Résultat de ces Expériences.

144. Il faut d'abord remarquer, avant de chercher à calculer nos expériences, que la corde de trente fils de carret n'a été employée ici qu'à la fin de notre travail, & que, depuis trois mois, elle servoit à toutes les manœuvres de nos opérations : ainsi elle étoit dans le même état où nous l'avons trouvée dans les expériences de l'art. 120 ; mais nous avons vu que pour lors, sous une tension de 500 livres, il falloit une force de 14,4 livres pour la plier autour d'un rouleau de 12 pouces ; que cette force étoit composée de deux parties, l'une constante, qui a été trouvée, art. 116, une livre $\frac{4}{10}$, mais qui doit être réduite ici à quelque chose de moins ; nous continuerons cependant à l'évaluer sur le pied de 1,4 livres, parce que la différence ne peut pas influencer sensiblement dans les résultats : l'autre partie est proportionnelle aux forces de tension, & se trouve ici de 13 livres pour 500 livres, ou de 2,6 livres par quintal.

Calcul du premier essai de chaque Expérience.

145. L'axe étant enduit de suif, le frottement doit être ici, comme il a été trouvé à l'article 127, le $11\frac{1}{2}$ de la pression : le diamètre de la poulie est augmenté de chaque côté de la moitié de l'épaisseur de la corde qui a 28 lignes de tour : le diamètre de la poulie est au diamètre de son axe, comme 7,5 à 1 : ainsi les poids qu'il faut attacher à la circonférence des

poulies pour vaincre les frottemens, font la $7,5 \times 11,5$ ou la quatre-vingt-sixième partie de la pression. Ainsi nous aurons :

Première expérience, premier essai. La pression de l'axe est de 221 livres : ainsi le poids qu'il faut attacher à la poulie pour vaincre le frottement est de 2,6 livres : celui que nous avons employé dans cet essai, est de 7,5 livres ; il reste donc 4,9 livres pour la roideur de la corde : cette roideur calculée d'après les données de l'article qui précède, donne ici, pour la tension qui est de 100 livres, 4 livres, au lieu de 4,9 livres.

Deuxième expérience, premier essai. La pression de l'axe est de 425 livres ; le frottement doit donc être de 4,9 livres : nous avons employé 11 livres pour donner un mouvement continu ; il reste 6,1 livres pour la roideur de la corde, qui, calculée d'après les données de l'article qui précède, seroit de 6,6 livres.

Troisième expérience, premier essai. La pression de l'axe est de 834 livres ; divisé par 86 livres, l'on a 9,7 livres pour le frottement : nous avons employé 20,5 livres pour donner un mouvement continu ; il reste 10,8 livres pour la roideur de la corde : nous la trouvons par l'article précédent, de 11,8 livres.

Quatrième expérience, premier essai. La pression de l'axe est de 1245 livres ; le frottement est donc 14,5 livres : nous avons employé 31,5 livres pour donner un mouvement continu ; il reste 17 livres pour la roideur de la corde, qui, calculée d'après l'article qui précède, est de 17 livres.

Calcul des Essais pour la corde en mouvement.

Première expérience, deuxième essai. La force accélératrice Q calculée, comme à l'article 125, donne $Q = 4,4$ livres : la force de traction employée dans cet essai, est de 12 livres ; il reste 7,6 livres pour le frottement de l'axe & la roideur de la corde, que nous trouvons 7,5 livres dans le premier essai.

Première expérience, troisième essai. $Q = 7,4$: la force em-
 $Q \text{ q ij}$

308 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

ployée est de 15 livres; il reste encore 7,6 livres, comme dans le deuxième essai: ainsi, dans cette expérience, la vitesse n'a point influé sur la roideur des cordes.

Deuxième expérience, deuxième essai. $Q = 2,1$ livres : la force employée, dans cet essai, est de 15 livres; il reste 12,9 livres, au lieu de 11 livres données par le premier essai.

Deuxième expérience, troisième essai. $Q = 6,8$ livres : la force employée est de 19 livres; il reste 12,2 livres, au lieu de 11 livres données par le premier essai.

Troisième expérience, deuxième essai. $Q = 4,1$ livres : la force employée, dans cet essai, est de 24 livres; il reste 19,9 livres, au lieu de 20,5 livres données par le premier essai.

Troisième expérience, troisième essai. $Q = 13,4$ livres : la force employée est ici de 31 livres; il reste 17,6 livres, au lieu de 20,5 livres données au premier essai.

Quatrième expérience, deuxième essai. $Q = 5,5$ livres : la force de traction employée dans cette expérience, est de 37 livres; il reste 31,5 livres, comme dans le premier essai.

Il suit du calcul de tous ces essais, que la force qui se perd dans les manœuvres des machines, à vaincre la roideur des cordages, paroît indépendante de la rapidité des mouvemens; & que les vitesses, plus ou moins grandes de la corde & du rouleau, n'entrent dans le calcul des machines que pour des quantités qui peuvent être négligées dans la pratique, sur-tout dans les machines en usage dans la Marine, où des poids de plusieurs milliers ne sont jamais élevés à force de bras qu'avec des degrés de vitesse très-lents : voici encore quelques remarques qui confirmeront les résultats donnés par les calculs qui précèdent : l'on voit d'abord, dans tous les essais, que les trois derniers pieds de la chute ont toujours été parcourus dans un temps qui n'est que la moitié de celui où les trois premiers pieds ont été parcourus, ce qui annonce que la force accéléra-

trice étoit à peu près constante , & conséquemment que le plus ou moins de vitesse ne l'augmentoît ni ne la diminueoit pas sensiblement.

Si d'ailleurs vous augmentez, sous tous les degrés de tension; la puissance capable de vaincre le frottement & la roideur du cordage seulement d'un dixième, quelque vitesse primitive que vous imprimiez ensuite au système, il continuera à se mouvoir en s'accéléérant, ou au moins sans être retardé; ce qui sûrement n'auroit pas lieu, si l'augmentation de vitesse augmentoit la résistance due à la roideur des cordes d'une manière sensible. Pour être plus sûr des conclusions que l'on peut tirer de cette expérience, il faut la répéter avec des poulies de gaïac sur des axes de chêne vert très-fin & seulement onctueux : le frottement étant moindre que pour les axes de fer à chape de cuivre, produira de moindre erreur dans l'estimation des roideurs des cordes : d'ailleurs avec des axes seulement onctueux, il paroît que la vitesse n'influe point sur les frottemens; au lieu qu'avec des axes enduits de suif, les grandes vitesses les diminuent un peu.

Cependant il faut avouer qu'il n'est pas exactement vrai que l'augmentation de vitesse n'augmente pas les résistances dues à la roideur des cordages : cette augmentation paroît sur-tout sensible lorsque les cordes ne sont tendues que par des forces au dessous de 100 livres. L'on a estimé, par beaucoup d'essais, qu'en pareil cas une vitesse de 8 pouces par seconde, pouvoit augmenter d'un peu plus d'une livre les résistances dues à la roideur de notre corde de trente fils de carret; mais cette augmentation de résistance paroît être une quantité constante pour le même degré de vitesse, quelle que soit la tension; en sorte qu'elle cesse d'être sensible sous les grandes tensions, & qu'il n'y a guère de circonstance où l'on ne puisse la négliger dans la pratique : cette augmentation relative à la vitesse, paroît d'ailleurs beaucoup plus grande dans les cordes neuves que dans les vieilles, dans les cordes goudronnées que dans les cordes blanches.

Résultat général.

146. Il résulte de toutes les expériences détaillées jusqu'ici, que, relativement à la pratique dans toutes les machines de rotation, le rapport de la pression au frottement peut toujours être supposé constant; & que la vitesse y influe trop peu, pour qu'on doive y avoir égard; que la résistance qu'il faut vaincre pour plier une corde sur un rouleau, est représentée par une formule composée de deux termes *: le premier est une quantité constante, indé-

* Voy. art. 109
& suivant.

pendante de la tension & de la forme $\frac{n r''}{R}$, où n est une quantité constante que l'expérience détermine; r'' est une puissance du diamètre de la corde; & R le diamètre du rouleau.

Le second terme, $\frac{n' r'' T}{R}$, où n' est une quantité constante; r'' , à peu près la même puissance du diamètre de la corde que dans le premier terme: T est la tension de la corde; ainsi l'on a, pour la formule qui donne la roideur de la

corde $\frac{r''}{R} (n + n' T)$; la puissance μ , comme nous l'avons déjà dit plus haut, est une quantité qui varie suivant la flexibilité de la corde: dans les cordes neuves & dans les cordes goudronnées, composées de cinq ou six fils de carret & au dessus, nous trouvons $\mu = 2$; dans les cordes plus qu'à demi-usées $\mu = \frac{3}{2}$.



CHAPITRE III.

Théorie de la roideur des cordes : application des expériences qui précèdent au calcul des machines.

SECTION PREMIÈRE.

De la roideur des cordes.

147. **L**ES cordes sont formées de plusieurs torons ; chaque toron de plusieurs fils de carret ; par la double torsion du fil de carret, pour former le toron, & du toron, dans le sens contraire, pour former la corde, le fil de carret, lorsque la corde est achevée, se trouve réduit à peu près aux deux tiers de sa longueur. Je n'entrerai ici dans aucun détail sur la fabrique des cordes, parce que je ne puis rien ajouter à un excellent Ouvrage de M. Duhamel, sur la Corderie, où l'on trouve, avec tout ce qui se pratique dans nos Corderies, des vues neuves & utiles sur les moyens d'augmenter la force, la flexibilité des cordes, & de perfectionner cet Art.

148. Une corde $ARBR'A'$ (*Fig. 19.*) étant placée sur une poulie, & chargée d'un poids à chacune de ses extrémités, si l'on suppose que ce soit le poids P' qui entraîne le poids P , la corde opposant, par sa roideur, une résistance aux forces qui la plie, prendra à peu près la forme qu'elle a dans la Figure : si, par le centre de gravité de chaque poids, l'on fait passer une verticale Pf , $P'f'$ qui rencontre le diamètre horizontal RR' de la poulie en f & en f' , le poids P qui monte agira avec le bras de levier Cf , & le poids P' qui descend avec le bras de levier Cf' ; en sorte que, dans le cas où le poids P' commence seulement à entraîner le poids P , l'on aura, dans le cas

d'équilibre, $P (CR + Rf) = P' (CR' - R'f')$, d'où $(P' - P)CR = PRf + P'R'f'$, lorsqu'une fois les poids seront en mouvement, la quantité $P' - P$ qui sera donnée par cette formule sera exacte, si la corde n'a aucune élasticité; car si la corde étoit parfaitement élastique, à mesure que la partie RA de la corde se plieroit sur la poulie, & que la partie de la corde BR' se dépleroit, la quantité de ressorts tendus du côté où le poids se lève, seroit la même que celle qui se détendroît du côté du poids qui descend : ainsi, si la corde étoit parfaitement élastique, c'est-à-dire, si tous les élémens tendoient à se rétablir avec la même mesure d'action qu'il faut employer pour les plier, la roideur de la corde n'auroit plus aucune influence dans le mouvement du système; en sorte que, si les deux poids P & P' étoient égaux, & que l'on imprimât un mouvement primitif, la hauteur dont un des poids P s'élèveroit, étant égale à celle dont l'autre poids P' descendroit, la force vive seroit constante, comme elle l'est dans tout assemblage de corps liés par des ressorts ou par des leviers flexibles & élastiques.

Mais cela n'arrive pas ainsi, parce que les cordes n'ont qu'une élasticité très-imparfaite; & s'il faut employer une certaine force pour les plier, elles restent ensuite dans la situation où cette force les a mises : veut-on les redresser, il faut une nouvelle action dans le sens contraire : cette seconde force nécessaire, pour remettre la corde dans son premier état, est en général beaucoup moindre que celle qu'il a fallu pour la plier; elle augmente un peu, suivant que le temps, depuis lequel la corde est pliée, a été plus long; mais quand même nous la supposerions nulle, ce qui, dans le mouvement des poulies, approche peut-être assez de la vérité, toujours est-il certain que, puisqu'il n'y a aucune réaction, la force vive employée à plier la corde, est perdue pour l'agent qui fait monter le poids : ainsi cette force sera déterminée par $P' - P = \frac{PRf + P'R'f'}{CR}$, & dans le cas de $R'f' = 0$ par $P' - P = \frac{PRf}{CR}$: par nos expériences, nous trouvons $P' - P$ dans les grosses cordes neuves, proportionnel au carré des diamètres

THÉORIE DES MACHINES SIMPLES. 313

diamètres de la corde : dans les cordes demi-usées , nous le trouvons proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ du diamètre ; & dans les cordes très-petites & très-flexibles , MM. Amontons & Désaguilliers l'ont trouvé proportionnel au simple diamètre.

149. Lorsque les poids sont soutenus & manœuvrés sur un tambour ou sur une poulie par des chaînes , au lieu de l'être par des cordes , le frottement des chaînons qui se plient pour envelopper la poulie , produit une résistance analogue à la roideur des cordes. Dans la Fig. 20 , nous supposons la chaîne composée d'une très-grande quantité de chaînons : chaque chaînon est lié au chaînon voisin , au moyen d'un axe : le n.^o 2 de la vingtième Figure représente un chaînon vu de champ.

Si l'on suppose que ce soit le poids P' qui entraîne le poids P , la pression qu'éprouve l'axe du chaînon en a , qui correspond au diamètre horizontal de la poulie , sera égale au poids P , & le frottement de cet axe sera $\frac{P}{n}$, n étant la quantité constante qui mesure le rapport de la pression au frottement. Si r est le rayon de l'axe du chaînon , le momentum du frottement du poids P , relativement à cet axe , sera $\frac{Pr}{n}$; ainsi il faut , pour satisfaire à cette condition , qu'en élevant une verticale par le centre de gravité du poids P , elle rencontre le diamètre horizontal CR de la poulie en un point f , tel que l'on ait toujours $P \cdot a \cdot f = \frac{Pr}{n}$, a étant le centre de l'axe : ainsi si P' est tel que l'on ait $(P' - P) \cdot Ca = P \cdot a \cdot f = \frac{Pr}{n}$, le mouvement pourra être continu , & l'on auroit , dans ce cas , pour le frottement d'un des côtés de la chaîne , en nommant R le rayon de la poulie , augmenté de la moitié de l'épaisseur de la chaîne , $P' - P = \frac{Pr}{nR}$; mais comme il faut vaincre le frottement des axes des chaînons des deux côtés de la poulie , l'on aura très-approchant $(P' - P) = \frac{2Pr}{nR}$. Ainsi la résistance due au frottement des chaînons , sera proportionnelle au produit de la tension

Tome X.

R r

par l'axe des chaînons, divisé par le rayon de la poulie, augmenté de la moitié de l'épaisseur de la chaîne.

Il y a ici une analogie entre les résistances produites par le frottement des axes des chaînons, & celles trouvées pour la roideur des cordes très-flexibles, qui pourroit peut-être avoir quelque utilité dans la théorie de la roideur des cordes.

SECTION DEUXIÈME.

Application des Expériences qui précèdent au calcul des machines.

150. **D**ANS le premier Livre de ce Mémoire, nous avons déterminé le frottement d'un traîneau mené par une puissance parallèle au plan de contact, & nous avons fait glisser successivement l'une sur l'autre des surfaces de différentes natures & de différentes étendues : dans le deuxième Livre, nous avons déterminé le frottement des axes, & la roideur des cordes pliées sur différens rouleaux : dans les observations que l'on trouve jointes à nos expériences, nous avons été obligés, pour les réduire, de calculer les différentes machines qui ont servi à nos épreuves. L'objet de cette Section se trouve donc déjà en partie rempli : ainsi il ne nous reste qu'à chercher des formules générales qui puissent s'appliquer à toutes les machines d'usage dans la Marine.

Nous allons d'abord commencer par le calcul du plan incliné, en supposant que la force qui élève un corps sur ce plan a une direction quelconque : nous calculerons après cela les machines de rotations, & principalement le palan composé d'un nombre de poulies quelconques, en supposant que la direction des cordes soit verticale, & en faisant entrer dans le calcul le frottement & la roideur des cordes : nous chercherons ensuite la théorie de ces mêmes machines, en supposant que les puissances agissent

suivant des directions quelconques : nous appliquerons les formules qui résulteront de notre théorie, au cabestan.

Théorie du plan incliné.

151. Le plan incliné, représenté par la ligne CB , forme, FIGURE 21. avec la ligne horizontale CA , un angle n .

La direction de la corde TF forme en D , avec le plan incliné, un angle m .

Le poids du traîneau chargé est P .

La tension de la corde TF est T .

Décomposons ces forces en deux autres, l'une parallèle au plan incliné, & l'autre qui lui soit perpendiculaire, nous aurons :

Force suivant BC , dépendante du poids P . . . $P \sin. n$.

Force suivant BC , dépendante de la tension T . . . $T \cos. m$.

Force perpendiculaire à BC , dépend. de P . . . $P \cos. n$.

Force perpendiculaire à BC , dépend. de T . . . $T \sin. m$.

Comme nous avons trouvé, dans le premier Livre, que le frottement du traîneau, une fois en mouvement, est égal à une petite constante dépendante de la cohérence des surfaces, plus à une partie constante μ de la pression, nous aurons, dans le cas d'un mouvement uniforme très-lent,

$$A + \frac{P \cos. n - T \sin. m}{\mu} = T \cos. m - P \sin. n, \text{ d'où}$$

$$T = \frac{A \mu + P (\cos. n + \mu \sin. n)}{\mu \cos. m + \sin. m}.$$

Cette formule est suffisante dans la pratique, quel que soit le degré de vitesse & de pression, lorsque les bois frottent sans enduit sur les bois, ou les métaux sur les métaux ; mais lorsque les bois frottent sur les métaux, la quantité μ diminue un peu à mesure que la vitesse augmente : l'on trouve, dans les expériences du premier Livre, toutes les données nécessaires pour déterminer cette quantité μ , suivant la nature des surfaces, l'ancienneté & la nature des enduits, & suivant le degré de vitesse.

316 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

152. Si dans la formule qui précède , en supposant l'angle n du plan incliné constant , l'on vouloit faire varier l'angle m , ou, ce qui revient au même, la direction de la corde qui soutient le traîneau , de manière que la tension T fût un *minimum* , l'on auroit $\mu = \frac{\cos. m}{\sin. m}$. Si dans la formule l'on fait $n \& m = 0$, l'on aura $T = A + \frac{P}{\mu}$; c'est le cas du traîneau tiré horizontalement sur un plan horizontal ; c'est le cas de toutes les expériences du premier Livre.

P R E M I È R E R E M A R Q U E.

152. Nous avons vu , par les expériences du premier Livre , qu'il y avoit deux espèces de frottement ; celui qu'il falloit vaincre pour détacher le traîneau après un certain temps de repos , & celui du traîneau une fois en mouvement. Nous avons trouvé que , dans les bois glissant sur les bois , le premier genre de frottement est toujours beaucoup plus considérable que le dernier : dans le chêne , par exemple , glissant à sec sur le chêne , il est à peu près comme 4 à 1 ; ainsi toutes les fois que le traîneau s'arrête , il faut employer un grand effort pour lui faire reprendre son mouvement. Cet effort est aussi nuisible aux hommes qu'aux machines dont il délie bientôt toutes les parties. Il faut donc , autant qu'il est possible , que , dans cette espèce de frottement , les agens puissent produire un mouvement continu , ou au moins il faut que , par quelques moyens assez simples , l'on puisse ébranler & détacher les surfaces après un certain temps de repos. Dans les expériences du premier Livre , je faisois souvent glisser mon traîneau à force de bras sous de très-grandes pressions ; mais toutes les fois que le traîneau s'arrêtoit , les forces de deux hommes que j'employois n'auroient pas été suffisantes , si je ne les avois aidés en détachant le traîneau d'un coup de marteau. Il y a des cas où l'on pourroit faciliter l'ébranlement du traîneau , en le faisant porter (*Fig. 22.*) par une courbure convexe sur le plan incliné : car pour lors , au moindre ébranlement , il rouleroit sur cette courbure ; mais si l'on ne veut pas employer ce moyen , & que par la destination de la machine , l'on se trouve

nécessité d'arrêter souvent le mouvement des traîneaux, il faudra se conformer aux expériences du premier Livre, & ne mettre en contact que des surfaces qui puissent se détacher aisément l'une de l'autre; telles sont, par exemple, deux surfaces hétérogènes, comme les bois & les métaux; tels sont aussi les métaux glissant sur les métaux avec enduit de suif.

II.^e REMARQUE.

153. Les différens résultats trouvés dans notre premier Livre, pourront peut-être servir à perfectionner une des opérations des plus importantes de nos Ports; c'est celle de lancer les vaisseaux à l'eau sur un plan incliné : cette manœuvre s'exécute ordinairement en soutenant le bâtiment par un assemblage de charpente & de cordage que l'on appelle son berceau; deux pièces de bois posées parallèlement à la quille & à peu près de même longueur, servent de base au berceau. Ces deux pièces de bois sont posées & glissent sur un chantier très-solide & très-uni, formé par des lits de pièces de bois qui se joignent & qui sont posées perpendiculairement à la direction de la quille : ce chantier est couvert, dans tous les points où la base du berceau doit glisser, d'un enduit de suif très-épais; on donne au chantier une inclinaison du côté de la mer, qui est rarement de moins de 10 lignes par pied & de plus de 14 lignes, ce que l'on fait dépendre du plus ou moins de pesanteur du vaisseau : dans cette opération, les surfaces de contact sont souvent chargées de plus de 7000 livres par pied carré.

La grande quantité de suif dont le chantier est enduit; les différentes accores & les clefs qui soulèvent le vaisseau, & que l'on ne fait sauter que dans l'instant où l'on veut le mettre à l'eau, empêchent que le plan des deux pièces de bois qui forment la base du berceau, & qui doit glisser sur le chantier, ne s'engraine dans la surface de ce chantier; le vaisseau part ordinairement tout seul par le seul ébranlement qu'il éprouve; en coupant deux gros cables qui le soutiennent au sommet du chantier. Il est absolument nécessaire, pour le succès de cette

opération, que la couche de suif interposée entre la base du berceau & le chantier, soit très-épaisse, très-pure, & que le suif ait beaucoup de consistance : quelquefois l'on met sur le suif un second enduit de vieux oing ; mais il paroît, par toutes nos expériences, que ce procédé est vicieux, que le vieux oing ne fait que ramollir le suif, accélérer le rapprochement des surfaces, & augmenter le frottement.

Lorsqu'une fois le vaisseau est en mouvement, il paroîtroit, d'après l'art. 63 & suivans, que le frottement des bois enduits de suif n'étant que le vingt-septième de la pression, & l'inclinaison du plan étant toujours au moins de 10 lignes par pied, le vaisseau devroit s'accélérer avec beaucoup de rapidité ; c'est aussi ce qui arrive presque toujours ; mais cependant, quelquefois il s'arrête au milieu de sa marche. Voici, d'après nos expériences, les raisons de cet événement ; il s'en faut de beaucoup que les surfaces du bois qui sortent de la main de l'Ouvrier aient acquis le degré de poli qu'elles avoient dans nos expériences successives ; mais nous avons trouvé que des bois polis à neuf, & enduits de suif, donnoient beaucoup d'irrégularité dans les frottemens, qui, au lieu d'être le vingt-septième de la pression, étoient souvent le douzième & le treizième : or comme l'inclinaison du chantier, à 10 lignes par pied, ne donne pas tout-à-fait, pour la force accélérante, le quatorzième de la pression, il n'est pas étonnant que le bâtiment s'arrête souvent au milieu de sa course : un moyen de prévenir en partie cet événement, seroit de faire glisser à plusieurs reprises, en enduisant de suif, un traîneau chargé d'un grand poids sur les surfaces qui doivent se trouver en contact lorsque le berceau court sur le chantier : par cette opération préparatoire, l'on seroit disparoître les inégalités qui rendent les frottemens irréguliers dans les surfaces neuves ; mais ce qui pourroit peut-être encore mieux réussir, ce seroit de former le dernier lit ou la surface du chantier avec des pièces de bois d'orme, en donnant une plus grande largeur aux surfaces en contact. J'ai toujours trouvé, en mettant en expérience un traîneau de chêne porté par un madrier de bois

d'orme enduit de suif, le fil de bois se recoupant à angle droit, que non seulement le frottement étoit moindre que dans le chêne sur le chêne, mais qu'il étoit, sur-tout dans les surfaces neuves, beaucoup moins irrégulier : il paroîtroit que les inégalités dont la surface du bois d'orme est couverte, étant très-flexibles, se plient avec facilité dans la marche du traîneau, & produisent moins d'irrégularité que le chêne dont les fibres sont beaucoup plus dures. D'ailleurs, ce qui est décisif ici, c'est que l'engrainage des parties, qui produit la grande résistance que l'on éprouve en détachant les surfaces après un certain temps de repos, se fait dans le bois d'orme glissant sur le chêne, beaucoup plus lentement que dans le chêne contre chêne.

Voici encore une cause des irrégularités du frottement du berceau glissant sur le chantier ; le vaisseau qui part d'abord lentement, s'accélère ensuite, & la vitesse est telle que les surfaces de contact contractent un degré de chaleur capable de les enflammer. Par-là il arrive que la couche de suif interposée entre les surfaces de contact se fond, & perd toute sa consistance ; en sorte que la base du berceau joint la surface du chantier, comme s'il n'y avoit point de suif interposé entre les surfaces de contact : or dans le cas où les surfaces étoient seulement onctueuses, nous avons trouvé que le frottement étoit le seizième de la pression : ici il doit être encore plus grand, parce que la chaleur fond le suif jusque dans les pores du bois : si, par cette cause ou par quelque autre, le vaisseau vient à s'arrêter, le suif interposé entre les surfaces se trouvant entièrement fondu, elles s'engraineront, dans un instant, comme si les bois étoient secs, & il faudra, pour détacher de nouveau le berceau, employer une force qui soit au moins le tiers de la pression ; aussi arrive-t-il souvent qu'après un pareil accident, il n'y a d'autre moyen, pour faire mouvoir le vaisseau, que de séparer les surfaces en contact, & d'y mettre un nouvel enduit.

Nous n'étendrons pas plus loin nos réflexions sur cet objet ; nous laissons à MM. les Officiers de Marine qui dirigent actuellement les constructions des vaisseaux du Roi, à décider si,

320 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

d'après nos expériences, il n'y auroit pas quelque moyen certain d'assurer le succès de cette importante opération; l'on peut tout attendre de leur capacité, de leur zèle, de cette fermentation générale qui, dans nos Ports, embrase tous les esprits, & qui se modifiant, suivant les circonstances, mène également à la gloire dans les combats, & aux découvertes utiles dans les Arts. Je voudrois que la destination de ce Mémoire me permît de rendre ici justice au Commandant respectable du Département où j'ai fait mes expériences : tout ce qui peut être utile à la perfection de l'Art & au bien du service y est accueilli, encouragé & protégé : les Officiers qui le secondent, se prêtent à ses vûes avec autant d'honnêteté que de zèle, & le plus foible talent qui veut se rendre utile, rencontre par-tout des hommes de génie qui l'éclairent. Si des occupations & des voyages nécessités m'avoient permis de profiter à loisir d'une position aussi heureuse, ce Mémoire seroit probablement meilleur (a).

Théorie des machines de rotation.

154. Nous avons vu, dans toutes les expériences qui précèdent, que le frottement des axes étoit toujours proportionnel aux pressions : nous avons vu que les forces nécessaires pour plier une corde autour d'une poulie, pouvoient toujours être représentées par la quantité $\frac{A + B T}{R}$, dans laquelle, art. 146,

$A = n r^q$, & $B = n' r^\mu$, r étant le rayon de la corde, R , celui de la poulie, T , la tension de la corde, n & n' sont des coefficients constans donnés par nos expériences; q , dans la pratique, peut être supposé égal à μ , quantité qui varie suivant la nature de la corde, suivant qu'elle est plus ou moins usée.

(a) Note ajoutée depuis le jugement de l'Académie. Les expériences détaillées dans ce Mémoire ont été faites dans le Port de Rochefort, à la fin de 1779. M. de la Touche, que la mort a enlevé au commencement de l'année 1781, y commandoit alors le Département de la Marine : dès qu'il fut convaincu que mon travail avoit un objet utile, il voulut bien s'en occuper avec cet air d'intérêt si précieux & si rare dans les gens en place, mais qui caractérise toujours le Citoyen honnête & le Chef éclairé.

Roue ou poulie chargée de deux poids.

155. Au lieu de supposer la poulie mobile autour de son axe, fixons la *Fig. 23* à cet axe dont le rayon est CB , & supposons que cet axe soit porté par la chape $F n BR$, dont le rayon est plus grand que celui de l'axe de la poulie; que R soit le rayon de la poulie chargée d'un côté par le poids P , de l'autre par le poids P' qui est supposé suffisant pour entraîner le poids P , vaincre le frottement & la roideur de la corde. Comme le plus ou le moins de vitesse du système change très-peu l'énergie de cette double résistance, le poids P' continuera à descendre avec la vitesse qui lui sera imprimée sans s'accélérer ni retarder : mais comme nous supposons ici du jeu entre l'axe & la boîte qui le porte, l'axe roulera d'abord jusques en B , en sorte que la tangente BN fera, avec la ligne horizontale QBQ' , un angle QBN , tel que le frottement de tout le système porté & en équilibre sur le point B , l'empêche de glisser le long de BN ; ainsi, si $m =$ le rapport de la pression au frottement, l'on aura

$$\frac{\sin. QBN}{\cos. QBN} = \frac{1}{m}, \text{ \& en supposant le rayon des tables égal à l'unité,}$$

$$\text{l'on trouvera } \sin. QBN = \frac{1}{(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, \text{ \& } \cos. QBN = \frac{m}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

si actuellement du centre de l'axe C l'on abaisse la verticale CK , & que la ligne horizontale QQ' rencontre les verticales qui passent par le centre de gravité des deux poids en Q & Q' , l'on verra que, puisque le système est en équilibre autour du point B lorsque le poids P' emporte d'un mouvement insensible & uniforme le poids P , l'on doit avoir $P(QK + KB) = P'(Q'K - KB)$; or $QK = R$, rayon de la poulie, & $KB =$

$$CB \sin. BCK = \frac{r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ d'où l'on tirera :}$$

$$P \left(R + \frac{r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = P' \left(R - \frac{r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

L'on pourroit encore avoir la même valeur de P' par un autre moyen plus direct : la somme des forces qui agissent suivant la résultante & verticale EB est $P + P$; ainsi la pression du plan de contact en B est $\frac{m(P + P')}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$: or, lorsque le mouve-

322 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

ment est parvenu à l'uniformité , le centre **C** de l'axe doit rester immobile dans l'espace ; ainsi toutes les forces & les réactions du frottement doivent être en équilibre autour du centre **C**, & puisque le frottement du point **B** = $\frac{P + P'}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$, nous aurons $P R + \frac{(P + P') r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = P' R$ qui se trouve exactement la même formule que nous avons eue tout à l'heure par la première méthode : la quantité P' donnée par cette dernière formule dépend seulement du frottement ; si l'on avoit égard à la roideur des cordes, elle feroit $P R + \frac{(P + P') r}{(1 + \frac{P}{m})^{\frac{1}{2}}} + A + B P = P' R$, parce que la force nécessaire pour plier une corde autour d'un rouleau dont le rayon est **R**, étant $\frac{A + B P}{R}$, le momentum de cette force agissant avec un levier **R**, sera $A + B P$.

P R E M I È R E R E M A R Q U E.

156. Le frottement des axes dans les boîtes, que nous avons rigoureusement déterminé dans l'article qui précède, & que nous trouvons égal à $\frac{(P + P')}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$, est plus petit que celui dont nous nous sommes servis dans nos expériences, où nous avons supposé le frottement égal à la quantité $\frac{P + P'}{m}$; mais comme , dans nos expériences , m n'a jamais été moindre que le nombre 6 , les erreurs qui auroient pu en résulter sont insensibles ; puisqu'en prenant pour m le nombre 6 , l'on trouve $(1 + m^2)^{\frac{1}{2}} = 6,08$, qui ne diffère du nombre 6 que d'une quantité que l'on peut négliger dans des recherches de ce genre.

D E U X I È M E R E M A R Q U E.

157. Si au lieu de faire mouvoir l'axe dans la concavité de la boîte, comme aux deux derniers articles, c'étoit (*Fig. 24.*) la boîte ou la concavité du trou de la poulie qui tournât sur l'axe fixe , ce qui est le cas de toutes les poulies mobiles dont on fait usage pour la manœuvre des vaisseaux, le problème auroit la

même solution que le précédent; car puisque le poids P' (*Fig. 24.*) entraîne le poids P , & que, par la supposition, le mouvement est supposé uniforme, il y a équilibre entre toutes les puissances, en y comprenant la réaction du frottement. Ne nous occupons pas pour cet instant de la roideur du cordage. Comme nous supposons qu'il y a du jeu entre le trou de la poulie & son axe, & que le poids P' entraîne le poids P , lorsque le mouvement sera parvenu à l'uniformité, le point de contact B sera tel qu'en faisant passer par ce point une tangente BN , la résultante BE de la somme des poids P & P' , dirigée suivant une verticale BE , ne fasse que commencer à faire glisser les surfaces de contact retenues par le frottement : nous aurons donc ici, comme à l'article 155, pour la pression suivant BC , $\frac{(P + P')m}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$; mais si c'est le centre de l'axe, & C' celui de la poulie, l'on remarquera que le rayon BC de l'axe étant prolongé, doit nécessairement passer par le centre C' de la poulie; l'on remarquera encore, que lorsque le mouvement sera parvenu à l'uniformité, le centre C' de la poulie restera fixe dans l'espace. Ainsi l'on aura égalité entre le momentum des puissances & la réaction du frottement; & comme ce frottement est encore ici $\frac{(P + P')}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$, l'on trouvera, comme à l'article 155, en nommant r' le rayon du trou de la poulie, $P R + \frac{(P + P') r'}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = P' R$.

Cette dernière formule offre, relativement aux poulies mobiles sur leurs axes, une remarque intéressante; c'est que le momentum du frottement ne dépend pas du diamètre de l'axe, mais uniquement de celui du trou de la poulie.

Calcul d'un palan composé d'un nombre quelconque de poulies, les directions de toutes les cordes étant parallèles & verticales.

158. Le palan que nous allons calculer ici est un des plus en usage dans la Marine. Dans la *Fig. 25* qui le représente,

324 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

nous avons beaucoup écarté les poulies l'une de l'autre, sans cependant les séparer par des cloisons, comme elles le sont ordinairement dans la pratique, ce qui auroit rendu notre Figure trop confuse.

La chape supérieure en A est dormante, & attachée à des crochets; la chape inférieure en B est mobile, & soutient le poids P : une extrémité de la corde est fixée au point a, & la corde enveloppe successivement les poulies b, c, d, e, f, g, h, &c. & est soutenue à son autre extrémité par une force en Q.

Soit la tension de la corde qui va de a en b. T.

Celle de la corde qui va de b en c. T'.

Celle de la corde qui va de c en d. T''.

Celle de la corde & T' μ .

T' μ représentant la tension de la corde, après qu'elle a enveloppé, depuis le point a, un nombre μ de poulies.

Supposons, pour simplifier, toutes les poulies égales, & ayant R pour rayon (a), & r pour rayon de leur axe, par l'article qui précède, lorsque le mouvement sera parvenu à l'uniformité, le frottement de l'axe de la première poulie b fera $\frac{(T + T')}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$, celui de la poulie c fera $\frac{(T' + T'')}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$, &c; mais puisque nous supposons le palan en mouvement, il faut que la tension T' de la partie de la corde qui va de b en c, soit telle qu'elle fasse tourner la poulie b autour de son axe, quoique retenue, dans l'autre sens, par la tension T de la corde a b, par le frottement de l'axe, & par la résistance due à la roideur de la corde qu'il faut plier sur une poulie dont le rayon est R : ainsi le mouvement étant supposé parvenu à l'uniformité, nous formerons, d'après les articles qui précèdent, les équations suivantes pour chaque poulie :

(a) Par rayon de l'axe r, nous entendons celui du trou de la poulie.

$$R (T' - T) = \frac{(T + T') r}{(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + A + B T.$$

$$R (T'' - T') = \frac{(T' + T'') r}{(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + A + B T'.$$

$$R (T''' - T'') = \frac{(T'' + T''') r}{(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + A + B T''.$$

$$R (T'^{\mu} - T'^{(\mu-1)'}) = \frac{(T'^{\mu} + T'^{(\mu-1)'}) r}{(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + A + B T'^{(\mu-1)'}$$

Ces équations se résoudroient facilement par les méthodes données pour intégrer les différences finies ; mais comme c'est ici le cas le plus simple de ce genre d'intégration , & que nous n'avons que des progressions géométriques à sommer, nous n'avons besoin que de l'analyse élémentaire : faisons pour simplifier,

$$C = \frac{\left(R + \frac{r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + B \right)}{R - \frac{r}{(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}}, \text{ \& } D = \frac{A}{R - \frac{r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}},$$

nos équations se trouveront réduites par cette substitution , à

$$T = T \dots \dots \dots = T + \frac{D(1 - 1)}{C - 1}.$$

$$T' = T C + D = T C + D \dots \dots \dots = T C + \frac{D(C - 1)}{C - 1}.$$

$$T'' = T' C + D = T C^2 + D C + D \dots \dots = T C^2 + \frac{D(C^2 - 1)}{C - 1}.$$

$$T''' = T'' C + D = T C^3 + D(C^2 + C + 1) = T C^3 + \frac{D(C^3 - 1)}{C - 1}.$$

$$T'^{\mu} = T'^{(\mu-1)'} C + D = T C^{\mu} + D(C^{\mu-1} + C^{\mu-2} + \dots + 1) \\ = T C^{\mu} + \frac{D(C^{\mu} - 1)}{C - 1}.$$

Remarquons à présent que puisque le poids P est supposé s'élever d'un mouvement uniforme, toute l'action momentanée de la pesanteur est soutenue & détruite par des cordes que nous supposons parallèles & verticales ; ainsi $(T + T' + T'' + \dots + T'^{\mu}) + P$, où T'^{μ} est la tension de l'extrémité de la corde tenue en Q ;

ainsi en faisant une somme de toutes nos équations, nous trou-

verons $P = \frac{T(C^{\mu+1} - 1)}{C - 1} + \frac{D(C^{\mu+1} - 1)}{(C - 1)^2} - \frac{(\mu + 1)D}{C - 1}$, d'où nous tirerons en quantités connues,

$$T = \frac{P(C - 1) - \frac{D}{(C - 1)}(C^{\mu+1} - 1) + (\mu + 1)D}{C^{\mu+1} - 1}.$$

En substituant, dans une des équations de notre suite, cette valeur de T , nous aurons tout de suite en quantités connues la tension de la partie de la corde qui y correspond : nous trouverons par exemple que la force Q qui peut produire un mouvement uniforme ; est

$$T^{\mu'} = \frac{C^{\mu} \left(P(C - 1) + (\mu + 1)D - \frac{D}{C - 1}(C^{\mu+1} - 1) \right)}{C^{\mu+1} - 1} + \frac{D(C^{\mu} - 1)}{C - 1};$$

mais si l'on remarque que nous avons supposé $D = \frac{A}{R - \frac{r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}}$;

& que A représente la force constante nécessaire pour plier la corde, il suit de nos expériences que, lorsqu'on manœuvre un palan avec une corde au dessous de dix ou douze fils de carret, l'on peut négliger la quantité A , & par conséquent D , & pour

lors la formule précédente se réduit à $T^{\mu'} = \frac{C^{\mu} P (C - 1)}{C^{\mu+1} - 1}$.

Si l'extrémité de la corde, au lieu d'être soutenue par une puissance Q , passoit sur une poulie F , la tension de la corde en Q , étant donnée par la formule de cet article, l'on auroit facilement la pesanteur d'un poids G , qui, attaché à l'extrémité de cette corde, pourroit entretenir le mouvement uniforme d'un palan.

159. Le palan dont nous venons de donner le calcul, est celui

qui est le plus en usage dans la Marine ; mais il faut avouer que notre théorie n'est pas parfaitement exacte quant à la pratique , parce que nous supposons ici que toutes les cordes sont exactement verticales & parallèles ; au lieu que , dans la pratique , elles sont obligées de biaiser pour aller d'une poulie à l'autre , suivant que la chape mobile B est plus ou moins proche de la chape dormante A. Du défaut du parallélisme des cordes , il résulte encore que comme les poulies portées par la même chape sont séparées entre elles par une cloison , s'il y a beaucoup de jeu entre le trou de la poulie & son axe , la poulie s'incline & frotte contre la cloison : d'ailleurs en s'inclinant , le rapport du diamètre de la poulie au diamètre de son axe diminue , & la poulie ne porte sur son axe que par les arêtes extérieures de son trou qui est bientôt évasé & dénaturé : par-là les frottemens augmentent & deviennent d'une irrégularité qui ne peut être soumise à aucune théorie. Pour diminuer ces défauts , il faut forer les poulies bien perpendiculairement à leur plan , arrondir un peu les arêtes de leur trou ; mais sur-tout faire en sorte , dans les manœuvres , que la direction des cordes passe , le plus exactement qu'il sera possible , dans le plan de la poulie perpendiculairement à l'axe de rotation.

Calcul du frottement des axes , lorsque les directions des puissances ne sont pas parallèles entre elles.

160. La Fig. 26 représente le plan d'une roue ou d'un tour coupé perpendiculairement à son axe. Le centre de rotation est en C ; l'axe a pour rayon $CT = r$: la puissance Q qui fait mouvoir la machine , a pour rayon celui de la roue $CQ = R$, & agit perpendiculairement à ce rayon , suivant la direction Q R' : la résistance P qu'il faut vaincre , agit suivant la direction PR , perpendiculaire au rayon $CP = R$, qui est celui du cylindre ou de l'arbre du tour.

Prolongeons la direction $R'Q$, suivant laquelle la puissance Q agit , de manière qu'elle rencontre en S la direction RP de la

résistance ; que la résultante de ces deux forces soit TS , T fera le point de contact de la boîte, dont nous voyons, dans la Figure, une partie TN qui soutient l'axe du tour. Comme nous supposons ici le mouvement parvenu à l'uniformité, & que la roue est entraînée suivant QR' , il faut que la direction de la résultante ST fasse, avec la tangente TO , un angle tel que la force résultante décomposée dans la direction de la tangente, soit égale au frottement : ainsi, si nous nommons Z la force de la résultante ST , nous aurons $\frac{Zm}{(1+mm)^{\frac{1}{2}}}$ pour la pression de l'axe & de la boîte, d'où, en suivant la même marche que dans les articles qui précèdent, l'on tirera $PR + \frac{Zr}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} = QR'$.

L'on y joindroit, si l'on vouloit, les forces nécessaires pour plier la corde ; mais il n'est question ici que du frottement. Pour déterminer la valeur de Z , par le centre C de la roue & par le point S , soit tiré la ligne CS qui forme, avec les directions QS & PS , les angles H & H' : décomposons la force suivant SQ en une force suivant SC & une force perpendiculaire à cette ligne ; faisons-en autant pour la force suivant SP , la somme des forces suivant SC , fera $Q \cos. H + P \cos. H'$: la somme des forces perpendiculaires à CS , à cause que c'est la force Q qui entraîne le système, fera $Q \sin. H - P \sin. H'$. Ainsi la force suivant la résultante ST , fera

$$Z = \left((Q \cos. H + P \cos. H')^2 + (Q \sin. H - P \sin. H')^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(Q^2 + P^2 + 2PQ \cos. (H+H') \right)^{\frac{1}{2}} ;$$
 ainsi l'on aura, pour l'équation générale des momentum,

$$PR + \frac{(Q^2 + P^2 + 2PQ \cos. (H+H'))^{\frac{1}{2}} r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} = QR',$$
 d'où l'on tire $Q = a + (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, en faisant

$$a = \frac{PRR' - \frac{Pr^2 \cos. (H+H')}{1+m^2}}{R'^2 - \frac{r^2}{1+m^2}}, \quad \& \quad b^2 = \frac{P^2 \left(\frac{r^2}{1+m^2} - R'^2 \right)}{R'^2 - \frac{r^2}{1+m^2}}.$$

L'on simplifiera beaucoup notre formule relativement à la pratique, si l'on remarque que le frottement étant toujours une petite

petite partie de la pression, $Q = \frac{PR}{R'}$ peut être regardé comme une valeur assez approchée pour qu'on puisse la substituer dans le petit terme qui exprime le frottement : ainsi l'équation, avant d'être réduite, deviendra

$$\frac{PR}{R'} + \frac{Pr}{R'} \cdot \frac{\left(\frac{R^2}{R'^2} + 1 + \frac{2R}{R'} \cos. (H + H') \right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = Q.$$

Si l'on veut avoir égard à la roideur des cordes, il faudra ajouter à la quantité qui représente Q celle $\frac{f''}{R'} (n + n'P)$, qui se détermine, d'après nos expériences, suivant la nature & l'usage des cordes : la quantité Q ainsi déterminée, substituée à la place de Q , dans le terme qui représente le frottement & la roideur de la corde, donnera une seconde approximation, si l'on ne croit pas la première assez exacte. La valeur de Q que nous trouvons ici pour les tours, convient également aux poulies dans le cas où les directions des cordes ne sont pas parallèles ; la dernière formule se simplifie même pour la poulie, parce qu'il faut faire $R = R'$.

PREMIÈRE REMARQUE.

161. La formule qui précède, où nous trouvons, par approximation, le frottement égal à $\frac{Pr}{R'} \left(\frac{R^2}{R'^2} + 1 + \frac{2R}{R'} \cos. (H + H') \right)^{\frac{1}{2}}$, offre quelques réflexions, relativement à l'angle $(H + H')$ que doivent former entre elles les directions de la puissance & de la résistance, pour que le frottement s'évanouisse, ou au moins pour qu'il devienne un *minimum* : il est clair d'abord que ce frottement diminuera à mesure que $\cos. (H + H')$ diminuera s'il est positif, & augmentera s'il est négatif ; & comme, à cause du rayon égal à l'unité, $\cos. (H + H')$ pris négativement, ne peut pas être plus grand que -1 , il s'ensuit que le frottement sera le moindre possible, lorsque $\cos. (H + H') = -1$, tant que $\frac{R^2}{R'^2} + 1$ sera plus grand que $\frac{2R}{R'}$; car s'il étoit plus petit, il

faudrait déterminer $\cos. (H + H')$, en faisant $\frac{R^2}{R'^2} + 1 + \frac{2R}{R'}$
 $\cos. (H + H') = 0$, ce qui rendroit le frottement nul : ainsi ,
 par exemple, dans les poulies où $R = R'$, si $\cos. (H + H') = -1$,
 le frottement s'évanouit, dans lequel cas la puissance & la résis-
 tance sont opposées & dirigées suivant une même ligne.

Du Cabestan.

162. La théorie qui précède, & l'équation qui en résulte ,
 s'appliquent facilement au calcul du cabestan.

La *Fig. 27* représente le plan d'un cabestan, ou une section
 perpendiculaire à son arbre vertical : les puissances Q, Q', Q'' , &
 sont placées à l'extrémité des bras CQ , & comme elles sont
 distribuées également, il n'en résulte aucune pression sur l'axe :
 l'axe qui frotte contre la boîte, a pour rayon $CT = r$; l'arbre
 autour duquel s'enveloppe la corde, a pour rayon $CP = R$:
 les bras du cabestan mesurés depuis le point C , centre de rota-
 tion du cabestan, jusques aux points Q, Q' , &, où les puissances
 sont appliquées, ont pour rayon $CQ = R'$: l'on remarquera
 que, comme dans le cabestan, les puissances Q, Q' , & sont
 développées uniformément autour du centre C , il s'ensuit que
 la somme des forces estimées suivant une direction quel-
 conque, sera égale à 0, d'où la pression de l'axe sur la
 boîte, & conséquemment le frottement qui en résultera, sera
 nul : ainsi dans l'équation de l'article 160, où nous trouvons
 $P R + \left(\frac{P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos. (H + H')}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} r = Q R'$, la puis-
 sance Q qui se fait équilibre à elle-même, ne doit pas entrer
 dans le terme qui représente le frottement ; ainsi l'on aura
 $\frac{P R}{R} + \frac{P r}{R (1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = Q$; & en faisant entrer dans le calcul la
 roideur du cable PN , nous aurons généralement

$$Q = \frac{P R}{R'} + \frac{P r}{R' (1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f^{\mu}}{R'} (n + n' P),$$

où f représente le demi-diamètre de la corde.

E X E M P L E.

163. Pour faciliter aux Artistes l'intelligence de la théorie qui précède, nous allons donner une application au cabestan en calcul numérique.

L'on veut élever, au moyen de la corde PR , un poids de huit mille livres. La corde PR est une corde goudronnée de cent vingt fils de carret, qui pourroit porter douze à quatorze milliers sans se rompre. L'axe du cabestan est de fer; la boîte, dans laquelle il tourne, est de cuivre: l'on suppose que cet axe n'a pas été enduit de suif depuis quelque temps; en sorte que le rapport de la pression au frottement est, art. 132, comme 7 & demie à 1.

Le rayon CT de l'axe est égal à . . . 2 pouces.

Le rayon CP de l'arbre est égal à . . . 10.

Le bras CQ du cabestan est égal 10 pieds 120.

L'on cherche la somme des forces Q , Q' , &, qu'il faut distribuer à l'extrémité des bras du cabestan.

Nous avons trouvé, article 116, par la méthode de M. Amontons, dont, art. 121, il faut doubler le résultat, qu'une corde goudronnée de trente fils de carret exige, pour être pliée autour d'un rouleau de 4 pouces de diamètre, une force constante de 6,6 livres, & une force proportionnelle à la tension, à raison de 116 livres par millier. Comme l'arbre de notre cabestan a 20 pouces de diamètre, les forces nécessaires pour plier la corde autour de cet arbre, ne seront que le cinquième de celles que nous venons de trouver; ce sera 1,3 livres pour la force constante, & 23,2 livres par millier: & comme nous avons ici une tension de huit milliers, nous aurons, pour la force totale qui plieroit la corde de trente fils de carret autour de notre rouleau, 186,9 livres.

Mais nous avons vu, art. 116, que les forces nécessaires,

332 THÉORIE DES MACHINES SIMPLES.

pour plier différentes cordes goudronnées autour d'un même rouleau, sont assez approchantes entre elles, comme le nombre des fils de carret qui composent ces cordes : ainsi, comme nous nous servons ici d'un cable de cent vingt fils de carret, il faudra une force pour plier ce cable, quadruple de celle que nous aurions employée avec la corde de trente fils; nous aurons donc ici, pour cette force, 747,6 livres : ainsi nous aurons, dans

l'équation de l'article qui précède : $\frac{f''(n+n'P)}{R'} = 747,6$, d'où

$$\frac{f''(n+n'P)}{R'} = \frac{R}{R'} \cdot 747,6 = \frac{10}{10.12} \cdot 747,6 = 62,3 \text{ livres ;}$$

$$\frac{PR}{R'} = \frac{8000.10}{12.10} = 666,6. \quad \frac{PR}{R'(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8000.2}{10.12(7^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}} = 17,6,$$

d'où $Q = 666,6 + 62,3 + 17,6 = 746,5$ livres.

Comme un homme, en poussant d'un mouvement continu la barre d'un cabestan, peut faire à peu près un effort de 25 livres, il faudroit trente hommes sur ce cabestan pour élever le poids de 8000 livres : il y a à peu près 80 livres de forces employées à plier la corde & à vaincre le frottement des axes ; ainsi il y a au moins trois hommes dont l'action est perdue dans l'effet de ce cabestan.



Fig. 1

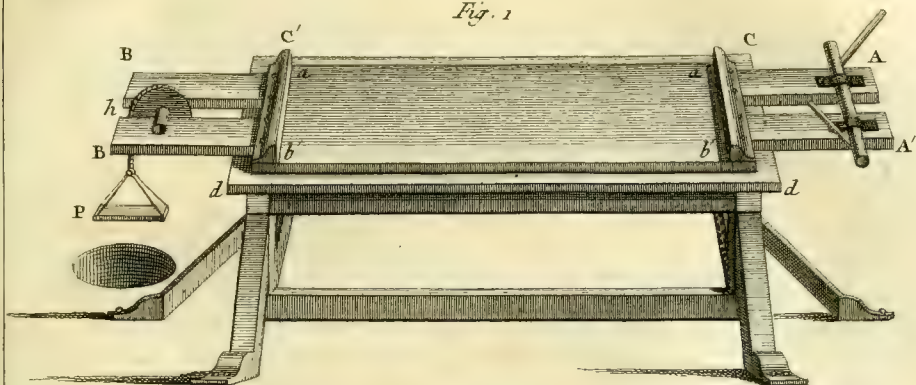


Fig. 2.



N^o 2.



Fig. 3.

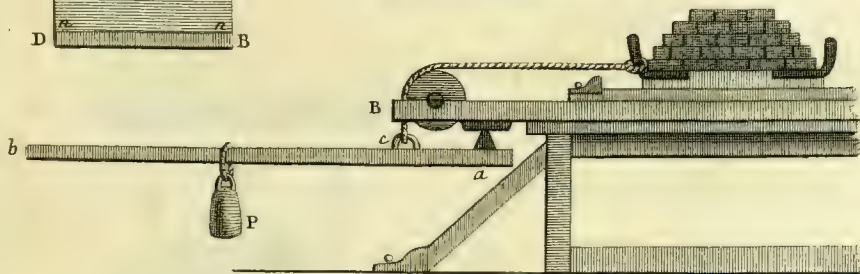


Fig. 5

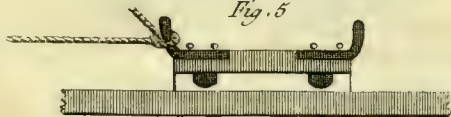


Fig. 4



Fig. 6.

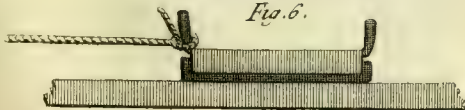


Fig. 7.





Fig. 8.

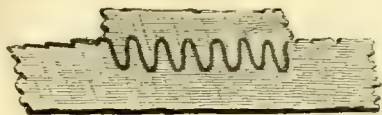


Fig. 9.

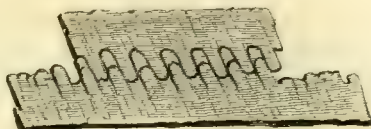


Fig. 10.



Fig. 11.

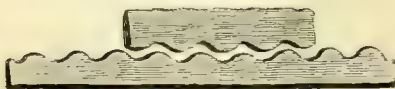


Fig. 13. n° 1.

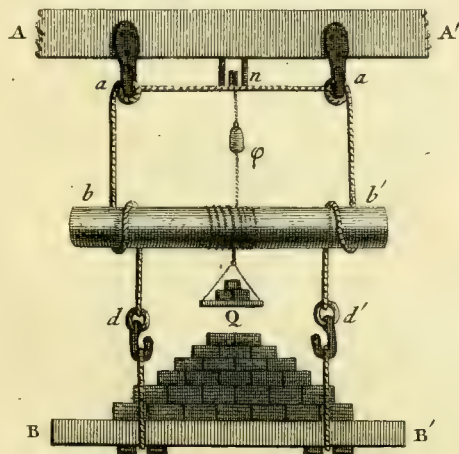


Fig. 13. n° 2.

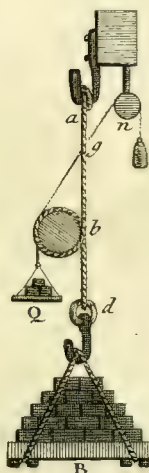


Fig. 14. n° 1.

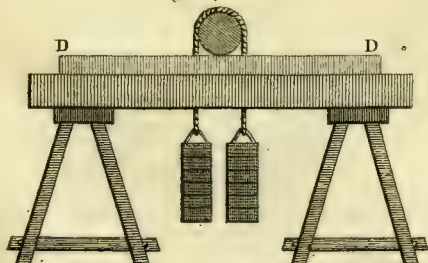


Fig. 14. n° 2.

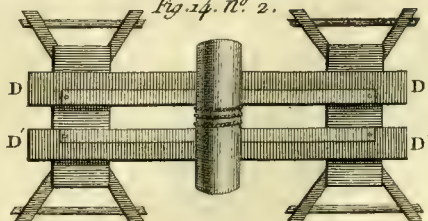




Fig. 15.

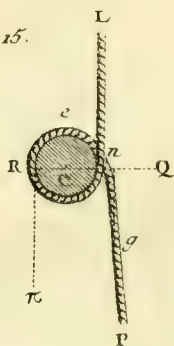


Fig. 16

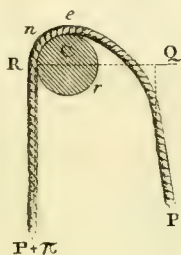


Fig. 19.

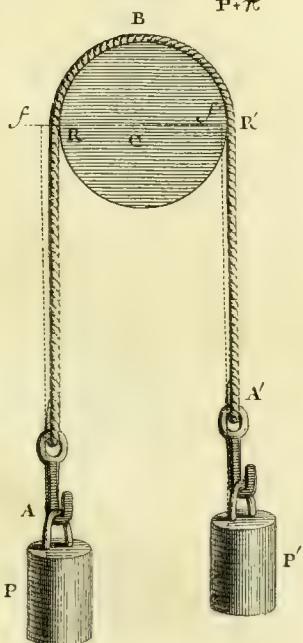


Fig. 17. N^o 1.

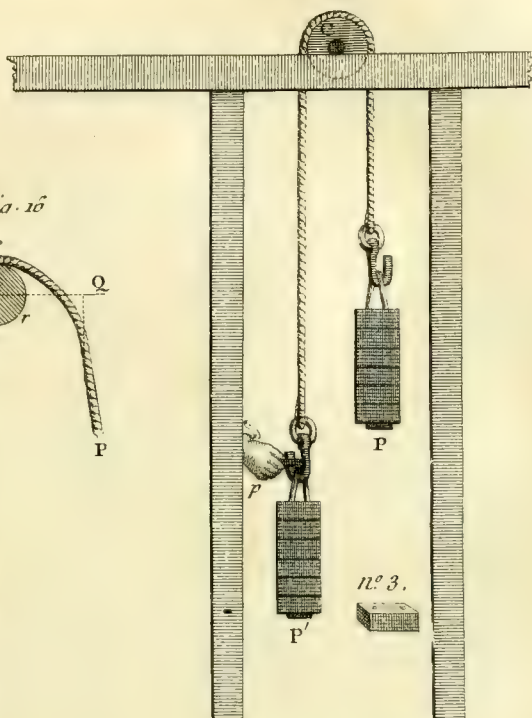


Fig. 17. N^o 2.

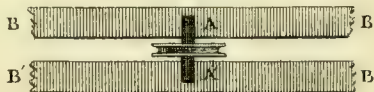


Fig. 18

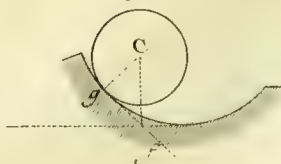




Fig. 20.

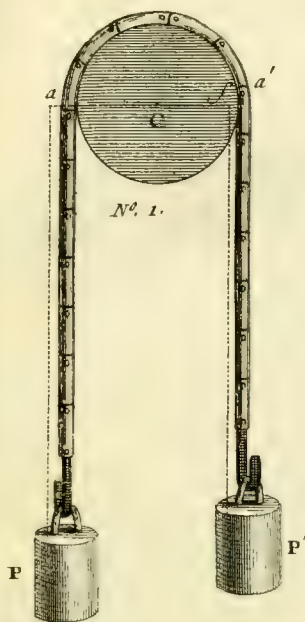
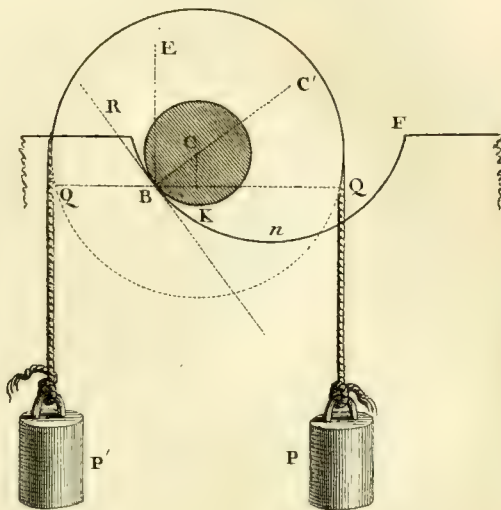


Fig. 23.



N° 2.



Fig. 21.

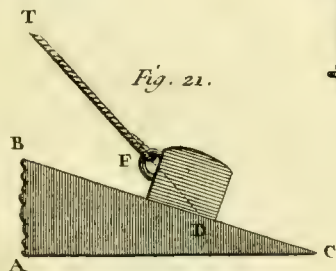


Fig. 24.

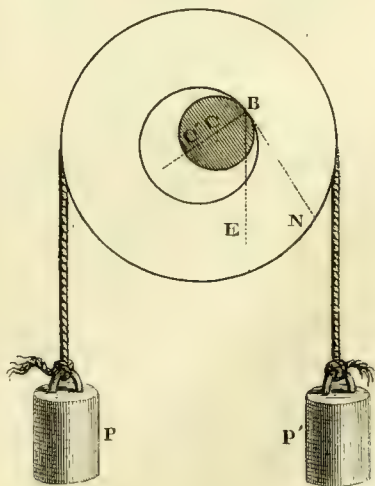


Fig. 22.

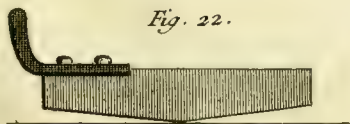




Fig. 25.

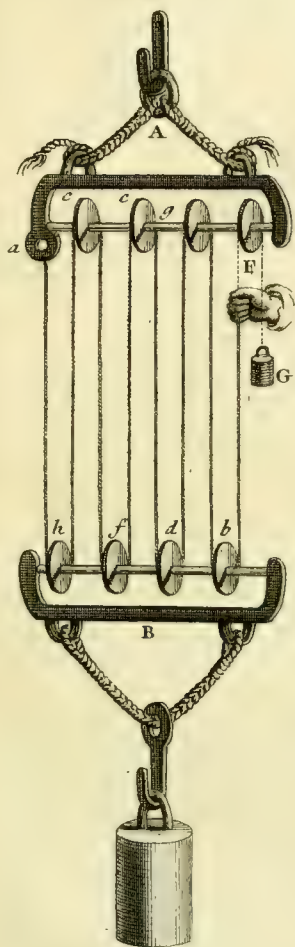


Fig. 26.

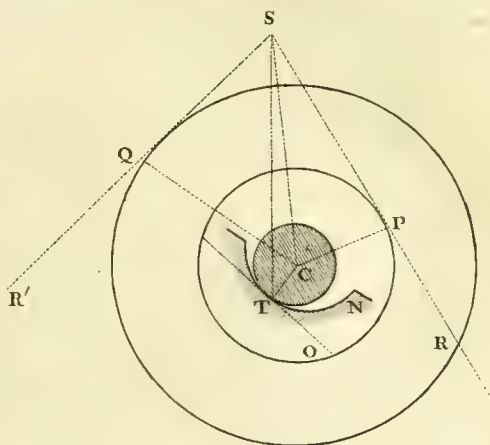
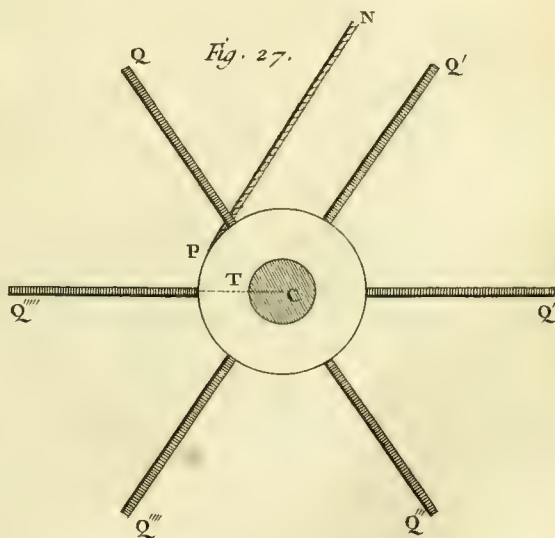
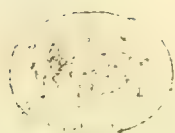


Fig. 27.







RECHERCHES

SUR

LES COMÈTES

De 1532 & de 1661.

PIECE qui a remporté le Prix proposé par L'ACADÉMIE
ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1782.

Altiora Mundi fecat, & tum demum apparet,
Cum in imum cursus sui venit. *SENEC.*

*Par M. MÉCHAIN, Astronome Hydrographe de la Marine,
& depuis Membre de l'ACADÉMIE.*

L'ACADÉMIE a proposé les questions suivantes :

1.^o *Vérifier & réduire aux distances véritables, les distances apparentes de la Comète de 1661 aux étoiles, en ne négligeant pas même d'entrer dans la critique des positions de ces étoiles, données par les différens Catalogues.*

2.^o *Vérifier & discuter, autant qu'il sera possible, les différentes périodes anciennes des retours de cette Comète, dont les Historiens ont pu faire mention.*

3.^o *Corriger, par l'effet connu des réfractions & des parallaxes, les observations relatives à cette Comète, faites par Apian en 1532.*

4.^o Examiner l'influence que les mouvemens propres des étoiles fixes & la précession des équinoxes ont dû avoir sur ces différentes observations.

Pour essayer d'y répondre, je commencerai par les Observations d'Apian; je les rapporterai telles qu'on les trouve dans le Livre intitulé *Astronomicum Cæsareum*, publié par Apian, à Ingolstadt, en 1540, & dont les exemplaires sont devenus, depuis long-temps, extrêmement rares. Je discuterai ces Observations, je les réduirai, j'en donnerai les résultats, ainsi que les principaux élémens des calculs : j'en ferai aussi la comparaison avec les lieux de la Comète, calculés sur les élémens de l'orbite, donnés par M. Halley.

Je rapporterai ensuite les Observations d'Hévélius, faites à Danzick en 1661; je discuterai les positions des étoiles, d'après les principaux Catalogues; je donnerai les distances vraies de la Comète aux étoiles déduites des distances apparentes observées, les longitudes & latitudes vraies conclues de ces distances, & la comparaison avec le calcul fait sur les élémens de l'orbite, déterminés par M. Halley.

J'examinerai si les apparitions de Comètes qui tombent à des années où peut répondre la période écoulée entre 1532 & 1661, se concilient avec l'orbite de la Comète de 1532, & sur-tout avec celle de 1661, qui est mieux connue.

L'influence des mouvemens propres des étoiles, & de la précession des équinoxes, se trouvera nécessairement discutée dans les recherches précédentes.

Enfin, je terminerai par un court exposé des résultats que j'ai tirés des Observations de 1532 & de 1661, sur les orbites de ces Comètes.

On trouvera peut-être que je suis entré dans de trop longs détails, & que j'aurois pu me dispenser de mettre autant de précision dans les calculs des Observations, sur-tout pour la Comète de 1532; mais je devois me conformer à ce qu'exigeoit le Programme de l'Académie.

OBSERVATIONS

DE LA COMÈTE DE 1532,

PAR APIAN.

OBSERVATIO PRIMÆ.

COMETA, anno 1532, fulsit in regione orientali, cœpit autem videri 25 Septembris in diem usque 20 Novembris, septies per me & studiosissimè observatus. Primo autem omnium secundo Octobris die in *Dreseno* Misniæ oppido (cujus loci altitudo est 51 grad.) horâ solis ortum præcedente quintâ, in qua contemplatione Azimuth altitudoque hujusmodi reperta sunt.

Altitudo Cometæ supra horizontem.....	13° 10'
Azimuth ejusdem ab ortu versùs Meridiem.....	24 30
Altitudo cordis Leonini.....	34
Azimuth ejusdem.....	19 22

Hiis conquisitis operatum mihi consequenter est, hac quâ solui hætenùs ratione, non secus ac in priori Cometa factum est eaque mihi cognita.

Declinatio cordis Leonini.....	14° 12'
Ascensio recta ejusdem.....	144 54
Ascendens eclipticæ observationis horâ.....	<u>1</u> 28
Declinatio Cometæ.....	4 25 <i>Merid.</i>
Ascensio recta ejusdem.....	154 47
Latitudo Cometæ.....	13 44 <i>Merid.</i>
Locus verus Cometæ in ecliptica.....	mp 8 24

OBSERVATIO SECUNDA.

Secundò, consideratus est Cometa *die Septembris 3* (lege Octobris 3) eodem in loco, caudam verò ejus solem sequi jam

comperto, extremum ejus inspectum est. E qua inspectione sequentia se obtulerunt.

Altitudo cordis Leonini.....	31°	30'
Altitudo Cometæ.....	9	
Azimuth ejusdem ab ortu Meridiem versùs.....	16	43
Altitudo extremitatis caudæ.....	20	42
Azimuth ejusdem extremitatis.....	27	6

E quibus subnexa eliciuntur.

Verus Cometæ locus.....	np	11°	25'
Declinatio ejusdem.....		3	53 <i>Merid.</i>
Ascensio ejus recta.....		158	27
Latitudo Cometæ ab ecliptica.....		10	12 <i>Merid.</i>
Distantia Cometæ à Sole.....		39	10
Locus Solis horâ observationis.....	☿	19	27
Verus extremitatis caudæ locus in ecliptica.....	♊	26	24
Latitudo extremitatis ejusdem.....		13	2

OBSERVATIO TERTIA.

Tertia Cometæ inspectio 14 Octobris die facta est, quo quidem die mihi *Lyptix* esse contigit, quamobrem itinerarii solius horologii, quod compassum vocant, usu, Cometam in æquinoctiali ipsissimo suboriri animadvertimus, in libræ principio constitutum, eâdem enim observationis horâ libræ initium ascenderat.

OBSERVATIO QUARTA.

Quartò, Cometa visus est die Octobris 19, ubi eum quintum libræ gradum, min. 46, tenere in longitudine deprehensimus, ab ecliptica verò Septentrionali inclinantem grad. 4, min. 51.

OBSERVATIO QUINTA.

Quintò, Cometam contemplatus sum die Octobris 31, horâ 5, min. 15 post noctis medium, iterùm in Dreseno Misniæ oppido. Hæc autem sequentia inventa sunt.

Altitudo Bootis Stellæ.....	20°	
Altitudo Cometæ.....	8	
Azimuth ipsius.....	3	43' <i>Sept.</i>

Ex

Ex quibus talia consurgunt.

Distantia Cometæ à Sole.....	29°	6'
Ascensio recta Cometæ.....	104	47
Locus ipſius verus in ecliptica.....	☿	21 30
Latitudo ejuſdem ab ecliptica.....	13	15 Sept.

Eo die, proximèque ante illum, cœpit Cometa poſt Solem occidere, parumque videri veſperi.

OBSERVATIO SEXTA.

Sextò, Cometam luſtrantes 1 Novembris, priori quoque in loco hæc ſubſcripta comperimus.

Booris altitudinem.....	26°	0'
Altitudinem Cometæ.....	12	40
Azimuth ejuſdem.....	8	50 Merid.

Hæc ſubnexa ex Obſervatione eliciuntur.

Ascensio Cometæ recta.....	107°	33'
Latitudo ejuſdem.....	14	42 Sept.
Locus verus Cometæ in ecliptica.....	☿	23 57
Distantia quoque ejuſdem à Sole.....	28	34

Cometa ille caudam primò merid. verſùs direxit, poſt hac in dies magis ac magis eam elevans, hunc uſque in diem quo ferè perpendicularis ad Zenith erigebatur.

OBSERVATIO SEPTIMA.

Septima & noviffima Obſervatio, 8 Novembris die celebrata, loco proximè dicto, horâ 5, min. 12 poſt noctem mediam. Quanquam verò 20 uſque Novembris in diem Cometa perſiſtiterit, ob aëris tamen turbulentiam minimè conſpicuus fuit. Ea contemplatio ſequentia collegit.

Booris altitudinem.....	25°	40'
Altitudinem Cometæ.....	7	20
Azimuth ejuſdem ab Occid. ad Sept.....	0	30
Verum locum Cometæ in ecliptica.....	☿	3 35
Latitudinem ejuſdem.....	19	36 Sept.

Tome X.

V v

Hiis jam diebus cauda satis evidenter Boream versùs mota est, & post occidentem Solem cerni potuit.

Motus ille, si penitus consideratur, ostendit quomodo & ille Cometa pronus & viâ directâ incellerit, eclipticamque in Libræ principio secuerit.

Voilà tout ce qu'Apian rapporte d'essentiel sur cette Comète : il l'observa avec des instrumens dont on ne peut pas attendre une grande précision ; il n'avoit en vue que de démontrer que les queues des Comètes ont une direction opposée au Soleil. Je vais cependant rapporter les calculs rigoureux que j'en ai faits pour me conformer aux intentions de l'Académie ; mais il est essentiel de remarquer qu'il y a évidemment une faute d'impression dans le nom du mois de la seconde observation, & qu'il faut lire *Octobris* au lieu de *Septenbris* : il paroît certain qu'il y en a une autre dans l'Azimuth de la dernière observation, que j'ai souligné, & qu'il faut lire *Azimuth ejusdem ab Oriente ad Sept.*, parce que l'observation a été faite le matin, & que la Comète étoit à l'orient, ainsi qu'Arcturus.

Une troisième erreur qui n'est point d'abord aussi palpable que les deux précédentes, c'est la dénomination de l'Azimuth de la Comète de la cinquième observation ou du 31 Octobre. Apian donne cet Azimuth vers le nord, il est certain qu'il a dû être vers le midi ; je l'ai souligné en rapportant l'observation, & je l'emploierai ainsi corrigé en la calculant. On verra d'ailleurs que si on prenoit cet Azimuth de l'orient au nord, il en résulteroit une déclinaison de la Comète beaucoup plus grande que celle du lendemain, & de même pour l'ascension droite, ce qui est contraire au mouvement apparent de cette Comète.

Latitude & longitude du lieu où Apian observa la Comète.

On a vu ci-dessus, que cinq des observations les plus détaillées, & les seules que l'on puisse calculer, ont été faites selon

Apian, in *Dreseno Misniae oppido, cujus loci altitudo est 51 grad.*, & dans la Table de la différence des Méridiens des principaux lieux de la terre avec Ingolstadt, qu'il rapporte au commencement de son Livre; il place *Dresen* 10' de temps à l'orient d'Ingolstadt, ce qui revient à 46' de temps à l'orient de Paris. Mais dans les Ephémérides du P. Hell, on trouve la latitude de *Dresde* de $51^{\circ} 6'$, & $44' 21''$ de temps à l'orient de Paris. Mayer a trouvé, par combinaisons, la latitude de $51^{\circ} 3'$ & $45' 32''$ de temps à l'orient de Paris. La fin de l'éclipse de Soleil de 1748 m'a donné $44' 32''$ de temps. Dans les Ephémérides de Berlin, année 1782, on donne la latitude de *Dresde* observée par M. Koler en 1769 & en 1778, de $51^{\circ} 5' \frac{1}{4}$, & la différence des Méridiens avec Paris, de $45' 26''$ par les satellites de Jupiter: j'adopterai cette dernière quantité pour la longitude de *Dresde*, & je supposerai la latitude de $51^{\circ} 5'$.

*Précession des Equinoxes, & obliquité de l'Ecliptique
employées dans ces Recherches.*

J'ai fait beaucoup de recherches sur la précession, d'après les Catalogues anciens & modernes; j'ai examiné les quantités adoptées par différens Auteurs; mais il seroit trop long d'entrer ici dans tous ces détails. Afin d'abrégier, je dirai seulement que j'ai adopté la précession séculaire moyenne de $1^{\circ} 23' 50''$ de ce temps-ci à 1532 & à 1661, pour me rapprocher de ce qui est le plus généralement suivi; & encore parce que cette quantité a été employée par les Astronomes qui ont recherché les mouvemens propres des étoiles dont j'ai fait usage: d'ailleurs j'avois trouvé $1^{\circ} 23' 46''$ au plus.

Quant à l'obliquité de l'Ecliptique & à sa diminution; j'ai combiné & calculé les observations les plus certaines, faites depuis la fin du quinzième siècle; elles m'ont donné, par un milieu général, la diminution en 100 années de $39'' \frac{1}{2}$, ou de $37''$, en rejetant les résultats qui s'éloignoient trop. Par les hauteurs solsticiales observées par Hévélius, j'ai trouvé l'obliquité

moyenne, en 1660, de $23^{\circ} 29' 0''$; les observations du Gnomon de Bologne donnent quelques secondes de moins. M. le Monnier, dans son Mémoire sur Arcturus (*Mem. Acad.* 1769), suppose l'obliquité moyenne, en 1675, de $23^{\circ} 28' 50''$, & en 1769, de $23^{\circ} 28' 15''$, ce qui donne une diminution de $37''.2$ par siècle; on en tire l'obliquité moyenne, en 1661, de $23^{\circ} 28' 55''$, telle que je l'ai employée pour les observations de la Comète de cette année. En remontant de cette époque à 1532, j'ai établi pour ce temps l'obliquité moyenne de $23^{\circ} 29' 43''$.

Mes combinaisons m'auroient donné quelques secondes de différence en 1532, ainsi qu'en 1661; mais j'ai préféré de m'arrêter à ces quantités, afin de profiter du travail de M. le Monnier sur le mouvement propre d'Arcturus, & parce que son sentiment doit être du plus grand poids.

*Réduction du lieu des Etoiles au temps des observations
de 1532.*

REGULUS.

Ascension droite.			Déclinaison.			
145 ^o	48'	26"	14 ^o	11'	30"	1532, selon le Catalogue Britannique.
145	48	5	14	12	33	<i>Idem</i> , Astron. nautique de M. le Monnier.
145	48	15	14	11	58	<i>Id.</i> Catalogue de M. Bradley.
145	48	3	14	11	52	<i>Id.</i> Maskeline, fin du vol des Obs. de Greenwich.
145	48	13	14	12	50	<i>Id.</i> Catalogue de M. Mayer.
145	48	11	14	12	8	<i>Id.</i> Catalogue de M. de la Caille.

Les différens résultats ci-dessus s'accordent assez en ascension droite, mais ils diffèrent plus en déclinaison; Regulus paroîtroit sujet à un mouvement propre. M. le Monnier l'indique dans son Astronomie nautique, pag. 79; mais il dit que ce mouvement ne paroît pas être bien sensible: M. Mayer le fait de $16''$ en cinquante ans, contre l'ordre des signes, & M. Maskeline, de $41''$ en cent ans; il en résulteroit une ascension droite d'environ $1' \frac{1}{2}$ plus forte que celle ci-dessus vers 1532. Il paroît que M. le Monnier a tenu compte d'un mouvement en déclinaison entre 1750 & 1770, dans la Table de l'Astronomie nautique. M. Mayer a trouvé ce mouvement de $10''$ vers

SUR LES COMETES DE 1532 ET DE 1661. 341

le nord en cinquante ans : on demandera sans doute si les observations de Rœmer , qu'il a employées dans ces recherches, étoient assez exactes pour s'assurer d'une aussi petite quantité. M. Maskeline ne paroît point avoir reconnu de mouvement en déclinaison , du moins selon sa Table. Enfin il semble qu'on pourroit supposer ce mouvement de $\frac{1}{4}$ de minute de ce temps-ci à 1532 , & diminuer d'autant la déclinaison de Regulus pour cette époque , en partant des Catalogues les plus récents. Les observations assez exactes pour donner des quantités aussi petites, sont encore trop peu éloignées entre elles, pour qu'on puisse se flatter de déterminer avec précision la correction convenable aux siècles précédens. On croit qu'il est suffisant, pour répondre aux vûes de l'Académie , d'avoir assigné quelle influence ces mouvemens peuvent avoir sur les observations de la Comète par Apian : il est certain que l'erreur qui en peut résulter est incomparablement plus petite que celle des observations, de la manière dont elles ont été faites par Apian.

On fera pour 1532.

L'ascension droite de <i>Regulus</i> de.....	145° 48'	10''	} DÉCLINAISON.	14° 12'	10''
Le mouv. jusqu'au commenc. d'Oct. 1532.	+	37		—	13
Position moyenne du 2 au 3 Oct.....	145. 48	47		14. 11	47
Aberration.	—	11,2		+	3,8
Nutation.	—	6,9		—	3,1
Position appar. de <i>Regulus</i> du 2 au 3 Oct. 145	48	29		14. 11	48.

ARCTURUS.

On trouve dans le volume de l'Académie pour 1769 , un excellent Mémoire de M. le Monnier sur le mouvement propre d'Arcturus. Ce célèbre Astronome établit d'abord la position de cette étoile pour le 21 Juin 1675 , en entrant dans une discussion très-étendue sur les observations de ce temps.

L'ascension dr. moy. étoit à cette époque de	210° 13'	40''	} DÉCLINAISON.	20° 53'	33''
Ses Observations de 1769 donnent.....	211. 17	20.		20. 23	35 $\frac{1}{2}$
Donc en quatre-vingt-quatorze ans.....	1. 3	40		29. 57	$\frac{1}{2}$
Le mouvement auroit dû être de.....	1	6 14		26 58	
Différence en quatre-vingt-quatorze ans..	—	2 34		+	3 0
C'est en cent ans.....	—	2 43,8		+	3 11 $\frac{1}{2}$

En partant de ces données, j'ai établi pour le premier Novembre 1532.

Ascension droite.	Déclinaison.	
208° 36' 54" $\frac{1}{2}$	21° 39' 51" $\frac{1}{2}$	Selon M. le Monnier.
208 36 0	21 39 46	Catal. Britann. en y appliquant le mouv. propre.
208 36 58 $\frac{1}{2}$	21 39 35	M. Bradley, mouv. prop. selon M. le Monnier.
208 36 1	21 40 58	M. Mayer, & le mouv. propre donné par lui.
208 36 1	21 39 56	M. Maskeline, & le mouv. propre d'après lui.

Les résultats ci-dessus ne sont pas bien d'accord pour l'ascension droite, excepté ceux d'après M. Bradley & M. le Monnier. Il paroît que MM. Mayer & Maskeline ont fait le mouvement en ascension droite un peu trop lent, car toutes s'accorderoient assez (excepté celle de Flamsteed), si l'on y appliquoit le mouvement propre d'après M. le Monnier; mais comme M. le Monnier a recherché la position & le mouvement propre d'Arcturus par les observations les plus éloignées & les plus favorables, on s'en tiendra à ce qui résulte de ses données. On voit encore ici combien ces différences sont au dessous de l'erreur qu'Apian a pu commettre dans ses observations.

	Ascension droite.	Déclinaison.
Donc position moy. d'Arcturus pour le 1 ^{er} Nov. 1532.	208° 36' 54" $\frac{1}{2}$	21° 39' 51"
Et l'apparente.	208 36 29	21 39 57

Lieux du Soleil au temps de chaque observation.

ANNÉE 1532.	TEMPS VRAI à Dieppe.	LONGITUDE du Soleil.	LOG. DIST. du Soleil.	EQUATION du Temps.	ASCENSION droite du Soleil.
Oct. 2	5 ^h 3' 54"	6° 18' 32' 40"	4.998155	— 13' 13"	197° 6' 1"
3	4 43 0	6 19 31 34	4.998030	— 13 27	198 0 52
14	5 15 22	7 0 31 11	4.996710	— 15 22	
19	5 15 47	7 5 31 38	4.996165	— 15 47	
31	5 15 11	7 17 35 57	4.994953	— 15 28	225 7 25
Nov. 1	5 49 35	7 18 18 0	4.994867	— 15 21	226 9 50
8	5 18 44	7 25 41 21	4.994242	— 14 9	233 9 32

Les temps vrais ont été calculés d'après les hauteurs d'étoiles

SUR LES COMETES DE 1532 ET DE 1661. 343

données dans les Observations d'Apian : on se dispensera d'entrer dans d'autres détails à ce sujet; on rapportera seulement ci-après les angles horaires en degrés, & les ascensions droites du milieu du ciel, pour s'en servir à la détermination des lieux de la Comète.

La troisième & la quatrième observation ont été faites à Leipfick : Apian n'en a pas donné les temps vrais; on a supposé que c'étoit vers 5 heures du matin, & les lieux du Soleil ont été calculés pour 5 heures, temps moyen à Leipfick; c'est pourquoi on voit des minutes & des secondes dans les temps vrais de ces jours-là.

Apian n'ayant donné que les résultats de ses Observations des 14 & 19 Octobre, on ne peut rédiger que les deux premières & les trois dernières faites à Dresde.

Détermination des ascensions droites, déclinaisons, longitudes & latitudes de la Comète par les Observations d'Apian.

PREMIÈRE OBSERVATION du 2 Octobre 1532; à 5^h 3' 54" temps vrai au matin.

Hauteur de la Comète....	13° 10' 0"	Azimuth de la Comète	} 24° 30' 0"
Réfraction.....	— 4 0	de l'Orient au Midi.	
Parallaxe de hauteur.....	+ 0 13		
Hauteur vraie de la Comète.	13. 6 13	Latitude.....	51 5 0
De ces données on conclut l'angle horaire oriental de la Comète de			62° 44' 20"
L'ascension du milieu du ciel étoit alors.....			92 59 17
Donc ascension droite de la Comète.....			155 43 37
On trouve aussi sa déclinaison australe.....			4 26 5
Et supposant que l'obliquité moyenne de l'écliptique étoit alors.....			23 29 43
On aura la longitude de la Comète de.....	5° 9' 12.39		
Aberration & nutation.....			+ 17
(a) Latitude australe.....	13. 33. 5		
Aberration.....			— 21

(a) Apian donne l'Azimuth de Regulus, ainsi que sa hauteur : si on employoit l'Azimuth pour trouver l'ascension droite du milieu du ciel, on auroit la longitude de la Comète de 5° 7' 10' 8", & la latitude de 14° 20' 6"; ce qui fait voir quel degré d'incertitude il y a dans ces observations. J'ai préféré la hauteur, parce que le mouvement du 2 au 3 m'a déjà paru bien grand, & parce qu'Apian ne donne l'Azimuth de l'étoile que cette seule fois.

II.^e OBSERVATION, le 3 Oct. à 4^h 43' 0" temps vrai au matin.

Hauteur de la Comète.....	9° 0' 0"	Azimuth de la Comète de l'Orient au Midi. } 16° 43' 0"
Réfraction.....	— 5 48	
Parallaxe de hauteur.....	+ 13	
Hauteur vraie.....	8 54 25	

Angle horaire oriental de la Comète.....	71° 24' 13"
Ascension droite du milieu du ciel.....	88 45 49
Ascension droite de la Comète.....	160 10 2
Déclinaison australe.....	3 19 40
Donc longitude de la Comète.....	5 ^s 12 58 46
Aberration & nutation.....	+ 17
Latitude australe.....	10 51 6
Aberration.....	— 21

V.^e OBSERV. le 31 Oct. à 5^h 15' 11" $\frac{1}{2}$ de temps vrai au matin.

Hauteur de la Comète.....	8° 0' 0"	Azimuth de la Comète de l'Orient au Midi. } 3° 43' 0"
Parallaxe de hauteur.....	+ 0 7	
Réfraction.....	— 6 29	
Hauteur vraie.....	7 53 38	

Angle horaire oriental de la Comète.....	82° 9' 10"
Ascension droite du milieu du ciel.....	123 55 17
Ascension droite de la Comète.....	206 4 27
Déclinaison boréale.....	3 48 52
Donc longitude de la Comète.....	6 ^s 22 44 42
Aberration & nutation.....	+ 27
Latitude boréale.....	13 38 2
Aberration.....	+ 7

J'ai supposé ici l'Azimuth de l'Orient au Midi, quoiqu'il soit donné dans Apian de l'Orient au Nord, par les raisons que j'ai déjà rapportées ci-dessus, & parce qu'alors on trouveroit l'ascension droite de la Comète de 211° 46' 7", la déclinaison boréale de 8° 27' 8"; ce qui surpasseroit de beaucoup les résultats de l'observation du lendemain.

VI.^e OBSERV. le 1.^{er} Novembre, à 5^h 49' 34" $\frac{1}{2}$ du matin.

Hauteur de la Comète.....	12° 40' 0"	Azimuth de la Comète de l'Orient au Midi. } 8° 50' 0"
Parallaxe de hauteur.....	+ 6,5	
Réfraction.....	— 4 9,4	
Hauteur vraie.....	12 35 57	

Angle

SUR LES COMETES DE 1532 ET DE 1661 345

Angle horaire oriental de la Comète.....	75° 16' 28"
Ascension droite du milieu du ciel.....	133 33 17
Ascension droite de la Comète.....	208 49 59
Déclinaison boréale.....	4 19 6
Donc longitude de la Comète.....	6° 25 11 45
Aberration & nutation.....	+ 36
Latitude boréale.....	15 7 8
Aberration.....	+ 7

VII.^e OBSERV. le 8 Nov. à 5^h 18' 44" $\frac{1}{4}$ de temps vrai au matin.

Hauteur de la Comète.....	7° 20' 0"	Azimuth de la Comète de l'Orient au Nord. } 0° 30' 0"
Réfraction.....	— 7 2	
Parallaxe de hauteur.....	+ 0 6	
Hauteur vraie.....	7 13 4	

Angle horaire oriental de la Comète.....	85° 50' 14"
Ascension droite du milieu du ciel.....	133 1 35
Ascension droite de la Comète.....	218 51 49
Déclinaison boréale.....	5 55 23
Donc longitude de la Comète.....	7° 4 26 49
Aberration & nutation.....	+ 27
Latitude boréale.....	20 5 16
Aberration.....	+ 5

Comparaison des longitudes & latitudes rapportées ci-dessus, avec celles qu'Apian a conclues de ses Observations.

ANNÉE 1532.	TEMPS VRAI à DRESDE.	LONGITUDES de LA COMÈTE.	DIFFÉRENCES.	LATITUDES de LA COMÈTE.	DIFFÉRENCES.
O&. 2	5 ^h 3' 54"	5° 9' 12' 56"	0° 49' +	13° 32' 44" A	0° 11' —
	Apian....	5 8 24		13 44	
3	4 43 0	5 12 59 3	1 34 +	10 50 45 A	0 49 +
	Apian....	5 11 25		10 12	
31	5 15 11	6 22 45 9	1 15 +	13 38 9 B	0 23 +
	Apian....	6 21 30		13 15	
Nov. 1	5 49 35	6 25 12 21	1 15 +	15 7 15 B	0 15 +
	Apian....	6 23 57		14 42	
8	5 18 44	7 4 27 16	0 52	20 5 21	0 29 +
	Apian....	7 3 35		19 36	

On voit par cette Table, que les longitudes d'Apian sont toujours trop petites, & ses latitudes boréales toujours trop fortes.

Il supposoit l'ascension droite de Régulus de $0^{\circ} 54'$ trop peu avancée ; ce qui cause une grande partie de l'erreur ; il donne la position d'Arcturus au sujet de la Comète de 1531 ; son ascension droite est de $28'$ trop petite, & la déclinaison de $42'$ trop forte : il paroît qu'il s'est servi des Tables Alphonsines, tant pour les lieux du soleil que pour ceux des étoiles, & qu'il n'employoit que des moyens mécaniques pour réduire ses observations ; ainsi il n'est pas étonnant qu'on trouve d'aussi grandes différences entre ses résultats & ceux calculés exactement.

Le mouvement apparent total en longitude a été de $1^{\circ} 25^{\circ} 14'$, on a $3'$ de moins selon Apian.

Le mouvement apparent total en latitude a été de $33^{\circ} 38'$, on a $18'$ de moins selon Apian.

Comparaison des longitudes & latitudes observées avec celles calculées sur les élémens de M. Halley.

ANNÉE 1532.	TEMPS VRAI à DRESDE ou à LEIPSICK.	LONGITUDES vraies géocentriques DE LA COMÈTE.	DIFFÉRENCES.	LATITUDES vraies géocentriques DE LA COMÈTE.	DIFFÉRENCES.	DISTANCES à LA TERRE.
Oct. 2	$\left\{ \begin{array}{l} 5^h 3 54'' \\ \text{Théorie..} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5^{\circ} 9^{\circ} 12 56'' \\ 5 9 18 10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0^{\circ} 5' + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 13^{\circ} 32' 44'' \text{ A} \\ 14 36 10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} 3' + \end{array} \right.$	0,654
3	$\left\{ \begin{array}{l} 4 43 0 \\ \text{Théorie..} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5 12 59 3 \\ 5 10 58 37 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 0 - \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 10 50 45 \text{ A} \\ 12 59 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 8 + \end{array} \right.$	0,663
14	$\left\{ \begin{array}{l} 5 15 22 \\ \text{Théorie..} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6 0 0 0 \\ 5 28 18 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 42 - \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 0 0 \\ 2 33 54 \text{ B} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 34 + \end{array} \right.$	0,826
19	$\left\{ \begin{array}{l} 5 15 47 \\ \text{Théorie..} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6 5 46 \\ 6 5 46 55 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \frac{1}{2} + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 51 \text{ B} \\ 7 26 45 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 36 + \end{array} \right.$	0,948
31	$\left\{ \begin{array}{l} 5 15 11 \\ \text{Théorie..} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6 22 45 9 \\ 6 22 51 14 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 6 + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 13 38 9 \text{ B} \\ 13 48 23 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 10 + \end{array} \right.$	1,202
Nov. 1	$\left\{ \begin{array}{l} 5 49 35 \\ \text{Théorie..} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6 25 12 21 \\ 6 24 12 28 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 0 - \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 15 7 15 \text{ B} \\ 14 5 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 2 - \end{array} \right.$	1,253
8	$\left\{ \begin{array}{l} 5 18 44 \\ \text{Théorie..} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 7 4 27 16 \\ 7 2 48 4 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 39 - \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 20 5 21 \text{ B} \\ 15 17 10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 48 - \end{array} \right.$	1,377

SUR LES COMETES DE 1532 ET DE 1661. 347

Les différences entre le calcul, d'après les élémens & l'observation, sont très-considérables, sur-tout en latitude ; les observations d'Apian ont été faites trop grossièrement, pour espérer de les faire accorder dans tous les points d'une courbe exacte ; cependant on remarquera que le mouvement en latitude, d'après les élémens de M. Halley, se trouve d'environ 6 degrés plus petit que selon les observations.

Il seroit à désirer qu'on pût trouver d'autres observations, pour vérifier celles d'Apian ; on n'a que celles de Fracastor, qui malheureusement ne sont guere propres à cet objet.

Voici le détail de ces observations, tel qu'on le trouve à la pag. 42 de quelques fragmens tirés d'un manuscrit de la main de l'Auteur, & imprimés à la suite des Poésies de Fracastor. (2^e édit. Padoue, 1739, in-4^o.) Les observations y sont plus détaillées, plus nombreuses, & me paroissent moins incorrectes que celles qui sont rapportées dans les homocentriques du même Auteur (in-4^o. 1538, sect. 3, chap. 3, pag. 59).

*Observations de la Comète de 1532, faites à Vérone
par Fracastor.*

Videri primùm is cœpit Cometa die 22 Septembris, desit
4 Decembris. Nos non nisi ultimâ Septembris per instrumenta
habuimus observationem illius. Erat eâ die Saturnus in grad.
13 Cancrî, versûs austrum min. 47, suprà horizontem grad.
65, ante medium cœli grad. 13, medium cœli erat grad. 2
Cancrî. Cometa tamen erat eâ parte supra horizontem grad.
17, ante medium cœli grad. 60, ab æquinoctiali australis grad.
circiter 6, ab ecliptica in Virgine grad. circiter 5. Die primâ
Octobris, eodem accepto medio cœli ex Saturno, apparuit
Cometa in Virgine, grad. 7, australis ab æquinoctiali, grad. $3\frac{1}{2}$;
ab ecliptica, ferè 14. Die 2, fuit in Virgine, grad. ferè $8\frac{1}{2}$, ab
æquinoctiali, grad. 2, ab ecliptica, $12\frac{1}{2}$. Die 3, in Virgine, grad.
11, australis ab æquinoctiali, grad. 1, ab ecliptica, grad. 9. Die 12,

visus fuit in Virgine, grad. 22, septentrionalis ab æquinoctiali, grad. 3, australis ab ecliptica, min. 30. Die 16, apparuit in Libra, grad. ferè 2, septentrionalis ab ecliptica, grad. 4, ab æquinoctiali, 2. Die 23, visus fuit in Libra, grad. 12, Septentrionalis ab ecliptica, 2, australis ab æquinoctiali, grad. 4. Die 4 Novembris, fuit in Libra, grad. 20, australis ab æquinoctiali, grad. $3\frac{1}{2}$, ab ecliptica septentrionalis, grad. ferè 8. Die 27 Novembris, fuit in Scorpio, grad. ferè 8, australis ab æquinoctiali, grad. 6. Visus deindè & 4 die Decembris, sed incertâ observatione. Videtur igitur in diebus 65, in longitudine peregrissè, grad. 67, orientem versùs, in latitudine autem grad. circiter 10 obliqûè, quasi arcu factò, cujus capita australia fuerint, venter verò septentrionalis.

Ces observations, & sur-tout les dernières, diffèrent beaucoup de celles d'Apian; elles s'accordent encore moins que celles-ci avec les élémens de M. Halley. Pour en faire le calcul, j'ai supposé que Fracastor avoit observé la Comète vers 5 heures du matin.

Comparaison des Observations de Fracastor avec les élémens de M. Halley.

ANNÉE 1532.	TEMPS vrai à VÉRONE.	LONGITUDES vraies géocentriques DE LA COMÈTE.	LONGITUDES par LES ÉLÉMENTS.	DIFFÉRENCES.	LATITUDES vraies géocentriques DE LA COMÈTE.	LATITUDES par LES ÉLÉMENTS.	DIFFÉRENCES.
Sept. 30	5 ^h 0'	5° 50' 0"	5° 50' 48"	+ 0° 48'	15° 0'. A	17° 57'.	+ 2° 57'
Oct. 1	5 0	5 7 0	5 7 36	+ 0 36	14 0 —	16 17	+ 2 17
2	5 0	5 8 30	5 9 18	+ 0 48	12 30	14 36	+ 2 6
3	5 0	5 11 0	5 10 59	— 0 1	9 0	12 59	+ 3 59
12	5 0	5 22 0	5 25 17	+ 3 17	0 30. A	0 11. B	+ 0 41
16	5 0	6 2 —	6 1 18	— 0 42	4 0. B	4 40	+ 0 40
23	5 0	6 12 0	6 11 39	— 0 33	2 0	10 18	+ 8 18
Nov. 4	5 0	6 20 0	6 27 56	+ 7 56	8 0	14 45	+ 6 45
27	5 0	7 8 0	7 17 29	+ 9 29	9 43	17 38	+ 7 55

On voit combien ces observations s'éloignent des positions calculées d'après les élémens de M. Halley ; il est possible qu'il se soit glissé quelques fautes d'impression dans les dernières observations. Il y a une erreur évidente dans la déclinaison du 23 ; cette déclinaison a dû être boréale & non australe ; la suite même des observations indique que la latitude devoit être plus grande ce jour-là , que celle donnée par Fracastor. Enfin, dans les dernières observations , les différences entre les latitudes observées & celles calculées , sont en sens contraire de celles d'Apian.



OBSERVATIONS

DE LA COMÈTE DE 1661.

CETTE Comète fut observée à Dantzic par Hévélius, depuis le 3 Février jusqu'au 28 Mars; il la compara, suivant sa méthode ordinaire d'observer, à différentes étoiles, en prenant, avec un très-grand sextant à pinules, les distances de la Comète aux étoiles. Il prit aussi des hauteurs d'étoiles avec un petit quart de cercle qui ne donnoit que les minutes, pour corriger le temps de l'horloge portative dont il se servoit : il prit de même les hauteurs de la Comète; celles-ci sont toujours marquées *à peu près*, & l'on verra qu'effectivement elles étoient souvent peu exactes.

Cette manière d'observer entraîne dans des réductions excessivement longues; je donnerai seulement les principaux élémens de calcul, afin de ne pas être trop long. On trouvera tout ce qu'il est nécessaire d'avoir pour vérifier mes résultats. Je vais commencer par dire un mot sur la latitude & la longitude de l'observatoire d'Hévélius; je rapporterai ensuite ses observations relatives à la Comète, extraites de sa Cométographie, depuis la page 725 jusques & compris la page 730.

La latitude a été supposée, dans tous les calculs suivans, de $54^{\circ} 22' 14''$; je l'ai déduite de toutes les hauteurs solsticiales & des hauteurs méridiennes, supérieures & inférieures, de l'étoile polaire, observées par Hévélius avec son grand quart de cercle azimuthal, depuis 1652 jusqu'en 1675. Hévélius avoit établi cette latitude de $54^{\circ} 22' 52''$ (prod. astron.); mais il négligeoit la réfraction dans les hauteurs de la polaire, &c.

La conn. des temps donne la longitude de Dantzic de $1^{\text{h}} 4' 44''$ de temps à l'orient de Paris, d'après M. de Cassini. J'ai soupçonné cette quantité un peu trop petite; la plupart des occultations d'étoiles & éclipses de Soleil, observées par Hévélius, me la donnoient plus grande; enfin, je l'ai trouvée de $1^{\text{h}} 5' 12''$ par deux occultations & une éclipse de Soleil, observées ces années dernières à Dantzic par M. Volf, comparées aux correspondantes à Paris : je pourrai en donner les détails dans un autre Mémoire.

*OBSERVATIONES Cometæ 1661, mensè Febr. & Martio, Gedani, à
Johanne Hevelio peractæ.*

JUXTA HOROLOG. AMBULAT. MANE.	DIE JOVIS, 3 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.	DISTANTIÆ & ALTITUDINES.	TEMPUS EX ALTITUDINE CORRECT.	DISTANTIÆ PER REFRACTIONES CORRECTÆ.
5 ^h 29' 30"	Altitudo lyræ pro corrigendo tempore.....	50° 25' 0"	5 ^h 37' 11"	
5 30 45	Denuo capta.....	50 35 0	5 38 20	
5 33 30	Distantia Cometæ à cauda Cygni.....	40 30 0	5 41 18	40° 35' 55"
5 35 30	Eadem distantia.....	40 30 15	5 43 22	
5 36 0	Altitudo Cometæ..... circ.	7 28 0	5 44 0	
5 44 0	Distantia Cometæ à capite Serpentarii.....	47 12 40	5 22 18	47 17 34
5 46 30	Eadem distantia.....	47 13 15	5 54 54	
5 48 0	Altitudo Cometæ..... circ.	9 2 0	5 56 27	
5 50 0	Distantia Cometæ à penultima caudæ Serpentis....	36 35 30	5 58 32	36 18 27
	Eadem distantia.....	36 35 30		
6 10 30	Distantia Cometæ à cauda Cygni.....	40 31 25	6 19 59	40 34 0
	Eadem distantia.....	40 31 25		
6 12 0	Altitudo Cometæ..... circ.	12 15 0	6 21 32	
6 15 40	Altitudo caudæ Cygni pro corrigendo tempore....	43 8 0	6 25 23	
6 18 30	Altitudo lucidæ Aquilæ.....	24 13 0	6 28 14	
6 19 45	Denuo capta.....	24 24 0	6 30 52	
	DIE SATURNI, 5 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.			
4 33 10	Altitudo lyræ pro corrigendo tempore.....	42 6 0	4 31 57	
4 34 10	Eadem altitudo.....	42 12 0	4 32 30	
4 41 0	Cauda Cometæ suprahoriz. conspicua fuit nudo oculo.		4 39 27	
4 42 0	Altitudo extremitatis caudæ suprâ horiz. visæ. circ.	2 45 0	4 40 27	
4 46 0	Altitudo Cometæ.....	2 0 0	4 44 25	
5 0 30	Distantia Cometæ à capite Serpentarii.....	44 12 45	4 58 49	44 21 18
5 3 40	Eadem distantia.....	44 12 25	5 1 57	44 20 48
5 4 30	Altitudo Cometæ..... circ.	4 18 0	5 2 46	
5 9 0	Distantia cuspidis caudæ à capite Serpentarii.....	40 42 20	5 8 15	
5 14 0	Distantia Cometæ à cauda Cygni.....	39 34 55	5 14 13	39 42 5
5 18 40	Eadem distantia.....	39 33 25	5 17 1	39 40 27
5 19 20	Altitudo Cometæ..... circ.	7 15 0	5 17 40	
5 23 0	Distantia cusp. caudæ à cauda Cygni.....	35 10 40	5 21 10	
5 28 45	Distantia Cometæ ab extrema alæ Cygni..... dub.	26 16 45	5 26 52	26 10 15
5 31 0	Eadem distantia.....	26 16 25	5 29 5	
5 32 0	Altitudo Cometæ.....	8 31 0	5 30 4	
5 38 40	Distantia Cometæ à penultima caudæ Serpentis....	33 40 15	5 36 42	33 42 43
5 41 40	Eadem distantia.....	33 40 5	5 39 11	
5 48 0	Distantia Cometæ à capite Serpentarii.....	44 13 0	5 45 58	44 16 38
	Eadem distantia.....	44 13 0		
5 52 10	Altitudo Cometæ.....	11 34 0	5 50 6	
5 59 40	Distantia Cometæ à cauda Cygni.....	39 40 45	5 57 33	39 43 15
	Eadem distantia.....	39 40 45		
6 3 0	Altitudo Cometæ.....	13 10 0	6 0 51	
6 4 45	Altitudo caudæ Cygni pro corrigendo tempore....	41 15 0	6 3 29	
6 5 45	Eadem altitudo.....	41 21 0	6 4 20	

JUXTA
HOROLOG.
AMBULAT.
MANE.

DIE SATURNI, 5 FEBRUARII,
COMETA OBSERVATUS.

DISTANTIÆ
&
ALTITUDINES.

TEMPUS
EX
ALTITUDE
CORRECT.

DISTANTIÆ
PER
REFRACTIONES
CORRECTÆ.

6^h 13 30''
6 15 0
6 15 45
6 23 30

6 25 0
6 34 30
6 41 15
6 42 15

Distantia Cometæ à Venere.....
Altitudo Veneris..... circ.
Altitudo Cometæ..... circ.
Distantia Cometæ à capite Serpentarii..... dub.
Eadem distantia.....
Altitudo Cometæ..... circ.
Altitudo caudæ Cygni. Vix satis diligenter. ob crepusc.
Altitudo Arcturi.....
Eadem altitudo.....

34° 47' 35''
3 16 0
14 58 0
43 51 50
43 51 50
16 30 0
45 20 0
50 0 0
49 52 0

6^h 11' 18''
6 12 47
6 13 31
6 21 6

6 22 36
6 32 0
6 38 54
6 40 12

DIE SOLIS, 6 FEBRUARII,
COMETA OBSERVATUS.

5 10 45
5 12 40
5 20 0
5 21 0
5 25 40
5 33 15

5 41 15
5 44 0
5 46 0
5 47 0
5 50 0
6 12 0
6 13 0
6 14 0
6 21 0

6 30 0
6 31 0
6 35 0
6 36 45

Altitudo caudæ Cygni..... dub.
Eadem altitudo.....
Distantia Cometæ à penult. caudæ Serpentis dub.
Eadem distantia.....
Distantia cusp. caudæ à capite Serpentarii.....
Distantia Cometæ à capite Serpentarii.....
Eadem distantia.....
Distantia Cometæ à cauda Cygni.....
Eadem distantia.....
Denuò capta.....
Altitudo Cometæ..... circ.
Distantia cusp. caudæ à cauda Cygni.....
Distantia Cometæ ab extrema alæ Cygni.....
Eadem distantia.....
Altitudo Cometæ..... circ.
Distantia Cometæ à capite Serpentarii.....
Eadem distantia.....
Distantia Cometæ à cauda Cygni.....
Altitudo Cometæ.....
Altitudo lyrx.....
Eadem altitudo.....

33 5 0
33 20 0
32 19 50
32 19 55
39 40 0
42 37 45
42 37 45
39 22 50
39 22 10
39 22 30
10 40 0
36 47 0
26 38 15
26 38 15
15 0 0
42 38 50
42 38 50
39 27 15
17 0 0
53 18 0
58 30 0

4 57 40
4 59 29
5 6 43
5 8 48
5 12 10
5 19 32

5 27 18
5 31 2
5 31 59
5 32 54
5 35 48
5 57 10
5 58 8
5 59 3
6 5 58

6 14 40
6 15 38
6 19 34
6 21 2

32° 23' 37

42 40 25

26 40 0

42 40 42

39 28 40

DIE LUNÆ, 7 FEBRUARII,
COMETA OBSERVATUS.

3 49 0
3 51 45
4 21 30
4 44 0
4 51 0
4 53 25
4 57 40
4 59 40
5 1 35
5 3 50
5 18 30
5 20 45
5 22 30
5 23 26

Altitudo lyrx.....
Eadem altitudo.....
Cauda primum sup. horiz. conspecta.....
Dist. cusp. caudæ à cap. Serpentarii..... dub.
Distantia Cometæ à cap. Serpentarii.....
Eadem distantia.....
Distantia Cometæ à cauda Cygni.....
Eadem distantia.....
Altitudo Cometæ.....
Distantia cusp. caudæ à cauda Cygni..... dub.
Distantia Cometæ ab extrema alæ Cygni.....
Eadem distantia.....
Denuò capta.....
Altitudo Cometæ..... circ.

36 6 20
36 30 15
.....
38 44 30
41 15 15
41 11 20
39 8 55
39 07 50
7 0 0
36 19 25
26 51 35
26 49 0
26 50 20
11 3 0

3 41 25
3 44 21
4 14 41
4 37 38
4 44 47
4 47 15
4 51 35
4 53 38
4 55 34
4 57 51
5 12 46
5 15 3
5 16 51
5 17 50

41 21 55

39 14 37

26 52 30

JUXTA HOROLOG. AMBULAT. MANE.	DIE LUNÆ, 7 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.	DISTANTIÆ & ALTITUDINES.	TEMPUS EX ALTITUDINE CORRECT.	DISTANTIÆ PER REFRACTIONES CORRECT.
5 ^h 24' 54"	Altitudo caudæ Cygni pro corrig. temp.	36° 51' 0"	5 ^h 19' 11"	
5 29 15	Distantia Cometæ à dextro genu Pegasi.	41 4 45	5 24 46	
5 30 20	Eadem distantia.	41 4 30	5 24 52	41° 4' 45"
5 33 25	Denuò capta.	41 4 30	5 28 0	
5 44 50	Distantia Cometæ à lucida Lyra.	39 56 40	5 39 40	
5 47 30	Eadem distantia.	39 57 50	5 42 25	40 1 40
5 51 0	Rursus.	39 57 50	5 46 0	
5 59 20	Distantia Cometæ à cap. Serpentarii. dub.	40 58 25	5 54 25	
6 1 35	Altitudo Cometæ. circ.	15 30 0	5 56 44	
6 5 25	Distantia à cauda Cygni. dub.	39 11 0	6 0 39	40 11 22
6 10 25	Altitudo Cometæ. circ.	17 15 0	6 5 45	
6 12 15	Altitudo caudæ Cygni. dub.	43 22 20		
6 14 20	Eadem altitudo.	43 39 5		
6 40 40	Altitudo Arcturi.	48 59 0	6 36 31	
6 41 30	Eadem altitudo.	48 52 0	6 37 42	
DIE JOVIS, 10 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.				
4 23 50	Altitudo Lyra.	41 43 0	4 9 35	
4 24 45	Eadem altitudo.	41 57 0	4 11 12	
4 53 30	Distantia Cometæ à capite Serpentarii.	37 23 45	4 39 30	37 28 15
4 55 45	Denuò capta.	37 23 5	4 41 45	
4 56 30	Altitudo Cometæ. circ.	9 30 0	4 42 25	
5 2 40	Distantia Cometæ à cauda Cygni.	39 5 30	4 48 30	39 8 50
5 5 15	Eadem distantia.	39 5 30	4 51 5	
5 10 0	Distantia Cometæ ab extr. alæ austr. Cygni.	28 7 15	4 55 45	28 8 30
5 12 0	Eadem distantia.	28 7 11	4 57 45	
5 16 30	Distantia Cometæ à dext. genu Pegasi.	43 33 30	5 2 12	43 33 30
5 19 0	Eadem distantia.	43 32 50	5 4 42	
5 29 0	Distantia Cometæ à lucida Lyra.	37 40 20	5 14 40	37 43 32
5 33 0	Eadem distantia.	37 39 30	5 19 40	
5 35 0	Altitudo Cometæ. circ.	15 0 0	5 20 35	
5 42 30	Distantia Cometæ à cauda Cygni.	39 7 45	5 28 5	39 9 22
5 44 15	Eadem distantia.	39 7 20	5 29 50	
5 46 0	Altitudo Cometæ.	16 0 0	5 31 32	
5 50 45	Distantia Cometæ à capite Serpentarii. dub.	37 31 35	5 36 17	37 33 2
	Eadem distantia. dub.	37 31 35		
5 55 0	Altitudo Cometæ. circ.	17 50 0	5 41 30	
6 0 0	Distantia Cometæ ab infer. in dext. man. Serpent.	35 39 5	5 45 30	35 39 10
6 3 0	Eadem distantia.	35 39 0	5 48 30	
6 4 5	Altitudo Cometæ. circ.	18 50 0	5 49 0	
6 5 0	Altitudo infer. in dext. man. Serpent. circ.	20 0 0	5 51 25	
6 10 15	Distantia Cometæ à capite Serpentarii. dub.	37 17 40	5 55 35	
	Eadem distantia.	37 17 40		
6 16 40	Distantia Cometæ à cauda Cygni. dub. ob Auroram.	39 7 5	6 1 55	
6 17 30	Altitudo Cometæ. circ.	21 25 0	6 2 45	
6 21 30	Altitudo caudæ Cygni.	44 25 55	6 6 47	
6 24 30	Eadem altitudo.	44 49 40	6 9 39	

JUNTA HOROLOG. AMBULAT. MANE.	DIE SOLIS, 13 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.	DISTANTIE & ALTITUDES.	TEMPUS EX ALTITUDE CORRECT.	DISTANTIE PER REFRACTIONES CORRECTÆ.
4 ^h 19 45"	Altitudo Lyrae.....	44° 43' 0"	4 ^h 18' 27"	
4 21 0	Eadem altitudo.....	44 51 0	4 19 22	
4 28 0	Distantia caudæ Cygni & Cometae.....	39 27 0	4 26 30	
4 34 0	Eadem distantia.....	39 28 45	4 32 30	39° 30' 32
4 47 0	Distantia Cometae ab Ancone alæ infer. Cygni.....	29 19 0	4 45 30	
4 51 0	Eadem distantia.....	29 17 0	4 49 50	29 13 43
5 4 0	Distantia Cometae ab Ancone sup. alæ Cygni.....	38 9 30	5 3 0	
5 8 30	Eadem distantia.....	38 5 30	5 7 47	38 7 0
5 11 30	Densio capiti.....	38 5 30	5 10 57	
5 34 0	Distantia Cometae ab Ancone inf. alæ Cygni.....	29 17 45	5 34 0	
	Eadem distantia.....	29 18 0		
5 44 0	Altitudo caudæ Cygni.....	42 57 0	5 44 24	
5 45 0	Eadem altitudo.....	43 5 0	5 45 17	
5 49 0	Distantia Cometae ab Ancone sup. alæ Cygni.....	38 6 30	5 49 20	
5 50 0	Eadem distantia.....	38 6 30	5 50 25	
5 52 30	Altitudo Cometae.....	22 10 0	5 53 0	
5 54 40	Altitudo Aquilæ.....	25 15 0	5 56 8	
DIE LUNÆ, 14 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.				
5 0 0	Distantia Cometae à collo Aquilæ æqualis erat distantia duarum fixarum in pede Bor. Cygni.....	4 54 0	
5 18 0	Altitudo Lyrae.....	53 26 0	5 14 17	
5 21 0	Altitudo Cometae.....	19 15 0		
5 26 0	Cometa triangulum æquilaterum, cum lucida in scapulis & lucidam sequente, constituebat; basis erat lucida Aquilæ & lucidam sequens.....	5 22 0	
	Distantia Cometae à lucida & à collo obtinebat rationem sesqui alteram, hoc est 2 ad 3.....			
5 39 30	Altitudo Cometae.....	22 12 0	5 39 0	
5 41 0	Altitudo Lyrae.....	57 9 0	5 40 38	
DIE JOVIS, 17 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.				
4 41 0	Dist. Com. à lucid. Aquil. min. aliquant. dist. lucid. & colli, aliquant. verò maj. dist. lucid. & humeri Aquil.	4 48 0	
5 5 0	Altitudo caudæ Cygni.....	40 45 0	5 12 46	
5 8 0	Altitudo Cometae.....	21 30 0	5 16 0	
DIE SOLIS, 20 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.				
3 9 15	Altitudo Lyrae.....	39 14 0	3 13 10	
3 12 0	Eadem altitudo.....	39 42 0	3 16 28	
	Distantia Cometae à stell. alæ austr. (μ).....	1 0 0	tubo majori.	
	Et ab australiori (α).....	1 30 0		
	Ab nova aliqua stella supra hanc, Austr. versus.....	0 45 0		
4 45 5	Distantia Cometae ab Ancone alæ aust. Cygni.....	31 8 0	4 49 20	
4 49 0	Eadem distantia.....	31 2 0	4 53 20	
4 56 0	Distantia Cometae ab Ancone alæ Bor. Cygni.....	38 10 30	5 0 20	
4 58 0	Eadem distantia.....	38 11 25	5 2 0	
5 0 0	Altitudo Cometae..... circ.	23 0 0	5 4 20	

JUXTA HOROLOG. AMBULAT. MANE.	DIE SOLIS, 20 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.	DISTANTIAE & ALTITUDINES.	TEMPUS EX ALTITUDINE CORRECT.	DISTANTIAE PER REFRACTIONES CORRECTÆ.
5 ^h 2' 30"	Distantia Cometæ à cauda Cygni.....	40° 40' 0"	5 ^h 7' 0"	
	Distantia Cometæ à lucida Aquilæ..... circ.	3 45 0		
5 11 40	Altitudo caudæ Cygni.....	42 46 0	5 16 2	
5 12 30	Eadem altitudo.....	42 55 0	5 17 47	
5 14 0	Repetita.	43 4 0	5 18 12	
DIE MERCURII, 2 MARTII. COMETA OBSERVATUS.				
3 55 0	Altitudo caudæ Cygni.....	36 44 0	3 53 24	
	Distantia Cometæ ab extrema alæ A Cygni.....	35 21 0	3 52 0	
	Eadem distantia.....	35 21 0		
4 7 0	Cometa & cauda Cygni.....	42 55 15	4 3 0	
	Eadem distantia.....	42 55 15		
4 17 0	Altitudo caudæ Cygni.....	39 1 0	4 10 42	
	Distantia Cometæ ab Ancone alæ B Cygni.....	39 38 0		
	Eadem distantia.	39 38 0		
4 34 0	Altitudo caudæ Cygni.....	41 12 0	4 27 0	
	Altitudo Cometæ..... circ.	24 30 0		
4 34 0	Distantia Cometæ à lucida Lyra.....	34 41 5	4 27 0	
	Eadem distantia.....	34 41 5		
4 47 0	Distantia Cometæ à cauda Cygni..... dub.	42 58 20	4 41 0	
	Eadem distantia.....	42 55 45		
4 56 0	Distantia Cometæ ab extrem. alæ A Cygni... dub.	35 12 30	4 51 0	
	Eadem distantia.....	35 16 20		
5 3 0	Altitudo caudæ Cygni.....	45 32 0	4 58 22	
DIE JOVIS, 10 MARTII. COMETA OBSERVATUS.				
2 45 0	Altitudo caudæ Cygni.....	30 10 0	2 36 20	
2 55 0	Distantia Cometæ & in Ancone alæ B Cygni.....	40 34 20	2 52 0	40° 36' 35"
	Eadem distantia.....	40 34 20		
3 2 0	Distantia Cometæ à cauda Cygni..... A.....	44 19 0	3 1 0	44 20 4
	Eadem distantia.....	44 19 0		
3 3 0	Altitudo Cometæ..... circ.	22 20 0	3 6 0	
3 15 0	Distantia Cometæ ab extrema alæ A Cygni.....	37 22 40	3 17 0	37 22 38
	Eadem distantia.....	37 22 40		
3 29 0	Distantia Cometæ à lucida Lyra.....	34 47 0	3 30 0	
	Eadem distantia.....	34 47 0		
3 35 0	Distantia Cometæ à cauda Cygni.....	44 24 10	3 36 0	
3 40 0	Altitudo lucidæ Aquilæ.....	25 12 0	3 41 35	

DIE SOLIS, 28 MARTII, COMETA TUTO PRÆLONGO OBSERVATUS.

2 15 0

Huc usque à die 10 Martii, cælum continuò fuit adeò nubilum, ut nihil penitus de Cometa animadverti potuit: inter diem verò 27 & 28 Martii, clarissima nox afflavit, ut plurimæ fixæ cum Planetis, congruis organis, tum etiam ipse Cometa, sed tubo tantum optico, haud vulgari tamen observatus sit, & quidem præfente ac teste eximio & celeb. viro D. Ignace Bullialdo, Astron. summo, quem tum in adib. meis longè exoptatissim., de quo mihi valdè gratulor, habebam hospitum. Cometa quidem valdè pallidus ac tenuis erat, quoad diamet. tamen satis conspicuus; exhibebat propè stellulam hæcenus incognit. & quidem paulò sup. eam sinistr. versùs, in rect. circit. lin. inter brach. dext. Antinoi & ultim. caud. Serp.; item int. lucid. Aquil. & penult. caud. Serp. Hæc sunt, quæ hîc Gedani observari de Cometa 1661 potuerunt.

Réduction & examen des ascensions droites & déclinaisons moyennes des étoiles au temps des observations de la Comète de 1661, en Février & Mars.

α du Cygne, 3 Février 1661. Cauda Cygni.

Ascension droite.	Déclinaison.	
307° 25' 42."3	44° 6' 6."9	Par le Catalogue Britannique.
307 28 20. 8	44 5 48. 3	Selon la Table Astron. naut. de M. le Monnier.
307 28 12. 1	44 5 41. 3	Selon le Catalogue de M. Bradley.
307 28 0. 4	44 5 44. 6	Id. Catalogue de M. Mayer.
307 28 8. 8	44 5 44. 3	Tab. de M. Maskeline, fin des Obs. de Greenwich.
307 28 3. 1	44 5 41. 6	Selon le Catalogue de M. de la Caille.
307 28 9. 1	44 5 44.	Position moyenne le 3 Fév. 1661, par un milieu entre 5.

α du Serpenteire, 3 Février 1661. Caput Serpentarii.

Ascension droite.	Déclinaison.	
259° 47' 41."2	12° 50' 26."	Catalogue Britannique.
259 48 24. 6	12 50 42. 5	Catalogue de M. Bradley.
259 48 34. 0	12 50 46. 3	Catalogue de M. Mayer.
259 48 23. 1	12 50 42. 2	M. Maskeline.
259 48 20. 3	12 50 49. 2	Catalogue de M. de la Caille.
259 48 25. 5	12 50 45. 0	Par un milieu entre 4. On a négligé le mouv. propre en ascens. dr. donné par M. Mayer, parce qu'il n'est que de — 9" en 44 ans, quantité trop petite pour être bien constatée.

η à la queue du Serpent, 3 Fév. 1661. Penultima caud. Serpentis.

Ascension droite.	Déclinaison.	
270° 56' 56."6	2° 56' 51."6	Catalogue Britannique.
270 55 54. 8	2 57 15. 8	Catalogue de M. de la Caille; donc Flamsteed donne 62" de plus en ascens. dr. & 24" de moins en déclinaison : on a adopté le dernier résultat.

Arcturus du 3 au 4 Février 1661.

Ascension droite.	Déclinaison.	
210° 3' 55."3	20° 58' 9."7	Selon M. le Monnier. On s'en est tenu à ce seul résultat, par les raisons rapportées au sujet des observations de 1532.

α de la Lyre, 7 Février 1661. Lucida Lyræ.

Ascension droite.	Déclinaison.	
276° 21' 24."9	38° 30' 29."7	Catalogue Britannique.
276 22 13. 6	38 30 55. 6	M. le Monnier.
276 22 15. 9	38 30 30. 1	M. Bradley.
276 22 3. 8	38 30 32. 5	M. Mayer.
276 22 18. 9	38 30 33. 1	M. Maskeline.
276 22 12. 9	38 30 32. 3	M. de la Caille.
276 22 14. 9	38 30 36. 9	Par un milieu entre 5.

SUR LES COMETES DE 1532 ET DE 1661. 357

ζ du Cygne, 7 Février 1661. *Extrem. alæ Cygni.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
314° 37' 18."7	28° 51' 52."1	Catalogue Britannique.
314 37 40. 8	28 51 51. 8	Catal. de M. de la Caille. On s'est tenu à ce dernier.

ν à la main dr. du Serpent. 10 Fév. 1661. *Inf. in dext. man. Serp.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
265° 5' 24."8	9° 41' 12."7	Catalogue Britannique.

η au genou droit de Pégase, 7 Février 1661. *Dext. genu Pegasi.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
336° 46' 50."1	28° 27' 52."1	Catalogue Britannique.
336 47 28. 4	28 27 54. 4	Catal. de M. de la Caille. On a adopté ce dernier.

ε du Cygne, 13 Février 1661. *In Ancone inf. alæ Cygni.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
308° 6' 40."4	32° 44' 11."7	Catalogue Britannique.
308 8 19. 0	32 44 17. 0	M. Bradley.
308 8 1. 0	32 44 11. 0	M. de la Caille.

M. Mayer donne le mouvement propre de cette étoile de + 18" en ascension droite en 44 ans, & de + 30" en déclinaison, en comparant les Observations de M. de la Caille à celles de Römer; il paroît cependant moindre en ascension droite, selon M. de la Caille, & plus grand, selon M. Bradley. En prenant un milieu entre ces deux Catalogues, & ayant égard au mouvement propre par un milieu aussi, on aura la position moyenne corrigée pour le 13 Février 1661.

Ascension droite.	Déclinaison.	
308° 7' 27"	32° 43' 15"	Ce qui se rapproche de Flamsteed en ascens. dr.; mais on s'éloigne en déclinaison : ce mouvement ne paroît pas trop connu.

δ du Cygne, 13 Février 1661. *In Ancone sup. alæ Cygni.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
293° 34' 26."1	44° 20' 22."5	Catalogue Britannique.
293 35 43. 3	44 19 56. 1	M. Bradley.
293 35 42. 4	44 19 59. 2	M. de la Caille.
293 35 42. 8	44 19 57. 6	Par un milieu entre 2.

α de l'Aigle, 20 Février 1661. *Lucida Aquilæ.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
293° 32' 46."0	8° 1' 12."4	Catalogue Britannique.
293 33 23. 1	8 1 44. 3	M. le Monnier.
293 33 18. 8	8 1 34. 3	M. Bradley.
293 33 25. 6	8 1 38. 9	M. Mayer.
293 33 21. 1	8 1 37. 9	M. Maskeline.
293 33 24. 6	8 1 38. 8	M. de la Caille.
293 33 22. 6	8 1 38. 8	Par un milieu entre 5.

On a eu égard au mouvement propre de cette étoile, en prenant un milieu entre le

mouvement donné par M. Mayer de $64''$ en 100 ans, & celui donné par M. Maskeline de $57''$ en 100 ans M. de Cassini (*Mém. Acad.* 1738) avoit déjà déterminé ce mouvement, en comparant ses Observations à celles de Flamsteed, & même à celles de Tycho. On a rapproché par ce moyen le résultat du Catalogue Britannique, qui s'éloignoit encore plus des autres sans cette considération.

Ces ascensions droites & déclinaisons réduites, en ayant égard à toutes les corrections nécessaires entre les époques des Catalogues & celles de 1661, ainsi qu'à l'aberration & à la nutation, ont servi à calculer les temps vrais des observations de chaque jour par les hauteurs des étoiles observées par Hévélus, les hauteurs des étoiles dont il a mesuré les distances à la Comète, les longitudes & latitudes de ces étoiles; enfin, à trouver tous les élémens nécessaires pour corriger de la réfraction & de la parallaxe les distances de la Comète aux étoiles: on a calculé les hauteurs de la Comète d'après les élémens de M. Halley. On sent dans quelle longue suite de calculs cela a dû entraîner; mais afin d'abréger, on ne donnera dans la Table suivante que les résultats les plus essentiels: le titre de chaque colonne indique ce qu'elle renferme.

Hévélus avoit pris les positions des étoiles dans le Catalogue de Tycho-Brahé; il se servoit de tables du Soleil, qui donnoient le lieu de cet astre de plusieurs minutes trop avancé; il employoit une mauvaise réfraction; il la négligeoit même quand les étoiles étoient élevées de plus de 20 degrés; il supposoit à la Comète une parallaxe quatre fois trop grande, & les hauteurs observées de la Comète n'étoient pas exactes: ce sont les principales raisons pour lesquelles les temps vrais qu'il a rapportés, & ses distances vraies de la Comète aux étoiles, diffèrent assez des nôtres. Cependant on a suivi les temps vrais d'Hévélus pour les observations du 10 Mars, quoiqu'on ait de fortes raisons pour croire qu'il faudroit y ajouter une heure environ, à partir de $2^h 55'$; ce qui est sur-tout indiqué par la hauteur de l'Aigle. On n'a pas osé faire cette correction; on se borne à l'indiquer, en faisant remarquer qu'il n'en pourroit résulter qu'une légère différence sur le lieu de la Comète, parce que son mouvement étoit alors très-lent.

Distances apparentes de la Comète aux étoiles, & distances corrigées de la réfraction & de la parallaxe.

3 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCE APPARENTE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.	HAUTEUR DES ÉTOILES, & RÉFRACTION.	HAUTEUR VRAIE DE LA COMÈTE, RÉFRACTION ET PARALLAXE.	DISTANCE VRAIE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.
5 ^h 41' 45"	Dist. à α du Cygne. 45° 30' 0"	37° 13' 0" réfr. 1 15	6° 24' 0" réfr. 7 49 paral. 14	40° 35' 16"
5 52 38	Dist. à α d'Ophiucus. 47 12 40	40 34 0 1 7	8 0 0 6 25 14	47 17 49
5 58 51	Dist. à η du Serpent. 36 15 30	22 13 0 2 19	8 55 0 5 48 14	36 17 17
6 20 7	Dist. à α du Cygne. 40 31 25	42 23 0 1 3	11 59 0 4 20 14	40 34 4 ¹ / ₂

La distance à η du Serpent se trouve de 36° 35' 30" dans les Observations d'Hévélius ; mais c'est une faute d'impression, il faut 36° 15' 30", comme il l'employe lui-même dans ses calculs.

5 FÉVRIER AU MATIN.

5 ^h 2' 26"	Dist. à α d'Ophiucus. 44° 12' 25"	35° 44' 0" 1 19	4° 32' 0" 10 24 14	44° 19' 16"
5 15 5	Dist. à α du Cygne. 39 34 10	34 50 0 1 22	6 23 0 7 50 14	39 39 8
5 27 28	Dist. à ζ du Cygne. 26 16 45	21 16 0 2 25	8 11 0 6 17 13	26 18 56
5 37 23	Dist. à η du Serpent. 33 40 15	20 41 0 2 30	9 39 0 5 23 13	33 41 40
5 46 42	Dist. à α d'Ophiucus. 44 13 0	40 48 0 1 6	11 11 0 4 40 13	44 15 47
5 58 20	Dist. à α du Cygne. 39 40 35	40 31 0 1 7	12 40 0 4 7 13	39 43 6 ¹ / ₂

6 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCE APPARENTE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.	HAUTEUR DES ÉTOILES, & RÉFRACTION.	HAUTEUR VRAIE DE LA COMÈTE, RÉFRACTION ET PARALLAXE.	DISTANCE VRAIE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.
5 ^h 6' 33"	Dist. à η du Serpent. 32° 19' 55"	17° 31' 0" réf. 2 59	6° 57' 0" réf. 7 17 par. 13	32° 21' 48"
5 19 25	Dist. à α d'Ophiucus. 42 37 45	38 14 0 1 12	8 46 0 5 54 13	42 41 22
5 31 56	Dist. à α du Cygne. 39 22 30	37 31 0 1 14	10 35 0 4 53 13	39 25 16
5 57 28	Dist. à ζ du Cygne. 26 38 15	26 1 0 1 56	14 17 0 3 40 13	26 39 16
6 6 8	Dist. à α d'Ophiucus. 42 38 50	43 5 0 1 1	15 31 0 3 21 13	42 40 41 $\frac{1}{2}$
6 15 9	Dist. à α du Cygne. 39 27 15	43 21 0 1 0	16 48 0 3 5 13	39 28 50 $\frac{1}{2}$

7 FÉVRIER AU MATIN.

4 ^h 47' 8"	Dist. à α d'Ophiucus. 41° 15' 15"	34° 48' 0" réf. 1 22	5° 42' 0" réf. 8 40 par. 13	41° 20' 47"
4 54 6	Dist. à α du Cygne. 39 8 55	33 10 0 1 27	6 43 0 7 30 13	39 13 10
5 20 13	Dist. à ζ du Cygne. 26 50 20	21 22 0 2 24	10 32 0 4 57 13	26 51 2 $\frac{1}{2}$
5 28 16	Dist. à η de Pégase. 41 4 30	10 41 0 4 53	11 43 0 4 28 13	41 5 10
5 45 48	Dist. à la Lyre. 39 57 50	53 56 0 41	14 14 0 3 41 13	40 0 36
6 4 7	Dist. à α du Cygne. 39 11 0	42 23 0 1 2	16 51 0 3 5 13	39 12 37 $\frac{1}{2}$

10 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCE APPARENTE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.	HAUTEUR DES ÉTOILES, & RÉFRACTION.	HAUTEUR VRAIE DE LA COMÈTE, RÉFRACTION ET PARALLAXE.	DISTANCE VRAIE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.
4 ^h 39' 38"	Dist. à α d'Ophiucus. 37° 23' 45"	35° 21' 0" réf. 1 20	8° 56' 0" réf. 5 48 par. 12	37° 27' 17"
4 48. 43	Dist. à ε du Cygne. 39 5 30	33 59 0 1 25	10 14 0 5 5 12	39 8 11
4 56 0	Dist. à ζ du Cygne. 28 7 15	19 42 0 2 37	11 19 0 4 37 12	28 8 13
5 2 27	Dist. à η de Pégaſe. 43 33 30	9 1 0 5 45	12 15 0 4 17 12	43 34 21
5 14 51	Dist. à la Lyre. 37 40 20	51 10 0 46	14 2 0 3 44 12	37 43 5 1/2
5 28 15	Dist. à δ du Cygne. 39 7 45	39 8 0 1 10	15 57 0 3 17 12	39 9 21 1/2

13 FÉVRIER AU MATIN.

4 ^h 33' 13"	Dist. à ε du Cygne. 39° 38' 45"	33° 31' 0" réf. 1 26	11° 32' 0" réf. 4 32 par. 12	39° 30' 55"
4 50 42	Dist. à ε du Cygne. 29 17 0	27 5 0 2 1	14 4 0 3 41 12	29 17 53 1/2
5 8 21	Dist. à δ du Cygne. 38 5 30	45 45 0 55	16 36 0 3 8 1/2 11 1/2	38 7 22
5 34 22	Dist. à ε du Cygne. 29 17 45	33 15 0 1 27	20 16 0 2 33 11	29 18 35
5 49 38	Dist. à δ du Cygne. 38 6 30	51 36 0 45	22 20 0 2 18 11	38 7 49

Hévélius avertit que le 10 Février les observations ſont un peu douteuſes, parce que ſon Aide qui avoit la vue courte, ne diſtinguoit pas trop bien la Comète, à cauſe du clair de Lune; cependant on voit que ces diſtances ſ'accordent aſſez bien, lorsqu'elles ſont dégagées de la réfraction & de la parallaxe.

20 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCE APPARENTE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.	HAUTEUR DES ÉTOILES, & RÉFRACTION.	HAUTEUR VRAIE DE LA COMÈTE, RÉFRACTION ET PARALLAXE.	DISTANCE VRAIE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.
4 ^h 49 45''	Dist. à ϵ du Cygne. 31° 8' 30"	30° 43' 0'' réfr. 1 36	20° 2' 0'' réfr. 2 34, paral. 10, 4	31° 8' 44''
4 53 40	Dist. à ϵ du Cygne. 31 2 0	31 2 43
5 0 40	Dist. à δ du Cygne. 38 10 30	48 35 0 50	21 40 0 2 22 10	38 11 51 ¹ / ₂
5 2 40	Dist. à δ du Cygne. 38 11 25	38 12 46
5 7 10	Dist. à α du Cygne. 40 40 0	41 31 0 1 4	22 25 0 2 17 10	40 41 2 ¹ / ₂

2 MARS AU MATIN.

3 ^h 53' 40''	Dist. à ζ du Cygne. 35° 21' 0"	21° 36' 0'' 2 23	18° 45' 0'' 2 46 9	35° 21' 36''
4 4 0	Dist. à α du Cygne. 42 55 15	38 4 0 1 13	20 10 0 2 33 9	42 56 22 ¹ / ₂
4 12 36	Dist. à δ du Cygne. 39 38 0	46 58 0 53	21 21 0 2 24 9	39 38 45
4 27 14	Distance à la Lyre. 34 41 5	55 17 0 39	23 17 0 2 12 9	34 42 28 ¹ / ₂

10 MARS AU MATIN.

2 ^h 52' 0''	Dist. à δ du Cygne. 40° 34' 20''	39° 56' 0'' 1 8	14° 46' 0'' 3 32 9	40° 36' 14''
3 1 0	Dist. à α du Cygne. 44 19 0	33 44 0 1 25	16 3 0 3 15 2	44 20 22

10 MARS AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCE APPARENTE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.	HAUTEUR DES ÉTOILES, & RÉFRACTION.	HAUTEUR VRAIE DE LA COMÈTE, RÉFRACTION ET PARALLAXE.	DISTANCE VRAIE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.
3 ^h 17' 0''	Dist. à ζ du Cygne. 37 ^h 22' 40''	20° 36' 0'' 2 30	18° 17' 0'' 2 51 9	37° 23' 16'
3 30 0	Distance à la Lyre. 34 47 0	51 17 0 45	20 4 0 2 34 9	34 48 37 ¹ / ₂

Si l'on ajoutoit une heure aux temps de l'horloge (comme je soupçonne qu'il faudroit le faire), cette dernière distance vraie seroit diminuée d'environ 38 à 40''. Il n'y a aucune des quatre dernières distances qui puisse être affectée d'une minute d'erreur par cette correction d'une heure, soit qu'on l'adopte ou qu'on la rejette; les observations d'Hévélius, faites avec de simples pinules, ont-elles ce degré de précision à l'égard d'une Comète dont le centre est toujours difficile à distinguer, & qu'on a bien de la peine à estimer, même avec des instrumens à lunettes?



*Longitudes & latitudes des étoiles affectées de l'aberration
seulement, telles qu'on les a employées pour calculer les
positions de la Comète de 1661, d'après les distances
corrigées qu'on vient de rapporter.*

3 FÉVRIER.			
η DU SERPENT.		α DU SERPENTAIRE.	
Longitude.	Latitude.	Longitude.	Latitude.
27° 59' 21",9	20° 31' 26",2	257° 42' 22",6	35° 53' 24",1
α DU CYGNE.			
330 39 7,0	59 55 27,71		

7 FÉVRIER.			
η DU SERPENT.		α D'OPHIUCUS.	
270 59 23,7	20 31 25,8	257 42 24,6	35 53 23,7
α DU CYGNE.		LA LYRE.	
330 39 7,1	59 55 26,5	280 33 50,8	61 45 19
ζ DU CYGNE.		ν DE PEGASE.	
328 20 15,6	43 43 7,4	250 59 50,2	35 6 51,1

10 FÉVRIER.			
α D'OPHIUCUS.		α DU CYGNE.	
257 42 26,3	35 53 23,4	330 39 7,1	59 55 25,6
LA LYRE.		ζ DU CYGNE.	
280 33 52,7	61 45 18,4	328 20 16,1	43 43 6,6
ν DE PEGASE.		ν DU SERPENTAIRE.	
350 59 56,0	35 6 50,6	265 0 54,3	13 42 33,0

13 F É V R I E R.

ε DU CYGNE.		δ DU CYGNE.	
Longitude.	Latitude.	Longitude.	Latitude.
322° 53' 32'',8	49° 25' 3'',5	311° 33' 48'',8	64° 26' 1'',9

20 F É V R I E R.

α DE L'AIGLE.		α DU CYGNE.	
296 59 19,4	29 19 23,4	330 39 8,0	59 55 22,6
ε DU CYGNE.		δ DU CYGNE.	
322 58 34,1	49 25 6,7	311 33 51,4	64 25 59,7

2 M A R S.

LA LYRE.		α DU CYGNE.	
280 34 06,9	61 45 14,5	330 39 10,1	59 55 19,6
ζ DU CYGNE.		δ DU CYGNE.	
328 20 19,4	43 43 1,8	311 33 56,4	64 25 56,9

10 M A R S.

LA LYRE.		α DU CYGNE.	
280 34 13,3	61 45 13,4	330 39 12,6	59 55 17,3
ζ DU CYGNE.		δ DU CYGNE.	
328 20 21,7	43 43 0	311 34 1,0	64 25 54,8

On a calculé les distances des étoiles entre elles, au moyen de leurs longitudes & latitudes; ensuite on a combiné, pour chaque jour & de plusieurs manières, deux distances de la Comète avec la distance des étoiles correspondantes pour déterminer la longitude & la latitude de la Comète, comme on va le voir dans la Table qui suit.

Longitudes & latitudes géocentriques de la Comète, conclues des distances vraies aux étoiles (a).

3 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCES DES ÉTOILES, ET DISTANCES VRAIES DE LA COMÈTE aux mêmes étoiles.	LONGITUDE de la COMÈTE.	LATITUDE BORÉALE DE LA COMÈTE.
5 ^h 52' 38"	α du Cyg. & α d'Ophiuc. 51° 12' 56" Comète & α du Cygne. 40 34 55 Comète & α d'Ophiuc. 47 17 49	310° 5' 36"	22° 1' 19"
5 58 51	α du Cyg. & η du Serp. 57 17 8 Comète & η du Serp. 36 17 17 Comète & α du Cygne. 40 34 43	310 0 12	22 2 54
5 52 38	α d'Ophiuc. & η du Serp. 19 16 24 Comète & η du Serpent. 36 17 37 Comète & α d'Ophiucus. 19 16 24	309 59 19	21 50 41

Le premier triangle doit bien donner la longitude & sur-tout la latitude, sauf l'erreur de l'observation; il en est de même du second. Mais le troisième n'est pas propre à donner la latitude; la plus légère erreur, dans les distances de la Comète, y influe considérablement; il doit au contraire très-bien donner la longitude, sauf l'erreur de la distance de la Comète. Je crois cette distance à η du Serpent un peu trop petite; si elle étoit plus grande, la latitude se rapprocheroit très-rapidement des deux autres, & la longitude aussi.

5 FÉVRIER AU MATIN.

5 ^h 15' 5"	Comète & α du Cygne. 39 39 8 Comète & α d'Ophiucus. 44 18 30	307° 24' 51"	23° 44' 28"
5 27 28	ζ du Cygne & η du Serp. 52 35 28 Comète & ζ du Cygne. 26 18 56 Comète & η du Serpent. 33 42 12	307 18 28	23 50 17
5 46 42	Comète & α du Cygne. 39 43 16 Comète & α d'Ophiucus. 44 15 47	307 20 23	23 42 32
5 58 20	Comète & α du Cygne. 39 43 6 Comète & η du Serpent. 33 40 30	307 16 19	23 41 10

Hévélius donne pour douteuse la distance à ζ du Cygne; d'ailleurs le triangle est très-aigu à η du Serpent, donc la latitude qui en résulte doit être rejetée. Les trois autres résultats devoient être plus cohérens, parce que les triangles sont mieux disposés; mais les premières & les dernières distances à α du Cygne ne s'accordent pas avec le temps écoulé; en réduisant la première & la deuxième au même instant, il y a 5' de différence; cela produit une erreur en plus sur la première longitude de 2' 30", & une de 2' 54" en plus aussi sur la première latitude.

(a) Les distances vraies de la Comète aux étoiles ont été réduites deux à deux à la même heure.

6 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCES DES ÉTOILES, ET DISTANCES VRAIES DE LA COMÈTE aux mêmes étoiles.	LONGITUDE de la COMÈTE.	LATITUDE BORÉALE DE LA COMÈTE.
5 ^h 31' 56"	Comète & α du Cygne. 39° 25' 16" Comète & α d'Ophiuc. 42 40 36	305° 49 12"	24° 28' 43"
5 57' 28	α d'Oph. & ζ du Cyg. 53 10 37 Comète & ζ du Cyg. 26 39 16 Comète & α d'Ophiuc. 42 41 14	305 48 45	24 26 31
6 6 8	Comète & α du Cygne. 39 28 56 Comète & α d'Ophiuc. 42 40 41	305 47 49	24 26 5

La distance à η du Serpent est indiquée douteuse, ainsi on ne la combinera point avec les autres. Il semble que la première distance à α d'Ophiucus a été observée trop petite, puisque la dernière qui est environ 3' plus grande, à proportion du temps écoulé, donne la latitude à peu près comme les distances à ζ du Cygne & à α d'Ophiucus, qui sont très-propres à cet objet; on pourroit donc, sans erreur sensible, prendre un milieu entre les deux derniers résultats.

7 FÉVRIER AU MATIN.

4 ^h 47' 48"	Comète à α du Cygne. 39° 13' 10" Comète à α d'Ophiuc. 41 20 47	304° 31' 57"	25° 6' 55"
5 45' 48	La Lyre & α du Cygne. 23 51 58 Comète & α du Cygne. 39 12 40 Comète & la Lyre... 40 0 36	304 26 53	25 9 14
5 45' 48	La Lyre & η de Pegase. 50 28 45 Comète & la Lyre..... 40 0 36 Comète & η..... 41 5 40	304. 26 58	25 8 21
5° 45' 48"	Les premières réduites à la même heure.....	304° 28' 35"	25 8 42

La distance de la Comète à ζ du Cygne est certainement trop petite de 8' à 9' aujourd'hui, ainsi on ne l'emploiera point.

10 FÉVRIER AU MATIN.

4 ^h 48' 43"	Comète & α du Cygne. 39° 8' 11" Comète & α d'Ophiuc. 37 26 41	300° 33' 12"	26° 37' 7"
5 14 51	Comète & la Lyre... 37 43 5 Comète & η de Pegase. 43 34 45	300 41 55	26 31 52
5 14 51	Comète & la Lyre... 37 43 5 Comète & α du Cygne. 39 9 17	300 44 8	26 33 22

10 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCES DES ÉTOILES, ET DISTANCES VRAIES DE LA COMÈTE aux mêmes étoiles.	LONGITUDE de la COMÈTE.	LATITUDE BORÉALE DE LA COMÈTE.
5 ^h 14' 51"	La Lyre & ζ du Cygne. 32° 59' 50" Comète & la Lyre... 37 43 5 Comète & ζ..... 28 3 30	300° 44' 0"	26° 32' 23"

La première distance à α d'Ophiucus paroît trop courte de 6 à 7'. Hévélius la rapporte ensuite de 8' plus forte comme douteuse; mais elle étoit certainement meilleure que la première. Je crois que le parti le plus sûr seroit celui de prendre le milieu entre les deux derniers résultats, parce que γ de Pegase n'étoit élevé sur l'horizon que de 9°.

13 FÉVRIER AU MATIN.

5 ^h 29' 0"	ε & δ du Cygne..... 16° 11' 48" Comète & ε..... 29 18 30 Comète & δ..... 38 7 35	297° 52' 4"	27° 19' 50"
4 33 13	α & δ du Cygne..... 9 55 56 Comète & α du Cygne. 39 29 10 Comète & δ..... 38 7 0	297 53 50	27 20 9
4 33 13	Comète & α du Cygne. 39 30 55 Comète & δ..... 38 7 0	297 46 35	27 21 16

On voit donc qu'une variation de 1' 45" dans la distance à α du Cygne a produit 7' 15" de différence dans la longitude; ce triangle est très-peu propre à donner la longitude, la plus légère erreur y influe beaucoup; il n'en est pas de même de la latitude. Je crois cependant que les deux premiers résultats sont préférables, parce que le second confirme le premier, où le triangle est bien moins aigu à la Comète, & que Hévélius donne tout d'abord la distance à α du Cygne de 1' 45" plus courte que celle qui suit, sans la marquer douteuse; donc on pouvoit l'employer de même.

Hévélius dit à la fin des Observations de ce jour, que la Comète étoit en ligne droite avec α & γ de l'Aigle, & aussi distante d'α que cette étoile paroît être de γ. Quoique cette estime soit grossière, en voici le résultat en longitude & en latitude:

Longitude.	Latitude.
297° 45' 44"	27° 22' 19"

Cela n'est pas favorable au parti que j'ai pris; mais on fera attention que ce n'est qu'une estime. Il résulte de tout ceci que la longitude de la Comète est incertaine le 13 Février.

20 FÉVRIER AU MATIN.

3 ^h 25' 0"	Par les distances estimées à μ & à σ de l'Aigle. Voyez les Observations.	292° 51' 14"	27° 59' 59"
-----------------------	---	--------------	-------------

20 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCES DES ÉTOILES, ET DISTANCES VRAIES DE LA COMÈTE aux mêmes étoiles.	LONGITUDE de la COMÈTE.	LATITUDE BORÉALE DE LA COMÈTE.
4 ^h 55' 42"	Comète & α du Cygne. 31° 8' 44" Comète & δ du Cygne. 38 12 19	293° 17' 15"	28° 2' 43"
4 55 42	Comète & α du Cyg. 31 2 43 Comète & δ du Cyg. 38 12 19 Il paroît que la distance à α étoit trop courte, & cela influe beaucoup sur la longitude, mais bien moins sur la latitude.	293 32 50	27 59 43
5 ^h 4' 0"	Comète & α du Cygne. 40° 41' 2" Comète & δ du Cygne. 38 19 19	293° 15' 41"	28° 3' 5"
5 7 0	Par la dist. estimée à α de l'Aigle & la latit. conclue de la 2 ^e & 4 ^e Observat.	292 58 11	28 2 54

Il y a beaucoup de différence dans les résultats ci-dessus; Hévélius dit que les observations furent douteuses, à cause de la clarté & de la proximité de la Lune (*Cométog. pag. 723.*); j'adopterois volontiers le deuxième & le quatrième résultat.

2 MARS AU MATIN.

4 ^h 3' 8"	δ & ζ du Cygne. 22° 46' 4" Comète & ζ du Cygne. 35 21 36 Comète & δ. 39 38 45	289° 6' 30"	27° 28' 16"
4 10 27	Comète & la Lyre. . . . 34 42 28 Comète & ζ du Cygne. 35 21 36	289 4 16	27 31 12
4 15 37	Comète & la Lyre. . . . 34 42 28 Comète & α du Cygne. 42 56 22	289 0 45	27 31 36

Ces combinaisons sont les plus favorables par les dispositions des triangles; on n'en fera point d'autres. Il paroît que la distance à δ du Cygne étoit un peu trop grande: la seconde observation me paroît préférable aux deux autres; Hévélius dit que la Comète étoit assez obscure le 2 Mars.

10 MARS AU MATIN.

3 ^h 4' 30"	Comète & δ du Cygne. 40° 36' 14" Comète & ζ du Cygne. 37 23 16	286° 32' 19"	27° 6' 31"
-----------------------	---	--------------	------------

10 MARS AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCES DES ÉTOILES, ET DISTANCES VRAIES DE LA COMÈTE aux mêmes étoiles.	LONGITUDE de la COMÈTE.	LATITUDE BORÉALE DE LA COMÈTE.
3 ^h 15' 30"	Comète & α du Cygne. 44° 20' 22"	286° 29' 48"	27° 11' 12"
	Comète & la Lyre..... 34 48 37		
1 23 30	Comète & la Lyre..... 34 48 37	286 29 20	27 10 10
	Comète & ζ du Cygne. 37 23 16		

Il paroît que la distance à δ du Cygne étoit un peu trop grande; les deux dernières distances à la Lyre & à ζ sont les plus propres pour donner la longitude & la latitude par la disposition du triangle; il semble qu'on doit en préférer le résultat, sur-tout par l'accord avec le second; d'ailleurs la Comète devoit être difficile à observer à la vue simple. Je vais joindre ici les résultats d'Hévélius pour les 14 & 17 Février, & pour le 28 Mars, faits d'après son estime: il les donne pour douteux; il eût été inutile de les calculer. Il étoit plus en état que personne d'apprécier ce qui devoit résulter de son estime; j'ajouterai qu'on doit avoir peu de confiance aux résultats du 28 Mars, puisqu'Hévélius ne voyoit plus la Comète à la vue simple, & qu'il l'a rapportée par des alignemens à des étoiles qui n'étoient pas dans le champ de sa lunette, & qui étoient assez éloignées entre elles & de la Comète.

	Longitude.	Latitude.
14 Février, vers 5 ^h $\frac{1}{2}$ du matin.....	297° 5' 43"	27° 40' 24"
17 Février..... 5 ^h $\frac{1}{2}$ du matin.....	296 6 22	28 54 50
28 Mars..... 2 ^h $\frac{1}{4}$ du matin.....	283 0 0	26 10 0 B



Longitudes du Soleil; mouvement horaire; logarithme de sa distance avec l'équation du temps pour chaque jour, vers le temps des observations de la Comète de 1661.

Il faut ôter 6" des lieux du Soleil jusqu'au 20 Février, & 3" jusqu'au 28 Mars, pour les dégager de la nutation.

ANNÉE	TEMPS MOYEN à		LONGITUDE		MOUVEMENT	LOGARITHME	EQUATION
1661.	DANTZICK		DU SOLEIL.		HORAIRE.	de la	soustractive
	au matin.					DISTANCE.	du
							TEMPS MOYEN.
Février	3	5 ^o 30' 0"	10 ^s 14 ^o 56 26,4	2' 31,9	4,994157	14' 34,2	
	5	5 30 0	10 16 57 55,3	2 31,8	4,994313	14 43,6	
	6	5 30 0	10 17 58 37,1	2 31,7	4,994391	14 47,0	
	7	5 30 0	10 18 59 17,9	2 31,7	4,994471	14 49,8	
	10	5 30 0	10 22 1 8,5	2 31,5	4,994725	14 53,0	
	13	5 30 0	10 25 2 42,5	2 31,3	4,994994	14 49,6	
	14	5 30 0	10 26 3 10,2	2 31,2	4,995088	14 46,8	
	17	5 0 0	10 29 3 8,2	2 31,0	4,995180	14 34,2	
	20	5 0 0	11 2 4 7,5	2 30,7	4,995693	14 15,2	
Mars	2	4 0 0	11 12 3 18,8	2 30,0	4,996810	12 32,8	
	10	3 00 0	11 20 0 0,1	2 29,3	4,997731	10 35,2	
	28	2 0 0	0 7 47 16,8	2 27,9	4,999972	5 9,2	

J'ai cru cette Table utile pour compléter tous les élémens des calculs, & pour faciliter l'usage qu'on voudra faire des longitudes & latitudes de la Comète. Je vais maintenant rapporter les longitudes & latitudes que j'ai jugées les plus exactes, & que j'ai comparées aux élémens de M. Halley.



*Comparaison des lieux observés de la Comète avec les élémens
de M. Halley.*

ANNÉE 1661.	TEMPS VRAI.	LONGITUDE DE LA COMÈTE OBSERVÉE.	LATITUDE OBSERVÉE.	DIFFÉRENCE CALCULÉE en LONGITUDE.	DIFFÉRENCE CALCULÉE en LATITUDE.	DISTANCE de la COMÈTE à la Terre.
Fév. 3	5 ^h 55' 24 ^o	310° 1' 46" aberrat. — 19	22° 02' 6" aberr. + 10	+ 3'	— 1'	0,616
5	5 36 54	307 20 1	23 42 20	— 13	+ 7	0,630
6	6 1 48	305 48 17	24 26 18	— 7	+ 8	0,639
7	5 45 48	304 27 29	25 8 46	— 6	+ 4	0,648
10	5 14 51	300 43 21	26 32 32	0	+ 5	0,679
13	5 29 0	297 52 4 aberrat. — 12	27 19 50 aberr. + 4	— 8	+ 6	0,712
20	4 59 51	293 16 28	28 2 54	— 25	— 2	0,786
Mars 2	4 10 27	289 4 16 aberrat. — 6	27 31 34	— 14	+ 8	0,872
10	3 19 30	286 29 34 aberrat. — 4	27 10 41	+ 4	+ 2	0,922
28	2 15 0	283 0 0	26 10 0	— 118	+ 9	0,986

Les signes + ou — indiquent la correction qu'il faudroit faire aux observations pour les accorder avec les élémens : celle du 20 Février peut aller depuis 0 jusqu'à 40 en long, & depuis 0 jusqu'à 2 $\frac{1}{2}$ en latitude : celle du 10 Mars peut être aussi 0, selon le choix que l'on fera. Je n'ai rapporté l'observation du 28 Mars, que pour faire juger de son inexactitude. Je remarquerai ici en passant, que la Comète de 1532 a été beaucoup plus grande & plus visible aux mêmes distances à la Terre, que celle de 1661, & bien au delà ; il est vrai qu'elle étoit alors moins éloignée du Soleil.

L'aberration doit s'appliquer aux longitudes & latitudes de la Comète, que l'on choisira à chaque jour d'observation, proportionnellement à celle que j'ai marquée ici au commencement, vers le milieu & à la fin de son apparition.

On n'a point entrepris de rédiger d'autres observations de la Comète de 1661, parce qu'on n'en connoît pas d'aussi exactes que celles d'Hévélius. Elle a été observée dans plusieurs endroits, sur-tout en Allemagne & en Suisse ; mais toutes ces observations m'ont paru très-grossièrement faites, & je me contenterai d'en indiquer quelques-unes.

La Comète a été observée à Basle, par P. Megerlin, Professeur de Philosophie & de Droit ; à Schaffouse, par Etienne Spleiss : ce qu'ils en ont vu est rapporté dans une brochure

intitulée : *Discursus de Cometa nuper viso, &c. Basileæ, apud J. Konig.* Gaspard Marchen, Professeur de Mathématiques & de Médecine à Rostock, en a publié quelques observations dans une brochure Allemande, imprimée à Rostock, chez Jean Wilden. M. Trew, Professeur à Altorf, en a donné aussi quelques observations dans une brochure Allemande, publiée à Nuremberg.

Ethard Weigelius, Professeur de Mathématiques à Jena ; observa la Comète plusieurs fois ; mais il n'y a qu'une seule de ses observations sur laquelle on pourroit compter à peu près. On peut consulter sa brochure : *Speculum Uranicum, &c. 1661.* Enfin, la Comète fut encore observée à Augsbourg & à Strasbourg ; il y en a une petite brochure imprimée en Allemand à Augsbourg, chez J. Schultes.



*EXAMEN des anciennes apparitions des Comètes
qu'on peut rapporter à celles de 1532 & de 1661.*

LORSQUE M. Halley publia, en 1705, l'Abrégé de sa Cométographie, & qu'il annonça ou plutôt qu'il proposa son opinion sur le retour de la Comète de 1682, qui lui paroissoit être la même que celles des années 1531, 1607, il ajouta qu'il étoit encore porté à croire que la Comète de 1532 étoit la même que celle observée par Hévélius en 1661; mais que les observations d'Apian étoient trop imparfaites, pour pouvoir décider quelque chose de bien certain sur une matière aussi délicate. Dans la nouvelle édition de cette Cométographie, qui fut faite en 1719, & qui ne parut qu'en 1749, M. Halley annonça, avec plus d'assurance, le retour de la Comète de 1682 pour 1758 ou 1759; mais il ne parla plus de l'identité des Comètes de 1532 & de 1661. Cependant, d'après la ressemblance des orbites de ces deux Comètes, selon la Table de M. Halley, les Astronomes ont toujours présumé que ce n'étoit qu'une même Comète, dont la période étoit de cent vingt-huit à cent vingt-neuf ans, & qu'elle reparoitroit vers 1789 ou 1790.

M. Struick a remarqué, dans son Introduction à la connoissance universelle des Comètes (pag. 11.), qu'en remontant aux Histoires les plus reculées, on trouve des preuves certaines que pendant plus de mille ans il a non seulement paru une Comète tous les cent vingt-neuf ans environ, mais qu'on découvre encore, dans ces apparitions, des singularités qui sont principalement propres à la Comète de 1661, & que de seize périodes, il croit qu'on en trouvera onze dans les Auteurs connus; mais qu'il deviendroit trop long s'il vouloit suivre les traces de chacune. M. Struick indique ensuite toutes ces apparitions, dans sa Description abrégée de toutes les Comètes, en commençant même par celle qui a paru l'an

525 avant J. C. Il cite les Auteurs qui ont fait mention de celles-là, ainsi que de toutes les autres.

M. Pingré a lu un Mémoire sur le même sujet, à la Séance publique de l'Académie en Novembre 1779. Il est à présumer que ce Mémoire fera partie de la Cométographie que ce célèbre Astronome doit publier incessamment. Mais en attendant, & pour tâcher de satisfaire aux demandes de l'Académie, je vais examiner les apparitions des Comètes qu'on peut rapporter à celles de 1532 & de 1661. Je rapporterai les principaux passages qu'on trouve dans les Historiens, afin qu'on soit plus à portée de reconnoître si les circonstances de ces apparitions peuvent se concilier avec l'orbite de la Comète de 1532, & sur-tout avec celle de 1661 qui est mieux déterminée. On trouvera à la fin de ce Mémoire la figure de l'orbite de la Comète de 1661; elle servira à vérifier les apparitions antérieures, en ayant égard seulement à la précession des équinoxes pour le lieu du périhélie & celui du nœud, car on ne peut rien statuer sur leur mouvement.

Les inégalités des périodes de la Comète qui a reparu en 1759, causées par les attractions de Saturne & de Jupiter, sont très-considérables, puisque la révolution de 1607 à 1682 a été d'environ un an & sept mois plus courte que celle de 1682 à 1759. Ainsi nous supposons que la période de cent vingt-huit ans trois mois, écoulée entre l'apparition de 1532 & celle de 1661, peut s'étendre depuis cent vingt-sept jusqu'à cent trente ans environ : ce seroit un travail immense que de calculer les inégalités de chaque période jusqu'en l'an 525 avant J. C.

La révolution supposée de cent vingt-neuf ans, à partir de 1532, remonte à 1403. Hévélius rapporte, d'après Eckstor-mius (Cométogr. pag. 834.), qu'il parut cette année une Comète entre l'orient & le nord; mais on n'en peut rien conclure, parce qu'il n'est pas dit dans quel temps de l'année. On trouve, dans le XVIII^e tome de Muratori, pag. 577, un

Comète de 1403.

passage d'un Ecrivain Italien qui se rapporte assez à la Comète de 1661 : *A di 10 Gennaio apparve una stella rilucente piu che la Luna , e duro fino à di 27 di Febbrajo*. La figure jointe à la fin de ce Mémoire , & l'exemple de celle de 1661 , prouvent que cette apparition , en 1403 , peut y convenir ; on auroit dû la voir plus long-temps. Voyez aussi dans Mizauld , pag. 277. Il est étonnant que d'autres Historiens n'en aient pas fait mention ; car , à cette époque , la Comète est très-visible & paroît long-temps. M. Struick , qui a fait des recherches très-étendues sur les anciennes apparitions des Comètes , ne parle point de celle de 1403.

En 1402 il parut deux Comètes ; la première , en Janvier , Février , Mars & Avril ; la seconde , en été & en automne. Les circonstances de l'apparition de la seconde Comète de 1402 ne conviennent pas à celle de 1661 ; voici ce que Mich. Ducas en rapporte , p. 34 de son Histoire Byzantine : *Dum sol Geminorum Dodecatemorion emetiebatur , in occidentali plaga signum in celo malorum nuncium apparuit. Cometes iserat lucidus & clarus , comam erectam explicans ignis flammantis specie ; supraque quatuor cubitos , non secus ac hastam ab occasu in ortum radios jaculabatur : & sole infra horizontem demerso , propriis radiis effusus , omnes orbis terræ terminos collustrabat , nec aliis stellis lumen exerere concedebat , aut aerem noctis umbrâ infuscari..... usque ad æquinoctium autumnale perduravit , cum sol Libræ signum permeare incepit*. On trouve encore ce qui suit dans une Chronique de Bologne , qui fait partie du XVIII.^e tome de Muratori (col. 576.) : *A die 4 di Settembre apparve la Cometa à ora di vesperc , e degradando l'ora appariva poi la mattina*. Il est aisé de se convaincre que ces circonstances ne peuvent convenir avec l'orbite de la Comète de 1661 ; car , à quelque époque que l'on suppose le passage au périhélie , elle ne peut être visible que très-peu de temps pendant l'été ; elle est alors presque toujours fort éloignée de la terre ; elle ne peut point par conséquent éteindre , par son éclat , la lumière des autres astres. Il est encore

Deuxième Co-
mète de 1402.

encore moins possible qu'au moins de Septembre elle paroisse le matin, après s'être montrée le soir.

On peut au contraire concilier, avec l'orbite de la Comète de 1661, une grande partie de ce que les Historiens ont dit de celle qui a paru au commencement de 1402 : nous allons d'abord rapporter ce qu'on trouve de plus essentiel & de plus détaillé dans plusieurs Auteurs.

Première Comète
de 1402.

On pourroit peut-être fixer le commencement de son apparition en Janvier ; car on trouve, dans l'extrait d'une Chronique Suisse, qui est au dépôt de la Marine, qu'en Janvier & en Octobre il parut une très-belle Comète qui avoit une queue comme celle d'un paon, & qu'on la voyoit même en plein jour ; mais l'Auteur confond ensemble les deux Comètes de cette année. On la vit tout au commencement de Février : *Visus est Cometa multis diebus ante carnis privium, qui fursum tendebat in modum lanceæ* (Histoire de Landgraviis Thuringiæ, pag. 952). Avant le milieu du mois elle étoit très-apparente ; on la voyoit tous les soirs entre le midi & l'occident ; sa queue devint d'une grandeur extraordinaire, on l'apercevoit en plein jour vers la fin de Mars : *Die 12 (Februarii), quæ fuit prima Dies Dominica quadragesimæ ; apparuit stella Comes, incipiens apparere singulo sero inter meridiem & occidentem, occasum suum finiens ad occidentem ; quæ apparuit continuè per totam quadragesimam, habens caudam seu potiùs comam à parte superiori ; augendo quotidie ejus comam aliquantulum, adeo ut quæ priùs visa fuerat in mensuram duorum brachiorum vel trium, postea paulatim creverit ad mensuram unius perticæ & ultrà. In Hebdomada autem Sancta, ejus coma mirabiliter crevit per tres dies in modum flammæ longissimæ, ita ut primâ die videretur esse longa brachiis 25 ; secundâ die, longitudinis brachiorum 50 ; tertiâ die, brach. 100 & multò plus. Ulteriùs non apparuit de nocte, sed dies per octo sequentes apparuit de die incipiendo die Mercurii sancto, apprensens juxta Solem longitudinis brachii unius cum dimidio, nec Solis lumine offuscabatur etiam in meridie, quæ admirationem*

& futurorum malorum timorem Gentibus intulit (Muratori, tome XVI, col. 837). On trouve ailleurs exactement le même récit. [Ricobaldi, *Compilatio chronologica in corpore Historico*; J. Ecardi, col. 1297]. (Dello Bernardino Corio *Milanense Historia*). [Historia di Bologna de R. P. Cherubino Ghirardacci, lib. XXVIII, pag. 528]. La Comète étoit dans le signe du Belier, vers la fin de Février : *Circa finem mensis Februarii, & per principium mensis Martis sequentis, Cometes satis magna apparuit in parte oriente, de sero in signo Arietis, & duravit per duas horas cum dimidia* (Annales Foroliv. Muratori, tom. XXII, col. 281). Elle ne se couchoit que vers la troisième, même la cinquième heure de la nuit : *Anno 1402, apparuit Cometa in occidente, in fine Februarii & principio Martis, cujus occasus erat circa tertiam horam noctis, dirigens caudam versus occidentem, sed basin versus orientem, colore nigredini attingens* (Chronica Sifgilin. Rozitii, in *Script. rerum Silesiac.* tom. I, pag. 72). Qui ingens ac fulgidus mense Martio antè apparuerat ac quinque horis, post Solis occasum, palàm conspiciebatur (Muratori, tom. XX, col. 290). [Poggii, *Historia Florentina* à J. B. Recanato, lib. IV]. Elle se porta de plus en plus vers le nord : *Cometa apparuit mense Martio, primò inter Corum & Septentrionem viz. in circo flammæ emittens, postremò comas in boream transferebat* (Anglica Norman. à Veteribus scripta, Thom. de Walsingham, pag. 577). Enfin, la Comète paroissoit le matin avant le lever du Soleil, & le soir après son coucher, selon Thomas Ebendorffer : *Nec prætereundum existimo prodigium, quod his annis se mundo demonstravit pro avisamento. Nam anno Domini 1402, Cometa ingens, in longitudine unius hastæ porrigens retrò se caudam à vento agitatam, ultrà unius ulnæ ad visum & longitudinem. Hic tempore mensis Martii apparuit in nocte quadragesimali tempore, adeo grandis & lucida, ut nullius viventis memoria de simili prodigio retineret. Duravit quoque ultrà trium septimanarum spatium, & festa Paschalia. Quem primum in domo cognatæ, in qua tunc degebam, nesciens quid esset conspexi; & Sacerdotibus, qui simul aderant,*

& meo Magistro nuntiavi, dicens : O cognata, quàm magna ardet in cælo candela ! quod dum verbum puer sapius iterarem, factus est omnium discursus, dicentes : Cometa ! Cometa ! quod verbum usquè mea retinuit memoria Denique præfati Cometæ qui nocte occasum solis subsequēbatur, & mane ipsius præveniebat ortum in aurora (In Scriptor. rerum Austriac. veter. Hieronimi Pez. tom. II, col. 826). Un Ecrivain Italien dit encore qu'elle paroissoit toute la nuit ; mais on ne fait pas bien à quelle époque : *A di 15 febbraïo apparve una stella Cometa, ogninomo ne giudicava gran male, duro tutta la notte, udirette quello chene venne.* (Cronica di Bologna in Muratori, t. XVIII, col. 569).

Beaucoup d'autres Historiens ont fait mention de cette Comète ; mais on n'y trouve pas de plus grands détails que ceux que je viens de rapporter : examinons maintenant comment cela se concilie avec l'orbite de la Comète de 1661.

En supposant le passage au périhélie vers la fin de Février 1402, on verra que la Comète étoit, à la fin de Janvier, à l'orient du Soleil d'environ 30 degrés ; éloignée de la terre d'une fois & un tiers de la distance du Soleil à la terre, à peu près autant que lors de la dernière observation d'Apian en 1532. Il n'est donc pas impossible qu'on l'ait apperçue le soir à la fin de Janvier 1402, puisque Fracastor l'observa encore le 27 Novembre 1532, lorsque sa distance à la terre étoit encore plus grande. Dans le courant de Février, elle se fera rapprochée de la terre ; vers le 11 de ce mois, sa déclinaison australe étoit de peu de degrés ; elle devoit par conséquent paroître le soir entre le midi & l'occident, & se coucher près du vrai ouest : son mouvement devenant plus rapide à mesure qu'elle avançoit vers le périhélie, s'élevant au dessus du plan de l'écliptique, & s'approchant de la terre de plus en plus, elle devoit paroître monter vers le nord, & augmenter en éclat de jour en jour. L'angle d'élongation diminueoit au commencement de Mars ; mais la latitude & la déclinaison boréales augmentoient toujours. Elle aura été en conjonction

inférieure vers le 20 de Mars, ayant une latitude boréale de 50 à 60 degrés, à une distance de la terre moindre que la moitié de celle du Soleil à la Terre : elle ne se couchoit plus. Sa queue aura dû s'accroître considérablement ; la position de la Comète étoit favorable pour faire voir cette queue dans la plus grande étendue ; elle étoit assez éloignée du Soleil, & pouvoit avoir assez d'éclat pour paroître en plein jour. A la fin du mois, elle étoit encore plus près de la terre, toujours plus boréale. Elle aura été en opposition au commencement d'Avril ; on devoit la voir toute la nuit, le soir après le coucher du Soleil, & le matin avant son lever. Enfin, on auroit dû la voir pendant tout le mois d'Avril, & même au commencement de Mai, parce qu'elle n'étoit pas encore trop éloignée de la terre, quoique la distance au Soleil fût assez considérablement augmentée ?

La plupart des phénomènes de la première Comète de 1402, conviennent donc à celle de 1661 : mais comment expliquer pourquoi on cessa de la voir de nuit, à commencer du Mercredi saint, & pourquoi, durant huit jours, elle ne parut éloignée du Soleil que d'une brassée ou d'une brassée & demie ? Cette élongation ne peut pas s'accorder avec une latitude géocentrique de 50 à 60 degrés : supposera-t-on que pendant huit jours le ciel fut serein tant que le Soleil étoit sur l'horizon, & qu'il se couvroit de nuages chaque nuit, pour dérober cette Comète ? En lisant le récit qui se trouve dans le XVI^e tome de Muratori, ceux de Ricobaldus, de Bernardino Corio, du P. Ghirardacci, on remarque que ces Auteurs se sont copiés successivement : s'il y a eu une erreur dans la première relation, elle est donc dans toutes les autres. Il est vrai que, par opposition à ces détails, l'Auteur de la Chronique de Bologne (qu'on croit contemporain) dit qu'on voyoit la Comète toute la nuit ; ce ne pouvoit être que vers le milieu de Mars. Rappelons encore le témoignage de Thomas Ebbendorffer ; mais il étoit enfant lors de l'apparition de cette Comète. Enfin, pourquoi n'en fait-on pas mention jusque vers le 10 de Mai ?

Elle devoit cependant être encore presque aussi apparente alors, qu'elle l'étoit au commencement de Février ; il est possible que le mauvais temps ait empêché de la suivre jusqu'à cette époque.

Il faut remarquer encore, que la trace qu'a suivie cette première Comète de 1402, convient tout aussi bien à l'orbite de celle de 1702, qu'à celle de 1661 ; c'est pour cela que M. Struick, dans l'Addition à son Histoire des Comètes, qui fait partie de son second volume, publié en 1750, dit (pag. 22 & 23) que la première Comète de 1402 est la même qui a reparu en 1702, & que la seconde Comète de 1402 est celle de 1661 ; mais on a vu que les phénomènes de cette seconde Comète de 1402 ne pouvoient pas se concilier avec l'orbite de celle de 1661. Ainsi, quoiqu'il soit bien vrai que la première Comète de 1402 ait une grande ressemblance, par la route qu'elle a suivie, avec celle de 1702, il est certain cependant que M. Struick s'est trompé en 1750, en voulant rectifier ce qu'il avoit avancé en 1740, & en établissant l'identité de la seconde Comète de 1402 & de celle de 1661. La première Comète de 1402 peut donc être une apparition de celle de 1661 ; mais on ne peut l'affirmer, puisque sa route convient aussi à la Comète de 1702, & peut-être à d'autres. Enfin, du passage au périhélie en 1402, à celui de 1532, la révolution auroit été de 130 ans & trois mois environ.

On ne trouve point de détails sur les Comètes de 1273 & 1274. La première parut dans les mois de Juillet & d'Août : *Mens. Jul. & August. stella quædam apparuit, quæ à se miræ magnitudinis radios emittebat* (Lubinietzki. pag. 245). La Comète de 1661 paroissant en Juillet & en Août, doit être très-peu brillante, parce que si elle a passé le périhélie, elle est fort éloignée de la terre ; elle en est plus près, si elle n'a point passé au périhélie ; mais sa latitude est fort australe : il est donc difficile de croire que cette Comète soit une apparition de celle de 1661. Il est peut être douteux qu'il ait paru une Comète en 1273, puisque d'autres Historiens n'en font pas mention, si ce n'est qu'on lit encore, sans autre époque que celle de

Comète de 1275.

l'année : *Cometa visus est signum mali* (Fascicul. temp. p. 82 ; in Script German. ex Biblioth. J. Pistorii, tom. II).

Comète de 1274. Au commencement de Mars 1274, on vit une Comète trois jours avant la mort de S. Thomas d'Aquin : *Aliud signum in iso Monasterio (Fossæ novæ) visum fuit, nam quædam stella per modum Cometæ, tribus diebus ante prædicti Doctôris obitum, super Monasterium visa fuit, quæ cum ignoraretur quid significaret dum apparuit, ostendit Doctôris obitum dum cessavit* (Vita Sancti Thomæ Aquinatis in Actis Sanctorum, à J. Bollando cœptis, cap. 10, §. 60, pag. 677). La Comète de 1661 peut être très-visible au commencement de Mars ; mais une apparition aussi peu circonstanciée n'est point suffisante pour rien décider : si cette Comète de 1274 est la même que celle de 1661, on voit bien qu'elle a dû paroître plus longtemps.

Comète de 1147. A compter de 1274, une révolution de 127 ans reporte à 1147. Le P. Gaubil a dressé un Catalogue (a) des Comètes qui ont été observées à la Chine depuis l'an 613 avant J. C. jusqu'en 1539 de l'Ere Chrétienne ; on y trouve qu'en 1147, à la première lune, au jour *sin-ouey* (8 Février), il parut une Comète vers l'est, que sa queue étoit de 10 degrés, & qu'on la vit pendant 15 jours. La Comète de 1661 étant supposée avoir passé au périhélie dans le milieu de Janvier de 1147, elle a dû paroître le matin, à l'époque indiquée, entre le signe du Sagittaire & celui du Capricorne, avec une latitude boréale de 25 degrés, c'est à dire, à peu près sur l'équateur ou un peu au dessus, à une distance de la Terre d'environ trois quarts de celle du Soleil à la Terre : on devoit la voir du côté de l'est avec une queue assez remarquable ; mais sa distance à la Terre, & sur-tout celle au Soleil, s'augmentant de jour en jour, elle n'étoit plus guere apparente à la fin de Février. Dans la supposition que nous

(a) Ce Catalogue étoit au Dépôt de la Marine, parmi les Manuscrits astronomiques recueillis par M. de Lisle ; mais il est égaré depuis quelque temps, & je n'ai pu en retrouver que des extraits informes : M. Pingré a bien voulu m'en communiquer une copie qu'il s'étoit procurée, & qu'il fait imprimer dans sa Cométographie.

venons de faire pour le passage au périhélie, on auroit dû voir la Comète, avant sa conjonction inférieure, au commencement de Janvier, peu après le coucher du Soleil, & presque sur l'écliptique; mais son peu d'élévation sur l'horizon & les mauvais temps de cette saison ont pu la dérober.

Au printemps de l'année précédente, ou en 1146, on vit à l'occident une Comète très-brillante : *Circa tempus ishid (Paschale), Cometa multis diebus apparuit in occidente, vicinum aerem spatiis circumquaque diffusis coruscantibus radiis immensum illuminans* [Abbreviationes Chronicorum Radulphi de Diceto, pag. 508, in Scriptor. decem Histor. Angl.]. (Math. Paris, Histor. Anglic. p. 55). [Chronica Regia Sancti Pantaleonis, in corpore Historico J. Ecardi, tom. I, col. 932]. (J. Trithemii, Annales Hirsaugienfes, tom. II, pag. 413). Les deux derniers Auteurs disent seulement, & sans aucun détail, qu'en 1146 il parut une Comète. Il est évident, par la figure de l'orbite de la Comète de 1661, que la Comète de 1146 ayant passé au périhélie 15 jours avant Pâques, elle devoit être très-apparente à l'occident à la fin de Mars & au commencement d'Avril; sa latitude devoit être très-boréale, & sa queue fort grande : elle aura été visible pendant deux mois environ; ainsi; ce que l'on fait de cette Comète peut convenir avec une apparition de celle de 1661.

On avoit encore vu une Comète en 1145 : *Aprilis XVII Kalend. apparuit stella cum magna cauda in cælo* (Excerpta e vetustiss. Kalendar. manuscripto Bibliot. Ambrosianæ, in Muratori, tom. I, pag. 235). *Hoc anno, apparuit Cometes mense Maio, quem secuta est mortalitas hominum & animalium* (Recueil des Historiens de France, tom. XII, pag. 288; ex Chronico Senonensi Sanctæ Colombæ); & pag. 481 du même volume : *Obiit Lucius Papa, stella Cometes apparuit radios adversus ortum habens* (Ex Chronico Sancti Albani Andegavenfis); il est dit dans la Note des Editeurs, que Lucius mourut le 25 Février 1145. On trouve encore dans le même volume (ex Chronico Britannico) *Cometa visa, hyems tepida*.

Et arbores fuerunt steriles, & dans la Note des Editeurs (ex Epistola Hugonis Rothomagensis, Archiep. ad Albericum, Episcop. Hostiensem) : *Ibi tecum aspeximus Cometam præcipiti lapsu in occiduo ruentem*. Ces détails ne sont pas suffisans pour en conclure que ce soit un retour de la Comète de 1661 ; cependant cette dernière peut paroître à l'occident dans les mois d'Avril & de Mai. Le P. de Mailla rapporte à la page 545 du VIII^e tome de l'Histoire de la Chine, que le premier jour de la quatrième Lune (24 Avril), il parut une Comète vers l'est ; il n'est guere possible que le 24 Avril 1145, on ait pu voir à l'orient la Comète de 1661, parce que, dans cette position, sa latitude étoit trop australe, & sa distance à la Terre trop considérable, pour qu'elle fût sensible. Selon le Catalogue du P. Gaubil, on la vit en Chine, à la quatrième Lune, au jour *Vou-yn* (26 Avril) ; au jour *Ping-chin* (14 Mai), elle fut dans la constellation *Tsân* (Orion) ; au jour *Ting-jé* de la cinquième Lune (4 Juin), elle étoit comme une étoile ; au jour *Gin-su* (9 juin), elle fut stationnaire dans la constellation *Tchang* ($\phi, \mu, \lambda, \nu, \kappa$ de l'Hydre) ; on la vit jusqu'au jour *Ting-hai* de la sixième Lune (4 Juillet). Tout cela ne peut point désigner une apparition de la Comète de 1661 ; car si, le 14 Mai, elle étoit dans la constellation d'Orion, ou plutôt à même ascension droite, il falloit qu'elle eût une très-grande latitude boréale, pour être apperçue ; car elle étoit presque en conjonction avec le Soleil ; or cela ne convient pas à l'orbite de 1661, puisque, dans cette position, la Comète aura une très-petite latitude boréale, & qu'elle sera très-éloignée de la Terre. Enfin, si elle parvient à la constellation *Tchang*, son mouvement est direct & assez rapide, parce qu'il se combine avec celui de la Terre, de manière à paroître accéléré ; donc elle n'a pu être stationnaire le 9 Juin. Ce que l'on vient de rapporter d'après les Chinois, conviendrait plutôt à une Comète dont l'orbite seroit presque opposée, dans sa situation, à celle de 1661, & dont le mouvement seroit rétrograde.

Comète de 1018.

Cent vingt-huit ans avant 1146, ou en 1018, il parut une
Comète

Comète en Juillet & en Août : *In mense Augusto, stella quædam juxta plaustrum noviter apparens, radiis eminens emissis, cunctos cernentes terruit, stella hæc quæ effulsit plusquam 14 dies* (Recueil des Historiens de France, tom. X, pag. 137 *ex Chronico Ditmari, Episcopi Mersburg.*). Le P. de Mailla rapporte qu'à la sixième lune de 1018, on vit, en Chine, une Comète à l'étoile polaire (Histoire de la Chine, t. VIII, pag. 178). Le P. Gaubil la rapporte aussi à la sixième lune, mais en 1019; son apparition fut de 37 jours: elle passa par les étoiles de la grande Ourse, du Lion & de l'Hydre, elle avoit une queue de 30 degrés; mais il paroît qu'il y a erreur d'une année. Il est évident que cette Comète ne peut pas être la même que celle qui parut en 1661; car on reconnoitra facilement, que si cette Comète étoit en Juillet & en Août dans la partie boréale de son orbite, sa latitude géocentrique seroit trop petite, pour qu'elle parût près de la grande Ourse, encore moins à la polaire, & que sa distance à la Terre seroit beaucoup trop grande, pour que son éclat & sa queue fussent aussi frappans; à peine seroit-elle aperçue à la vue simple. Cette Comète n'est donc pas celle de 1661, quoiqu'elle ait paru à une année où se termine la période de 128 ans.

L'année précédente est encore marquée par l'apparition d'une Comète; sa durée fut très-longue : *Cometes solito mirabilior in modum trabis maximæ per quatuor menses apparuit* (Sigiberti Chronicon. pag. 146, & tom. X du Recueil des Historiens de France, pag. cxxiv). Voyez encore Mizauld, p. 227, & la Chronique de Cambrai & d'Arras, par Balderic, pag. 294, d'après laquelle on pourroit croire que la Comète parut au printemps de 1018. On la vit long-temps tous les soirs : *Anno Domini 1017, Cometa grandis in modum trabis, omni sero, longo tempore in Hollandia apparuit* (J. Gerbrandi Chronicon. libr. IX, cap. 8, in Annalibus rerum Belgicarum, Fr. Swertii). On ne trouve nulle part la date précise de l'apparition de cette Comète. Hévélius dit, d'après Herlicius, qu'elle

Comète de 1017.

parut dans le Lion (Cometogr. pag. 819). Il est fort embarrassant de conclure quelque chose de tout ceci : la Comète de 1661 peut bien paroître dans le Lion à la fin du printemps , avec une latitude boréale ; sa queue sera fort grande & son mouvement rapide , elle s'éloignera assez promptement de la Terre ; on peut aussi expliquer son apparition le soir , avec une assez longue queue , en fixant le passage au périhélie en Février : mais elle ne se montrera pas d'une manière aussi remarquable pendant quatre mois ; il faudroit au moins connoître la date de son apparition. Comment les Chinois n'ont-ils pas vu , en 1017 , une Comète qui parut pendant quatre mois , puisqu'ils ont observé celle de l'année suivante ? Ne pourroit-on pas soupçonner que les Historiens Européens se sont trompés d'un an , & que c'est la Comète de 1018 que quelques-uns d'entre eux rapportent à 1017 ? D'ailleurs , si la Comète de 891 est un retour de celle de 1661 , la période de 1017 à 891 n'aura été que de 126 ans.

Comète de 891.

L'apparition de la Comète de 891 se date du 21 Mars : *Stella quædam apparuit miræ magnitudinis , quam multi ferunt Cometam fore , erat enim deorsum radios magnos emittens , & multis noctibus per zodiacum ascendens , visâ est XII. Kalend. aprilis* (Annalista Saxo col. 229). On la trouve ailleurs un peu plus tard : *Anno 891 , Cometæ apparuerunt post Pascha , circa Rogationem* (Annales J. Asserii in Scriptor. quindecim Historiæ Britann. Saxonica , Anglo-danica à Thom. Gale vol. II , pag. 171). On la vit en Chine vers le même temps ; à la quatrième lune elle commença à paroître à l'étoile *San-tay* (une des pattes de devant de la grande Ourse) ; elle se perdit dans la constellation de *Tay-ouey* ; on jugea qu'elle pouvoit avoir au moins dix *Tchang* ou cent pieds de long (Hist. de la Chine du P. de Mailla , tom. VII , pag. 12). Voyez encore (Muratori , tome II , pag. 279 , ou Fragmentum Hist. Longobard. in Thesauro antiquit. Italiæ , t. IX , P. I , pag. 95). En supposant que cette Comète soit la même que celle de 1661 , & qu'elle ait passé au périhélie vers la fin de

Mars, on aura pu la voir dès le 21 de ce mois, un peu après le coucher du Soleil, entre les étoiles du Belier & celles du Taureau; ensuite elle se fera avancée assez rapidement en s'élevant vers le Nord; elle aura traversé les constellations du Cocher & du Linx. Les premiers jours de Mai, on l'aura vu entrer dans la grande Ourse, passer entre les pattes & le carré; aller de là à la chevelure de Bérénice, vers le pied du Bouvier & au dessus de la Vierge, c'est-à-dire, dans le *Tay-ouey*. Sa distance à la Terre, & celle au Soleil augmentant beaucoup alors, on l'aura perdue bientôt après. Ainsi les circonstances de l'apparition de cette Comète s'expliquent fort bien par l'orbite de celle de 1661.

Selon Hévelius, il parut une Comète en 761, une autre en 763 (Cometogr. p. 814); Lubinietzki les rapporte aussi aux mêmes années. M. Struick fixe la première en 760; la seconde en 762: il dit que celle-ci est la Comète de 1661 (1 vol. p. 210). Voici ce qu'on trouve ailleurs à ce sujet: *Docetes clarissima in Oriente apparuit per decem dies, & iterum ad Occidentem diebus viginti uno*, Histor. Miscellæ, L. 22, p. 158, in Muratori, tom. I, p. 1.). *Hoc anno, Cometa trabis instar ad orientem visus* (Theophanis Chronographia, p. 363). Puisqu'on ne fait pas dans quel temps de l'année cette Comète parut, on ne peut porter de jugement sur son orbite. Si c'est celle de 1661, la période aura été de 129 ans entre l'apparition en 762 & celle en 891.

Comète de 762.

Cent trente ans auparavant, ou en 632, il parut une Comète vers le midi: *Postquam Muchumetus illè dirus mortem obiit, mediâ die visus est Cometa, quem à trabis forma Græci Dociten nominant, Arabum prænuncians imperium; duravit dies triginta, à meridie ad septentrionem pertingens, habuit gladii formam* (Georgii Cedreni Historiarum Compendium, t. I. p. 25; Annales Michaëlis Glycæ, P. IV, p. 277). Voyez encore (Sigiberti Chronicon, p. 90; Mizauld, p. 251, & autres); mais c'est toujours à peu près le même récit, &

Comète de 632.

l'on n'a sur cette Comète aucun détail qui puisse éclairer.

Comète de 504.

En 504, on vit une très-grande Comète : *Apparuit stella miræ magnitudinis, uno radio contenta; ad radium verò erat globus igneus, &c.* (Scriptores vetustiores & præcipui rerum Britannicarum, &c. p. 59). J'ai abrégé le récit de l'Auteur, parce qu'on n'en peut rien conclure autre chose que l'apparition d'une Comète au terme de 128 ans depuis celle de 632.

Comète de 375.

Une révolution de 129 ans remonte à l'an 375; voici ce qu'on trouve dans Ammien Marcellin, Liv. XXX, chap. V, p. 600 : *Namque diebus antè paucissimis ruinas fortunarum indicantia celsarum, arsere crinita sidera Cometarum, quorum originem supra docuimus* : il paroît que ce fut en été. On ne peut donc rien établir, depuis 891, sur les retours de la Comète de 1661, si ce n'est qu'il parut une Comète à toutes les années où se termine la période de 128 à 130 ans.

Comète de 245.

On est plus instruit sur l'apparition de la Comète de l'an 245. Selon le Manuscrit du P. Gaubil, on la vit en Chine; le jour *Vou-ou* de la huitième lune (18 Septembre), elle étoit dans la constellation *Sing* (α, ι, τ de l'Hydre); elle avoit une queue de deux pieds de longueur; elle parut 23 jours, & alla à la constellation *Tchang* ($\phi, \mu, \lambda, \nu, \kappa$ de l'Hydre). Pour appliquer ceci à la Comète de 1661, il faut supposer qu'elle passa par le périhélie à la fin de Septembre 245; dans ce cas, on l'aura vue le 18 Septembre répondre au commencement du cinquième signe environ, avec une petite latitude australe; elle étoit donc assez près de la constellation *Sing*. En 23 jours elle aura eu un assez grand mouvement en longitude; elle a donc dû dépasser la constellation *Tchang*, & paroître plus au nord. Elle aura toujours été à une assez grande distance de la Terre; on fait que les Comètes n'acquièrent ordinairement leur plus grand éclat qu'après le passage au périhélie, & à cette époque celle-ci commençoit à s'éloigner rapidement de la Terre. Enfin sa route auroit dû être un peu plus nord que celle indiquée par les Chinois; mais on fait

qu'ordinairement ils rapportoient un astre à telle constellation, quand il avoit même ascension droite que cette constellation. D'ailleurs, pour bien juger de la route que la Comète de 1661 a dû parcourir en 245, il faudroit connoître, pour ce temps, la position du nœud & celle du périhélie; mais je n'ai pu avoir égard ici qu'au mouvement apparent causé par la précession des équinoxes. Quoi qu'il en soit, les circonstances de cette apparition conviennent assez à un retour de la Comète de 1661.

L'apparition précédente tombe vers l'an 1116; voici ce qu'on lit dans le Catalogue du P. Gaubil: » Au jour *Kia-ou* de la » onzième lune (10 Novembre), étoile nouvelle à l'ouest. Au » jour *Ki-ay* (15 Novembre), elle fut au sud de la constella- » tion *Hiu* (β du \approx & α du petit Cheval), elle alla à la » constellation *Ouey* (la Mouche) «. Il y a erreur dans la date; M. Pingré l'avoit déjà remarqué dans la copie de ce catalogue, qu'il a bien voulu me communiquer. En effet, le jour *Kia-ou* étoit bien le 10 Novembre de l'année 1116, mais ce n'étoit pas de la onzième lune, puisque le solstice d'hiver doit, selon le principe des Chinois, tomber dans la onzième lune, & que ce solstice arrivoit, en 1116, le 22 Décembre. Quand il y auroit eu une intercalation, cela ne suffiroit point encore; car en 1116 la première lune de l'année, comptée à la manière des Chinois, est celle dont la conjonction moyenne est arrivée le 2 Février, puisque le Soleil est entré dans le signe des Poissons le 20 de ce mois, que l'éclipse du Soleil du 31 Mars est rapportée par les Chinois mêmes au premier jour de la troisième lune (Astronom. Chinoise du P. Gaubil, tom. 3, p. 276); ainsi le jour *Kia-ou* (10 Novembre) étoit dans la dixième lune, & non dans la onzième. Mais le jour *Kia-ou* ne se retrouve plus que le 9 Janvier 1117, & le jour *Ki-hay* le 14 Janvier; donc si la lune est bien indiquée, il faut changer de deux mois le temps de l'apparition de cette Comète. Dans le cas où la Comète aura paru le 9 Novembre à l'ouest, on trouvera, en fixant son passage au-

Comète de 1116.
ou 1117.

périhélie vers la fin de Décembre, qu'elle devoit être le 14 Novembre au sud de la constellation *Hiu*, avec une latitude australe, ayant un mouvement direct peu considérable en longitude, mais plus grand en latitude vers le nord; on verra qu'il est impossible qu'elle soit parvenue jusqu'à la Mouche. Peut-être que la constellation *Ouey* ne doit pas être prise ici pour la Mouche, mais pour *Ouey* qui suit *Hiu*; alors cela conviendrait à l'orbite de la Comète de 1661. Si c'est en Janvier qu'il faut fixer l'apparition de la Comète, il est alors fort difficile d'y reconnoître un retour de celle de 1661; car elle devoit être plus avancée en longitude qu'on ne le dit, pour qu'on la vît le 9 Janvier à l'ouest: le 14 Janvier, le Soleil étoit presque en conjonction avec la constellation *Hiu*; comment a-t-on pu voir la Comète qui étoit au sud de cette constellation? Et à cette époque il ne se pouvoit pas qu'elle parvint jusqu'à la Mouche. Je crois que, d'après cet examen, on conclura que la Comète a réellement paru en Novembre 116, & que, pour concilier cette apparition avec l'orbite de celle de 1661, il faut prendre la constellation *Ouey*, non pour la Mouche, mais pour *Ouey* qui renferme α du \approx , θ & ε de Pégase.

12 ans avant J. C.

L'an 12 avant Jésus-Christ, ou 742 de la fondation de Rome, on vit une Comète dans cette ville (Dionis Historiæ Romanæ, lib. 54, p. 760); on l'observa aussi en Chine à la fin d'Août (Histoire de la Chine, par le P. de Mailla, tom. 3, p. 200). Le P. Gaubil en donne un plus grand détail, dans lequel il est évident qu'il s'est glissé quelques fautes. » A la » septième lune, jour *Sin-ouey* (26 Août) Comète dans la » constellation *Tsing* (η , μ , ν , γ , ξ , λ , ζ , ε , des Gémeaux). » Elle passa sur les étoiles de la main gauche de Castor: elle » parut au nord de l'Aigle, alla aux étoiles du Lion & de la » Vierge au matin; ensuite le soir elle fut près d'Arcturus, » alla aux étoiles du *Tien-che*. On la vit 63 jours «. Si cette Comète est celle de 1661, il est aisé de voir qu'elle avoit une latitude fort australe lorsqu'elle commença à paroître, & que

ce devoit être plus d'un mois avant son passage au périhélie ; les Chinois peuvent l'avoir rapportée à la constellation *Tjing* par l'ascension droite ou la longitude : mais la Comète de 1661 n'auroit certainement pas passé ensuite sur la main gauche de Castor. Elle a dû parcourir les environs du Lion & de la Vierge, parvenir ensuite jusqu'à la longitude d'Arcturus, & même au delà, c'est-à-dire, aller au *Tien-che* ; mais sa latitude ne sera pas devenue assez boréale, pour qu'elle fût bien près d'Arcturus. Il est impossible que dans ce trajet elle ait passé au nord de l'Aigle, il faut qu'il y ait erreur ici dans le P. Gaubil. Enfin, on peut, à la rigueur, rapporter les principales circonstances de l'apparition de la Comète de l'an 12, à celle de 1661, en remarquant toutefois que sa route apparente en l'an 12, a dû être bien plus australe que celle indiquée par les Chinois.

Selon le P. de Mailla, il parut une Comète en Chine, l'an 138 avant Jésus-Christ ; on la vit à la septième lune, & en automne au nord-ouest (Hist. de la Chine, tome III, p. 9). La période entre les années 12 & 138 n'auroit été que de 126 ans : cela n'est peut-être pas impossible ; mais on ne peut rien conclure d'après une indication aussi légère.

Enfin, si l'on remonte trois révolutions plus haut, on trouve encore une Comète observée en Chine. Le P. Gaubil dit qu'en hiver de l'année 525, il parut une Comète dans les étoiles du Scorpion, qu'elle alla jusqu'à la voie lactée. Voyez aussi l'Histoire de la Chine du P. de Mailla, tome II, p. 193, l'Histoire de l'Astronomie Chinoise du P. Gaubil, tome III, p. 25. Le P. de Mailla dit qu'au jour *Kia-su* de la sixième lune, il y eut éclipse de Soleil, & que cette même année, en hiver, il parut une grande Comète. Le P. Gaubil remarque, p. 251 & 252 de l'Astron. Chinoise, que le premier jour de la sixième lune n'étoit pas *Kia-su* ; & qu'il n'a pu y avoir éclipse dans les années voisines au jour *Kia-su*, si ce n'est le 21 Août 525 ; je ne rapporte ceci que relativement à la date de l'apparition de la Comète. Quoi qu'il en soit, si cette Comète est celle de 1661, elle pouvoit avoir

138 avant J. C.

Comète de 525.

la même longitude qu'Antarès en hiver 525 ; mais elle devoit être plus boréale ; son mouvement en longitude étoit assez lent, pour qu'elle ne dépassât point de beaucoup la voie lactée : on a dû la voir assez long-temps.

Voilà donc quatorze apparitions de Comètes à des intervalles à peu près égaux à la période écoulée entre 1532 & 1661, ou multiples de cette période ; j'en ai discuté les principales circonstances ; il en est plusieurs qui conviennent à l'orbite de la Comète de 1661, d'autres ne peuvent s'y rapporter. Les Historiens qui ont fait mention de ces Comètes, n'ont souvent écrit que d'après d'anciens récits : ceux qui ont été témoins de ces apparitions, n'étoient pas Astronomes ; ainsi il n'est pas surprenant qu'on trouve beaucoup d'obscurité dans leurs relations. La plupart ne nous en auroient pas même conservé la mémoire, s'ils n'eussent été persuadés que les apparitions des Comètes étoient nécessairement liées avec les grands évènements qui les ont précédées ou suivies. Les Chinois ont sans doute été plus exacts ; mais quand on remonte à des époques aussi éloignées, on doit s'attendre à rencontrer aussi de l'incertitude chez eux. Je conviens que ce seroit un grand hasard de trouver autant d'apparitions de Comètes à égales distances, & que chacune d'elles ne fût pas un retour de la même Comète, sur-tout lorsqu'on voit que les circonstances de plusieurs de ces apparitions peuvent s'expliquer par la même orbite ; cependant je crois n'avoir point assez de preuves, pour prononcer sur l'identité : j'en soumets la décision aux Astronomes. Les différences que j'ai trouvées entre le calcul & les observations de la Comète de 1532, me retiennent encore : je fais bien que les observations d'Apian n'étoient pas susceptibles d'une grande exactitude, & qu'on ne peut pas se flatter de les faire convenir toutes avec une certaine précision ; cependant ces différences me paroissent trop grandes : les observations de Fracastor vont encore plus mal. Tout ce que l'on peut dire de plus favorable, c'est que l'orbite calculée par M. Halley, passe, à peu près, autant au nord des observations de Fracastor, qu'au midi de celles d'Apian, & même un peu plus près de celles-ci. M. Halley n'a
sans

SUR LES COMETES DE 1532 ET DE 1661. 393

sans doute donné les élémens qu'après les avoir sévèrement critiqués : je ne prétends pas y en substituer d'autres; mais je vais montrer qu'on peut, par des élémens très-différens des siens, représenter tout aussi bien, & même un peu mieux, les observations d'Apian.

Essai sur la détermination des élémens de la Comète de 1532, & de celle de 1661.

J'ai fait plusieurs tentatives pour trouver des élémens qui représsentassent mieux que ceux de M. Halley les observations de la Comète de 1532, faites par Apian : je n'ai eu en vue que de chercher à me rapprocher des élémens de la Comète de 1661; mais toutes les hypothèses que j'ai pu faire m'en ont toujours beaucoup éloigné; je me contenterai de donner ici celle qui m'a paru s'accorder le mieux avec toutes les observations. Pour établir cette hypothèse, j'ai pris un milieu entre les observations des 1^{er} & 2 Octobre, & entre celles des 30 & 31 du même mois; j'ai tâché de représenter la dernière observation du 7 Novembre, ainsi que les intermédiaires; mais j'ai été obligé de laisser subsister une différence de 2° en latitude sur l'observation du 7 Novembre, & une de 2° 17' en longitude sur celle du 13 Octobre. Voici les élémens que j'ai conclus; je les place à côté de ceux de M. Halley, pour qu'on puisse les comparer plus facilement.

	ELÉMENTS DE L'ORBITE DE LA COMÈTE de 1532, PAR M. HALLEY.	NOUVEAUX ÉLÉMENTS.
Nœud ascendant.....	2 ^s 20 ^o 27'	3 ^s 29 ^o 8'
Inclinaison.....	32 36	42 27
Périhélie sur l'orbite.....	3 21 7	4 15 44
Distance périhélie.....	0,5091	0,61255
Passage au périhélie, temps moy. à Paris.	19 Oct. 22 ^h 21'	19 Oct. 15 ^h 2'

*Comparaison des Observations avec le calcul fait sur
les nouveaux élémens.*

ANNÉE	TEMPS MOYEN à PARIS.	LONGITUDE OBSERVÉE.	LES ÉLÉMENTS DONNENT.	LATITUDE OBSERVÉE.	LES ÉLÉMENTS DONNENT.
1532.					
Oct. 1	16 ^h 5'	5 ^s 9 ^o 13'	+ 1 ^o 10'	13 ^o 33'. A	— 0 ^o 50'
2	15 44	5 12 59	— 1 10	10 51. A	+ 0 51
13	16 20	6 0 0	— 2 17	0 0	+ 0 15 B
18	16 20	6 5 46	— 0 32	4 51. B	— 0 7
30	16 14	6 22 45	+ 0 28	13 38. B	+ 0 26
31	16 49	6 25 12	— 0 29	15 7. B	— 0 26
Nov. 7	16 19	7 4 27	+ 0 11	20 5. B	— 1 59

La plus grande erreur en longitude tombe sur le 13 Octobre, comme je l'ai dit ci dessus ; il faut se rappeler que les 13 & 18 Octobre Apian se trouvoit à Leiplick, où il n'avoit qu'un mauvais instrument : *Itinerarium horologium, quod compassum vocant.* De sorte qu'on ne doit regarder ces deux positions que comme estimées ; tandis qu'il a fait à Dresde les observations précédentes & suivantes, en prenant les hauteurs de la Comète, celles d'une étoile & les azimuths de la Comète.

Je n'ai pas comparé ces nouveaux élémens aux observations de Fracastor ; on voit bien qu'ils les représenteroient plus mal que ceux de M. Halley.

J'ai voulu essayer aussi de déterminer l'orbite de la Comète de 1661, en m'appuyant sur les observations des 3, 13 Février & 10 Mars ; j'ai reconnu qu'on pourroit changer plusieurs des élémens de M. Halley, sans que cela produisît une différence bien sensible sur l'observation intermédiaire : la variation n'a cependant jamais été à un degré sur aucun de ces élémens. Il m'a paru que l'on ne pouvoit pas accorder toutes les meilleures observations d'Hévélius à quelques minutes près, quelque combinaison que l'on fît. L'inclinaison de l'orbite est mieux

SUR LES COMETES DE 1532 ET DE 1661. 395
 déterminée, en 1661, que le nœud, parce que les latitudes
 géocentriques & héliocentriques n'ont pas beaucoup varié
 depuis le 3 Février jusqu'au 10 Mars. Voici des élémens qui
 représentent fort bien les trois observations que j'ai choisies.

Nœud ascendant.....	2° 21' 54"
Inclinaison.....	33 0 55"
Périhélie sur l'orbite.....	3 25 16 8
Distance périhélie.....	0,442722
Passage au périhélie, 26 Janvier à 21 ^h 18', temps moyen à Paris.	

Ces élémens ne sont pas bien différens de ceux de M.
 Halley; j'aurois bien désiré trouver le même accord pour ceux
 de la Comète de 1532; les Observations d'Apian sont trop
 imparfaites, pour l'espérer. On pourroit sans doute les combiner
 différemment; peut-être trouveroit-on le moyen de se rappro-
 cher des élémens de celle de 1661. On pourroit aussi, pour
 plus d'exactitude, faire le calcul de ces deux Comètes dans
 l'ellipse; mais l'hypothèse parabolique devoit suffire pour donner
 à peu près les mêmes élémens; & c'est dans cette hypothèse
 que ceux de M. Halley, que j'ai voulu vérifier, ont été cal-
 culés. D'ailleurs le temps m'a manqué pour entreprendre ce
 travail, qui n'entroit pas dans l'objet du Programme de l'Aca-
 démie; je me propose d'y revenir dans la suite.



F A U T E S A C O R R I G E R

Dans les Recherches sur les Comètes de 1532 & de 1661.

PAGE 347, ligne 6 comptée d'en bas, ab ecliptica in Virgine,
lisez ab ecliptica 15, in Virgine, &c.

Pag. 367, quatrième ligne des Temps vrais du 7 Février, 5° 45' 48",
lisez 5^h 45' 48".

les Cometes de 1532 et 1661.

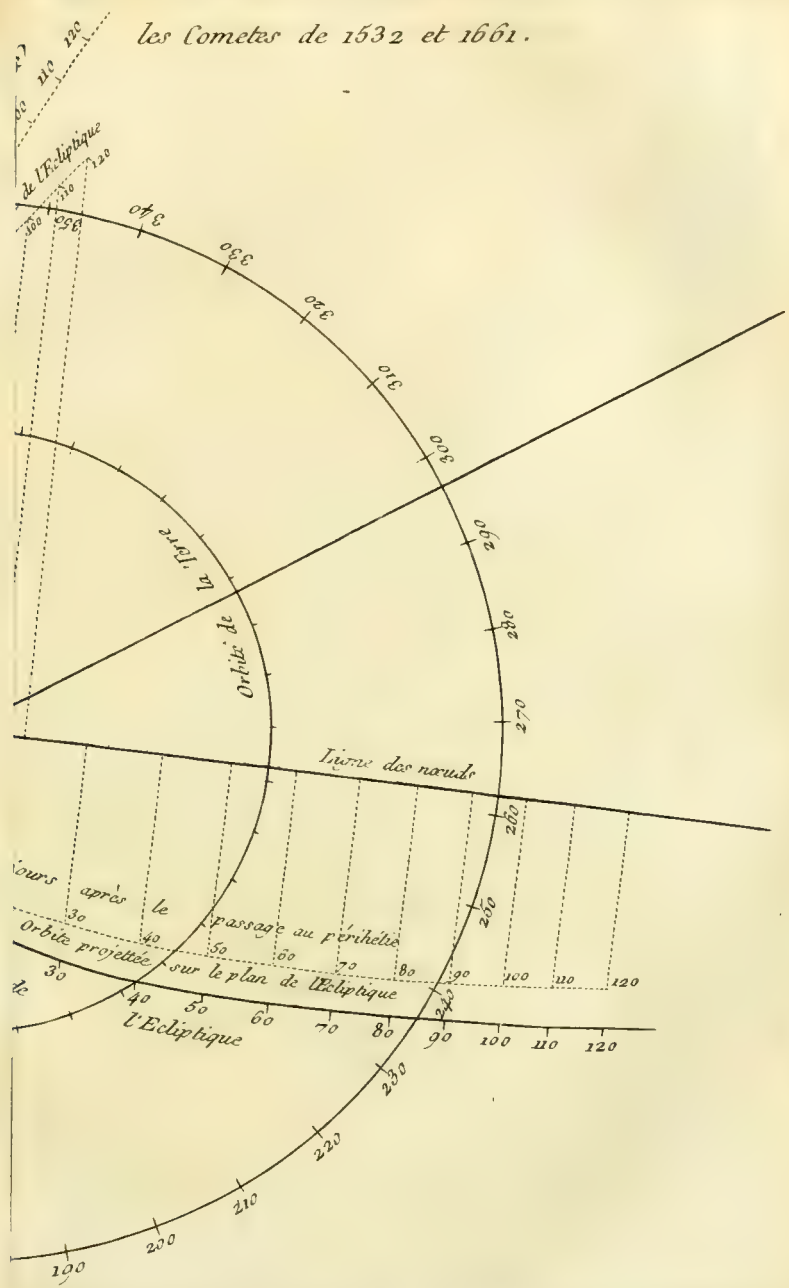
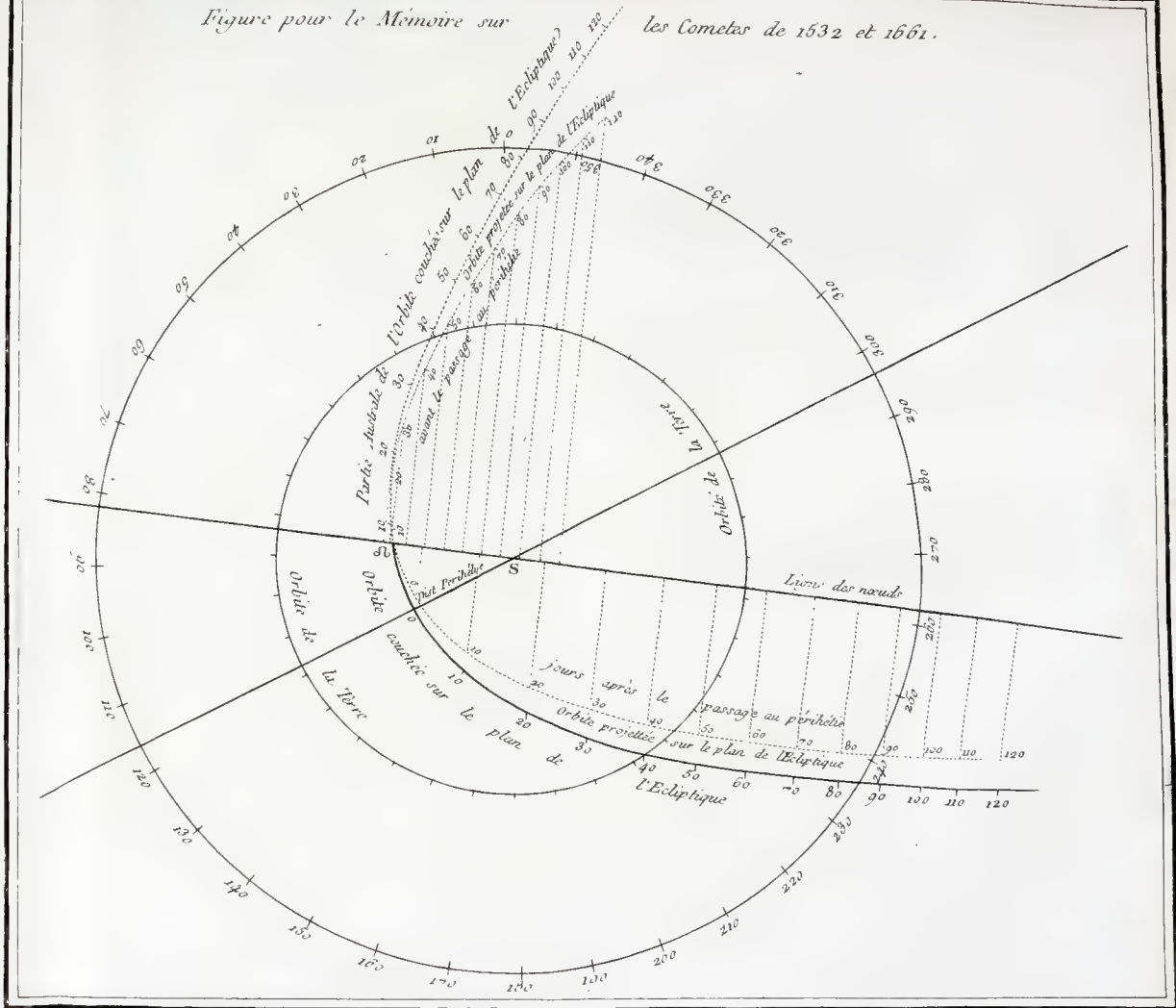


Figure pour le Mémoire sur

les Comètes de 1532 et 1661.





EXAMEN CHIMIQUE

DU

MARBRE DE CAMPAN,

*Fait dans le courant des mois d'Octobre , Novembre ,
Décembre 1772 , & Janvier 1773.*

P A R M. B A Y E N ,

Apothicaire Major des Camps & Armées du Roi.

LES Naturalistes divisent les marbres en trois espèces générales:

1°. En marbre d'une seule couleur, & cette première espèce comprend, selon eux, les marbres blanc, gris, noir, jaune, &c.

2°. En marbre de diverses couleurs; & dans celle-ci, ils placent tous les marbres dans lesquels on distingue les couleurs précédentes, mélangées & distribuées de manière à former des variétés agréables.

3°. En marbre figuré: cette dernière espèce, moins répandue dans la nature que les deux autres, comprend les

marbres de Florence & de Hesse, dont on voit de si beaux morceaux dans les Cabinets (a).

Les Chimistes qui ne classent point les corps naturels d'après leur forme extérieure, diviseroient sans doute ce genre de pierre tout autrement que n'ont fait les Naturalistes, si, par une suite d'expériences, pour ainsi dire, docimastiques, ils avoient constaté les différences de chaque espèce de marbre en particulier. En attendant que ce travail se fasse, je crois qu'on pourroit déjà en former quatre classes générales, sauf à les restreindre ou à les augmenter à mesure que l'expérience éclaireroit le Chimiste qui entreprendroit l'examen des différens marbres connus.

La première classe comprendroit uniquement les marbres purs, ou, ce qui est la même chose, les marbres blancs, quelle que soit leur dureté, quelle que soit la forme de leur grain. On fait que toute cette classe est sans mélange de matières étrangères; que les acides la dissolvent entièrement; qu'elle forme avec eux divers sels à base calcaire; & qu'étant calcinée elle se convertit en chaux pure.

On rangeroit, dans la seconde classe, les marbres colorés, qui ne diffèrent du marbre simple & pur, que par la petite portion de matière colorante qui leur seroit unie.

J'ai examiné le marbre noir qu'on emploie à Paris, & dans deux onces je n'ai trouvé que 60 grains ou $\frac{5}{96}$ de matière colorante. Le reste, abstraction faite du gaz & de l'eau que donne ce marbre dans la calcination, étoit de pure terre calcaire dont l'essence est d'être blanche; aussi ai-je obtenu, en précipitant la dissolution de ce marbre noir, une terre d'une blancheur parfaite. Lorsque la matière colorante noire se trouve unie au marbre blanc en plus petite quantité $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{96}$, par exemple, elle

(a) Voyez le Dictionnaire d'Histoire Naturelle de M. Valmont de Bomare, article MARBRE. Wallerius, &c.

lui donne une couleur intermédiaire entre le noir & le blanc , ce qui constitue le marbre gris plus ou moins foncé. On en peut dire autant des morceaux de marbre jaune, qui se trouvent dans certaines brèches , & que l'examen m'a appris être colorés par une petite quantité de terre martiale de la nature de l'ochre.

Ainsi tous les marbres qui ne contiennent d'autres matières étrangères que celles qui les colorent , devroient entrer dans cette classe , sans en excepter ceux dont les couleurs sont variées ; on n'en excluroit même pas les brèches , lorsque les fragmens qui entrent dans leur composition , & le ciment qui les unit , sont absolument de nature calcaire.

Toute cette seconde espèce est propre à faire de la chaux , sur-tout les marbres noirs & gris , dont la partie colorante s'atténue tellement dans le feu , que la chaux qui en résulte est très-blanche.

On rangeroit , dans la troisième , les marbres où on appercevroit des coquilles , des madrepores , des coraux & autres productions animales , si une analyse scrupuleuse faisoit découvrir des différences essentielles dans la comparaison qu'on en feroit avec ceux de la classe précédente.

On mettroit enfin , dans la quatrième classe , ceux qui , outre la matière colorante , contiendroient une quantité remarquable de terre ou pierre d'une nature absolument différente de celle de la pierre calcaire : tel est le marbre de Campan , dont j'ai l'honneur de présenter l'Examen Chimique à l'Académie. Cette quatrième espèce ne feroit que de très-mauvaise chaux , sur-tout si la matière étrangère s'y trouvoit dans de grandes proportions.

Les Naturalistes font entrer , dans la description qu'ils donnent du marbre , une demi-transparence qu'on y remarque , lorsque ses fragmens ou les ouvrages qu'on en fait n'ont pas trop d'épaisseur. C'est sur-tout dans ceux de la première classe ,

que j'ai appelés simples & purs, que cette demi-transparence est sensible (a).

Les marbres de la seconde & troisième classe ont d'autant moins la propriété de transmettre la lumière, que les matières qui les colorent sont plus grossières, plus abondantes & moins fondues dans le marbre blanc qu'elles ternissent, qu'elles troublent, pour ainsi dire, ou enfin qu'elles rendent absolument opaque, selon les proportions où elles se trouvent.

Quant à ceux de la quatrième classe, il est impossible que la lumière puisse les pénétrer; les corps étrangers avec lesquels ils sont mêlés, leur communiquant leur opacité, cet accident doit les faire rentrer dans la classe des pierres appelées opaques.

Je n'ai fait jusqu'ici aucune recherche sur les pierres de Florence & de Hesse, nommées par les Naturalistes *marmor figuratum*. Je ne peux donc avoir que des conjectures sur le rang qu'elles doivent occuper. Quant au marbre de Campan, les expériences dont l'Académie a la bonté de me permettre de lui faire lecture, prouvent qu'il ne peut être placé que dans la classe des marbres composés ou mixtes.

Le marbre connu dans les ateliers & dans les appartemens; sous le nom de Vert-Campan, nous est apporté de la partie des hautes Pyrénées, qui dépend du pays de Bigorre : la carrière dont on le tire, est située à très-peu de distance de la rive droite d'un des torrens qui forment les sources de l'Adour. Ce marbre doit sa double dénomination, 1.^o à la vallée de Campan,

(a) La cause de cette transparence ne peut-elle pas être rapportée à la cristallisation que subit la terre calcaire, lorsque l'eau & le gaz qu'elle contient éprouvent avec elle le degré de combinaison intime qui constitue le marbre ? car, quoique je sois naturellement éloigné de tout ce qui s'appelle système, je ne peux cependant m'empêcher d'avouer que je tiens pour démontré que tous les corps du règne minéral sont soumis aux loix de la cristallisation qui constitue les masses, & que je la regarde, après la combinaison qui constitue les mixtes, comme une des grandes opérations de la Nature. Il ne seroit pas difficile de prouver que tout ce que nous connoissons de minéralisé ou de lapidifié, a pris un arrangement conforme aux loix de la cristallisation. On dit communément les animaux vivent, les plantes végètent ; on pourroit dire de même les minéraux cristallisent, ce qui exprimeroit en un seul mot leur manière d'être & de s'agréger.

à l'extrémité-sud de laquelle on trouve la montagne dont on le détache ; 2.^o à la couleur verte qui paroît faire le fond de presque tout celui qu'on nous apporte.

La couleur rouge est après la couleur verte, celle qui se fait le plus remarquer ; souvent même elle y est la dominante , & alors on l'appelle rouge-Campan ; on y rencontre aussi des veines de marbre blanc ; enfin on y apperçoit quelquefois des petites pyrites martiales , jaunes & luisantes.

On y chercheroit en vain des débris de coquilles , de madrepores , &c. Les marbres , ainsi que les autres pierres des hautes Pyrénées , ne contiennent , ou du moins ne m'ont paru contenir aucunes productions du règne animal bien caractérisées.

Analyse du Marbre-vert Campan par l'acide nitreux.

P R E M I E R P R O C É D É.

AYANT choisi un morceau de vert-Campan dans lequel on ne voyoit absolument point de marbre rouge ni de marbre blanc , j'en exposai deux onces à l'action de l'acide nitreux étendu d'eau distillée ; la dissolution s'en fit dans le commencement avec assez de vitesse ; mais sur la fin elle devint fort lente. Lorsque l'acide employé fut saturé , je le décantai & en substituai d'autre que je laissai sur la matière plus de 24 heures , quoiqu'on n'y apperçût plus d'effervescence.

La portion sur laquelle l'acide nitréux n'avoit point agi , étoit partie en poudre grise , partie en morceaux assez tendres & de la même couleur que la poudre ; le tout pesa , après l'édulcoration & la dessiccation , cinq gros & douze grains : la texture de cette matière ne me permet pas de douter de sa nature ; c'est un vrai schiste.

La liqueur , qui tenoit en dissolution la terre calcaire de notre marbre , avoit un excès d'acide , & n'étoit que foiblement colorée ; la noix de galle ne l'altéroit point , une goutte d'alkali fixe versée dessus y excitoit une vive effervescence , & il se for-

moit une petite quantité de précipité rougeâtre qui étoit sur le champ redissous; ce qui se fit constamment jusqu'à ce que tout l'acide surabondant fût parvenu au point d'une saturation parfaite qui fit prendre à la dissolution une couleur de biere forte, sans cependant la troubler; je remarquai alors que la noix de galle pouvoit la teindre en noir foncé, ce qui n'étoit point arrivé tant qu'il y avoit eu excès d'acide.

La couleur rouge des premières portions de la poudre qui se séparoit du dissolvant par l'addition de quelques gouttes d'alkali fixe, me détermina à précipiter en deux temps la dissolution que j'étendis dans deux livres d'eau distillée. Les premières portions d'alkali que je versai dessus peu à peu & avec précaution, en précipitèrent une matière rouge qui s'amassa bientôt au fond du vase. Au moment où je m'aperçus que la liqueur avoit perdu sa couleur de biere forte, qu'elle étoit devenue claire & limpide comme l'eau, enfin qu'elle ressembloit parfaitement à une dissolution de marbre blanc, je suspendis l'opération, & séparai par le filtre ce premier précipité, qui, édulcoré & séché, pesoit 31 grains. La couleur foncée de la liqueur, son goût martial, sa propriété de teindre en noir, l'infusion de noix de galle, la couleur rousse du précipité, tout enfin annonçoit qu'il étoit de nature ferrugineuse; & une simple expérience m'a appris que c'étoit un mélange de fer & de terre alumineuse. J'ai fait dissoudre ce précipité dans une suffisante quantité d'acide vitriolique foible; la dissolution, qui avoit un goût très-stiptique, ayant été filtrée & abandonnée à l'évaporation insensible, donna en moins de cinq jours des cristaux d'alun bien caractérisés, & un peu de vitriol vert.

Le moyen que j'avois employé pour séparer de la dissolution de notre marbre tout ce qu'elle contenoit de ferrugineux & d'alumineux, m'ayant réussi, même au delà de mes espérances, je procédai sur le champ à la seconde précipitation de la liqueur, par le même alkali qui en sépara une terre calcaire d'une blancheur parfaite, dont le poids se trouva être d'une once & quarante grains, après avoir été suffisamment lavée & séchée.

DU MARBRE DE CAMPAN. 403

En additionnant les produits, nous voyons que les deux onces de marbre vert employées contenoient :

	onces.	gros.	grains.	
1. ^o	»	5	12	de schiste.
2. ^o	»	»	31	de terre martiale, mêlée de terre alumineuse.
3. ^o	1	»	40	de terre calcaire.
TOTAL..	1	6	11	

La perte, qui est d'un gros soixante-un grains, doit être attribuée au gaz qui s'est échappé pendant la dissolution, & à la portion d'eau qui, ainsi que le gaz, s'étoit combinée avec la terre calcaire pour former notre marbre (a).

Analyse du Marbre rouge de Campan par le même acide.

D E U X I È M E P R O C É D É.

J'AI soumis à l'action de l'acide nitreux deux onces de Marbre de Campan, en un seul morceau qui ne contenoit point de marbre blanc, & dans lequel la couleur rouge étoit dominante.

Il se sépara, pendant la dissolution, une poudre d'un rouge obscur semblable au colcothar, ou plutôt à ce rouge brun dont on colore le carreau des appartemens.

En agitant l'acide nitreux & en le décantant, lorsque la saturation fut à son point, il fut facile de retirer cette poudre rouge, qui, lavée & séchée, pesoit soixante grains. C'étoit du fer qui avoit perdu la propriété d'être attiré par l'aimant, mais au-

(a) Il étoit important de savoir si les 31 grains de premier précipité étoient la quantité précise de fer & de terre alumineuse, contenue dans les 2 onces de marbre que j'avois employées dans le premier procédé; pour m'en assurer, je fis l'expérience suivante.

Je saturai, avec une suffisante quantité d'acide vitriolique étendu de beaucoup d'eau distillée, une demi-once de la terre calcaire que j'avois obtenue par la deuxième précipitation : je séparai, par le moyen du filtre, la sélénite qui s'étoit formée; mais la liqueur ne se trouva être ni vitriolique ni alumineuse; elle ne fut point altérée par la noix de galle; concentrée par une évaporation lente, elle ne donna ni alun ni vitriol.

quel il fut facile de la rendre en le tenant quelque temps au feu dans un creuset fermé, avec un corps qui pouvoit lui donner du phlogistique.

Lorsque jemefus assuré que toute la partie sur laquelle l'acide nitreux avoit de l'action, étoit dissoute, je substituai à cet agent quelques onces d'eau distillée pour laver la matière insoluble, qui, séchée exactement, pesoit un gros soixante-trois grains. Elle étoit divisée en plusieurs morceaux fort fragiles & percés de divers trous; sa couleur étoit grise, & tachée en divers endroits par un peu de la poudre rouge que les lavages n'avoient pu enlever.

En précipitant la dissolution en deux temps, suivant la méthode indiquée dans la première expérience, j'ai obtenu un premier précipité martial du poids de vingt-cinq grains, & un deuxième de nature calcaire, du poids d'une once trois gros cinquante trois grains.

Les deux onces de Marbre Campan rouge, employées dans ce procédé, ont donc produit :

	onces.	gros.	grains.	
1. ^o	2	2	60	de safran de Mars rouge-brun, qui s'est séparé de lui-même pendant la dissolution.
2. ^o	2	1	63	de schiste.
3. ^o	2	2	25	de terre martiale & alumineuse, précipitée par les premières portions d'alcali.
4. ^o	1	3	53	de terre calcaire.
TOTAL...	1	6	57	
PERTE...	2	1	15	de gaz & d'eau (a).

Si on compare les produits de cette seconde expérience avec ceux de la première, on verra les différences qu'il y a entre les deux morceaux de marbre qui en ont été le sujet, & on sentira les raisons qui m'ont déterminé à travailler sur les deux échantillons auxquels j'ai donné la préférence. Je les ai envisagés

(a) Ayant exposé à un assez grand degré de feu 2 onces de ce marbre, & l'y ayant tenu pendant 2 heures $\frac{1}{2}$, je l'ai trouvé diminué d'un gros 23 grains, quoiqu'il fut encore bien éloigné d'être réduit en chaux.

comme les extrêmes ; le vert ne contenoit pas de marbre rouge, & le rouge ne contenoit de marbre vert que le moins possible.

Si on choisissoit des morceaux d'un mélange différent, on trouveroit sans doute des proportions différentes de celles que j'ai indiquées. Et qui fait si on pourroit jamais parvenir à rencontrer précisément les mêmes ? J'ai, par exemple, traité par l'acide nitreux un morceau de notre marbre dans lequel j'avois apperçu une pyrite, il pesoit une once ; c'étoit un mélange de marbre rouge & vert, on y distinguoit même quelques portions de marbre blanc. Je désirois savoir à laquelle des terres, la calcaire ou la schisteuse, étoit attachée la pyrite. La dissolution de la terre calcaire étant faite, il resta deux gros & quelques grains de schiste, dont un morceau se faisoit remarquer par sa grosseur & par une petite excavation où on voyoit non seulement la pyrite dont j'ai parlé, mais encore plusieurs autres que le marbre, qui les couvroit, avoit empêché d'apercevoir.

Analyse des mêmes Marbres par l'acide vitriolique.

TROISIÈME PROCÉDÉ.

Qu'on mette dans une capsule de verre ou de grès une certaine quantité de marbre concassé, & qu'on l'humecte avec de l'acide vitriolique foible ; ce dissolvant attaquera le marbre, se desséchera, & les fragmens seront couverts d'une incrustation blanche, séléniteuse, c'est-à-dire, d'un sel vitriolique à base calcaire.

Si la matière étoit desséchée avant que la saturation fût au point requis, il faudroit l'humecter avec un peu d'eau distillée, pour étendre de nouveau l'acide & lui donner plus de prise sur les corps qu'il doit dissoudre.

Dès qu'on s'apercevra que l'acide ne se fait plus sentir, on versera dans la capsule où se fait la dissolution, une ou deux onces d'eau distillée pour délayer la sélénite, qu'on pourra, par ce moyen, retirer & mettre dans un autre vase, une bouteille,

par exemple, pour y être gardée jusqu'à la fin de l'opération ; après quoi on vérifiera de nouveau sur le marbre une pareille quantité du même acide, qui, en se saturant, formera de nouvelle sélénite, qu'on retirera & qu'on mettra dans la bouteille, ainsi qu'il a été dit ; en continuant ce travail, qui est long, mais sûr & facile, on parvient à combiner, avec l'acide de vitriol, tout ce que le marbre employé contient de soluble, & par cette sorte de vitriolisation, on forme divers sels beaucoup mieux caractérisés, que ceux qui résultent de l'union de l'acide nitreux avec les mêmes matières ; avantage qui, dans ce genre de travail, doit faire préférer l'acide vitriolique à celui de nitre.

En traitant, suivant la méthode que je viens d'indiquer, deux onces de Marbre vert Campan séparé de toutes portions rouges ou blanches, j'ai obtenu, 1.^o une once six gros trente grains de vitriol calcaire ou sélénite.

2.^o Cinq gros soixante-trois grains de schiste, qui n'étoit pas entièrement privé de terre calcaire, puisque l'acide nitreux put en dissoudre environ trente grains.

3.^o Quatorze onces d'une liqueur légèrement colorée en vert jaunâtre & d'un goût vitriolique, dont quelques gouttes versées sur une infusion de noix de galle, la teignirent en noir foncé.

Lorsque, par une évaporation faite dans un vase de verre au bain de sable, cette liqueur fut réduite à peu près à cinq ou six onces, il s'en sépara un peu de sélénite & une petite quantité de terre martiale : filtrée & mise de nouveau sur le sable, elle fut concentrée au point de ne pas excéder le volume d'une once & demie d'eau ; à ce moment je l'abandonnai à l'évaporation spontanée.

Le sixième jour, on appercevoit au fond du vase une trentaine de petits cristaux blancs & séparés les uns des autres ; leur goût & leur forme octaèdre annonçoient leur nature : c'étoit une cristallisation d'alun, très-régulière. Deux jours après, il se forma une seconde cristallisation du même sel, dont les cristaux, quoique plus petits, étoient cependant bien caractérisés,

& à celle-ci il en succéda une troisième plus petite encore que la précédente. A cette époque il commença à se former sur les parois du vase des efflorescences salines, & en moins de quatre jours la matière se coagula entièrement en une masse de couleur verte, tirant sur le jaune, dans laquelle il fut impossible de distinguer aucun sel par des caractères propres à le faire reconnoître.

En traitant les sels vitrioliques alumineux dans l'état d'eau mère, tel qu'étoit celui dont je parle, il n'est pas facile de les mettre au point de donner de beaux cristaux, à moins qu'on n'ait recours aux alkalis fixes ou volatils, ainsi qu'on le pratique dans les travaux en grand de la Halotechnie; ce ne fut donc qu'après bien des tentatives, toutes faites sans addition d'aucun alkali, que je parvins à retirer encore de cette eau mère quelques cristaux d'alun pur, & de vitriol de Mars: la couleur peu foncée de ces derniers, & leur goût stiptique, prouvoient assez que ce n'étoit qu'un mélange de ces deux sels, & que l'alun même y étoit le dominant. Ce qui me restoit de la liqueur se coagula de nouveau: je fis différens essais pour la ramener au point de donner des cristaux; mais ce fut en vain, la matière saline s'élevoit constamment le long des parois du vase sans prendre aucune forme régulière. J'eus recours alors aux intermèdes; mais ne voulant employer ni alkali fixe, ni alkali volatil, pour ne pas trouver un sujet d'erreur dans les dernières cristallisations, j'étendis l'eau mère dans deux onces d'eau distillée, & j'y ajoutai quelques grains de craie en poudre: il se fit une effervescence; la craie, devenue sélénite, se précipita, entraînant avec elle une petite portion de terre martiale. Cette dernière liqueur, qui, filtrée, avoit une couleur rousse, ayant été concentrée par une évaporation lente, donna jusqu'à la fin des cristaux d'alun, sans qu'il me fût possible d'apercevoir un seul cristal de sel de sedlitz, autre sel vitriolique que je soupçonnois devoir être dans cette liqueur, d'après un grand nombre d'expériences qui m'ont appris que les terres, l'alumineuse & la sedlitzienne, se trouvent très-souvent ensemble dans des schistes de différentes espèces.

Il résulte de l'analyse du Marbre Campan vert par l'acide vitriolique ,

1.^o Que les deux onces employées ont fourni , en se vitriolisant , une quantité de terre calcaire suffisante pour former une once six gros trente grains de sélénite.

2.^o Qu'il s'est trouvé dans ces deux onces , cinq gros trente-trois grains de schiste.

3.^o Que ce dernier a fourni une quantité suffisante de fer , pour former douze à treize grains de vitriol martial , & environ cinq grains de terre ochreuse qui s'est séparée d'elle-même pendant l'évaporation.

4.^o Qu'il s'y est également trouvé une quantité suffisante de terre alumineuse , pour former au moins cinquante-quatre grains d'alun.

Je n'ai rien négligé pour m'assurer que le sel de sedlitz n'existoit pas dans la dissolution du Marbre de Campan par l'acide vitriolique ; c'étoit le principal but de toutes les tentatives que j'ai faites pour mettre les dernières portions de liqueur en état de donner d'elles-mêmes des cristaux réguliers ; & quand enfin j'ai été contraint d'avoir recours à un intermède , je me suis servi de la craie , qui , formant avec l'acide vitriolique un sel peu soluble & d'ailleurs facile à distinguer , ne m'exposoit à aucune erreur : d'où je crois pouvoir conclure que la terre qui fait la base du sel de sedlitz n'existe pas dans le schiste qui se rencontre dans notre marbre.

Analyse du Marbre Campan rouge par l'acide vitriolique.

QUATRIÈME PROCÉDÉ.

AYANT également traité par l'acide vitriolique deux onces de Marbre rouge de Campan , j'en ai obtenu une once sept gros quarante-deux grains de vitriol calcaire , de couleur blanche tirant sur le rouge ; il est resté dans la capsule où se faisoit l'opération , deux gros & demi de schiste absolument décoloré & en
petits

petits fragmens, parmi lesquels on en distinguoit un de la grosseur d'une petite noisette, dont la surface étoit hérissée de pyrites martiales; on en appercevoit aussi quelques-unes dans le schiste pulvérulent, avec lequel elles n'avoient plus d'adhérence.

Les différens arrosemens d'acide vitriolique, & les lavages avec l'eau distillée, m'avoient donné douze onces de liqueur alumino-vitriolique, de laquelle j'ai retiré trente-sept grains d'alun & quarante-cinq grains de vitriol vert; il s'est séparé, pendant l'évaporation, sept grains de terre martiale.

Ce quatrième procédé confirme les différences déjà observées dans nos marbres, lors de leur analyse par l'acide nitreux; il y a constamment plus de schiste dans le marbre vert que dans le marbre rouge, & plus de fer dans celui-ci que dans le premier.

Quoiqu'il soit hors de mon sujet de m'étendre sur le sel séléniteux que j'ai obtenu en traitant le Marbre de Campan avec l'acide vitriolique, je ne peux cependant m'empêcher de dire que ce sel, qu'on nomme sélénite, que j'ai appelé quelquefois vitriol calcaire, & qu'on pourroit aussi nommer sel gypseux, gypse artificiel, ou simplement gypse, étant cuit comme la pierre à plâtre pulvérisé & gâché avec une suffisante quantité d'eau, a été plus de deux heures à prendre corps; mais qu'enfin il est devenu, en moins de douze ou quinze heures, aussi dur que le meilleur plâtre, ce qui n'arrive pas toujours au gypse artificiel. Je dois aussi faire remarquer que le sel séléniteux, fourni par le marbre vert, perdit, pendant sa calcination, sa couleur blanche, qui se changea en rouge briqueté; effet qu'on doit attribuer à un peu de vitriol martial, & à quelques portions de schiste des plus tenues, qui étoient restées dans le sel séléniteux.

Il résulte des expériences dont l'Académie a bien voulu entendre la lecture, 1.^o que le Marbre vert de Campan est un marbre mixte ou composé, que c'est enfin un mélange de marbre & de schiste. 2.^o Que les parties véritablement marbre sont les dominantes. 3.^o Que le schiste qui les accompagne,

410 EXAM. CHIMIQ. DU MARBRE DE CAMPAN.

contient , ainsi que toutes les pierres de ce genre que j'ai jusqu'ici examinées , une quantité remarquable de terre aluminieuse & de fer. 4.^o Que c'est au fer minéralisé avec le schiste , qu'est due la couleur verte qui distingue le marbre dont je parle.

Quant aux portions de marbre rouge qui se rencontrent dans le marbre vert , nous avons vu qu'elles doivent leur couleur à un safran de Mars , dispersé sous la forme d'une poudre fine entre toutes les parties de la terre calcaire ; d'où il faut conclure que le fer qui est uni au Marbre de Campan , s'y trouve dans deux états très-différens. Dans le marbre vert il est minéralisé avec le schiste , de manière qu'il a conservé la propriété d'être entièrement dissous par les acides , sans en excepter même celui de nitre , qui , comme on sait , n'a pas d'action sur le fer déflagistiqué : dans le marbre rouge au contraire , ce métal est dans un état de safran de Mars ou de chaux martiale , qui , dispersée entre toutes les parties de la terre calcaire , leur communique sa couleur en leur adhérant fortement , mais sans avoir subi avec elle de combinaison intime : ce safran de Mars n'est point du tout soluble dans l'acide nitreux , & par-là le Chimiste trouve un moyen sûr & facile de le séparer entièrement de la terre calcaire , sous sa forme pulvérulente & sans altérer sa couleur , ainsi qu'il est prouvé par le second de mes Procédés.

Quand on traite notre marbre rouge avec l'acide vitriolique , il n'est pas possible de séparer & de mettre , pour ainsi dire , à nu le safran de Mars ; il perd , à la vérité , son adhérence à la terre calcaire ; mais comme celle-ci se change , par sa combinaison avec l'acide , en un sel qui cristallise à l'instant même de sa formation , le safran de Mars recouvrant son état pulvérulent , se mêle entre les parties du nouveau corps salin , & lui communique cette teinte rouge qu'on remarque dans le sel vitriolico-calcaire , obtenu par le quatrième Procédé.

Telles sont les expériences que j'ai faites sur le Marbre de Campan ; telles sont les conséquences que j'en ai tirées : je soumetts les unes & les autres au jugement de l'Académie.



RECHERCHES

SUR

L'ATTRACTION

DES

SPHÉROÏDES HOMOGÈNES,

PAR M. LE GENDRE.

M. MACLAURIN est le premier qui ait déterminé l'attraction d'un Sphéroïde elliptique pour les points situés dans son intérieur ou à sa surface. Les propositions qu'il a établies à ce sujet, & d'où résulte une solution si simple du problème de la figure de la Terre, servent de base à son excellente Pièce sur le Flux & le Reflux de la Mer, & sont connues de tous les Géomètres. Le même Auteur a considéré aussi l'attraction des Sphéroïdes elliptiques sur les points situés au dehors; mais il s'est borné aux points situés sur l'axe ou sur l'équateur pour les Sphéroïdes de révolution, & seulement aux points placés dans la direction d'un des trois axes, lorsque le Sphéroïde a toutes ses coupes elliptiques. Ces deux objets se trouvent compris dans un théorème remarquable, dont M. Maclaurin

F ff ij

donne l'énoncé, art. 653 de son *Traité des Fluxions*; théorème dont MM. d'Alembert & de la Grange ont donné depuis la démonstration; le premier, dans les *Mémoires de Berlin*, année 1774, & dans le tome VII de ses *Opuscules*; le second, dans les *Mémoires de Berlin*, année 1775.

Il ne paroît pas que les Géomètres aient poussé plus loin leurs recherches sur cette matière intéressante; car, quoique M. de la Grange ait considéré le problème dans toute sa généralité (*Mém. de Berlin*, année 1773), l'intégration n'a réussi à ce grand Géomètre que dans les cas déjà résolus par M. Maclaurin. C'est dans la vûe de concourir à la perfection de cette théorie, que j'ai entrepris les Recherches dont je vais rendre compte.

Pour reprendre cette matière au point où M. Maclaurin l'a laissée, je commence par donner une démonstration nouvelle du théorème déjà cité. Ma méthode paroît avoir l'avantage d'être directe, & de conduire à une expression fort simple de la valeur absolue de l'attraction.

Je considère ensuite l'attraction d'un Sphéroïde de révolution sur un point quelconque situé au dehors, en supposant le méridien de figure quelconque, pourvu que l'équateur le divise en deux parties égales & semblables. Au moyen d'une décomposition analytique, dont la démonstration fait une partie considérable de ce Mémoire, je parviens à un théorème nouveau, suivant lequel l'attraction d'un Sphéroïde étant supposée connue pour les points situés dans le prolongement de son axe, j'en déduis aussi-tôt l'attraction qui a lieu pour tout autre point.

L'application de ce théorème aux Sphéroïdes elliptiques de révolution, conduit à une valeur absolue de l'attraction, aussi simple pour un point quelconque situé au dehors, que pour un point situé à sa surface.

La méthode que j'ai suivie n'étant point applicable aux Sphéroïdes qui ne sont pas de révolution, je n'en ai tiré aucune conclusion pour ceux dont toutes les coupes sont elliptiques. J'ai cependant lieu de croire que, relativement à

ces derniers, on peut généraliser ainsi le théorème de M. Maclaurin. *L'attraction d'un tel Sphéroïde sur un point situé au dehors, est égale à celle d'un autre Sphéroïde de même masse, dont les ellipses principales auroient les mêmes foyers, & dont la surface passeroit par le point attiré.* J'aurois pu insérer ici quelques tentatives que j'ai faites pour la démonstration de ce théorème; mais comme elles n'ont pas eu un succès complet, j'ai mieux aimé m'en tenir au simple énoncé.

Démonstration du Théorème de M. Maclaurin.

1. Il s'agit de déterminer l'attraction d'un Sphéroïde, dont toutes les coupes sont elliptiques, sur un point S placé dans le prolongement d'un de ses trois axes à la distance $CS=r$. FIGURE II.

On fait qu'un tel Sphéroïde a trois axes principaux, perpendiculaires entre eux. J'appelle a le demi-axe CA qui est dans la direction du point S; b & c , les deux autres demi-axes CG & CE. L'équation de la surface du Sphéroïde sera $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; x , y , z étant les coordonnées d'un même point, parallèles aux demi-axes a , b , c , & comptées du centre. Ayant fait passer par le point S le plan ACE qu'on peut appeler l'équateur, quoiqu'il soit elliptique, je mène le plan SMI perpendiculaire à l'équateur. Il en résulte la section elliptique LMI, dans le plan de laquelle je mène les rayons infiniment proches Sm , Sm' . Si on imagine ensuite que le plan SMI décrive un angle infiniment petit autour de l'axe SO parallèle à CG, le trapèze $MM'nm$ décrira une pyramide tronquée, dont l'attraction sur le point S sera $Mm \times d\psi \cos^2 \phi$, en appelant l'angle ASL, ψ , & l'angle LSM, ϕ . Cette attraction agit suivant SM; on aura donc, suivant SC, la force $Mm d\psi \cos^2 \phi \cos^2 \psi$. Substituant la valeur de Mm qu'on tire facilement de la nature du solide, on a l'attraction élémentaire

$$\frac{2abc d\phi d\psi \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{a^2 c^2 \sin^2 \phi + a^2 b^2 \cos^2 \phi \sin^2 \psi + b^2 c^2 \cos^2 \psi \cos^2 \phi}$$

$$\sqrt{[(a^2 - r^2) c^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi (a^2 \sin^2 \psi + c^2 \cos^2 \psi - r^2 \sin^2 \psi)]}$$

qu'il faut intégrer deux fois par rapport à ϕ & ψ .

2. Cette formule n'est point intégrable par rapport à ϕ , mais elle l'est par rapport à ψ . Je lui donne la forme $\frac{M a \psi \cos \psi}{1 + a \sin^2 \psi} \sqrt{(A^2 - B^2 \sin^2 \psi)}$; & comme cette différentielle doit être intégrée depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\sin \psi = \frac{A}{B}$, je fais $\sin \psi = \frac{A}{B} \sin \zeta$, & j'ai la transformée $\frac{M A^2}{B} \cdot \frac{d \zeta \cos^2 \zeta}{1 + \frac{A^2 a}{B^2} \sin^2 \zeta}$

à intégrer depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = 90^\circ = \frac{1}{2} \pi$. On trouve, par les méthodes connues, l'intégrale $\frac{M B}{a} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \frac{A^2 a}{B^2}} - \frac{\pi}{2} \right)$. Doubant & substituant, on aura la différentielle

$\frac{2 \pi a c r}{a^2 - c^2} d \phi \cos \phi \left[\sqrt{\left(\frac{c^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} \right)} - \sqrt{\left(\frac{r^2 + a^2 - c^2}{r^2} \right)} \right]$
 qu'il faut encore intégrer pour toutes les valeurs de ϕ . Or, en faisant $\psi = 0$ dans la valeur de $M m$, & égalant cette valeur à zéro, on aura, pour déterminer la limite de ϕ , $\sin^2 \phi = \frac{b^2}{r^2 + b^2 - a^2}$; soit donc $\sin \phi = \frac{b \sin \theta}{\sqrt{r^2 + b^2 - a^2}}$, on aura, en substituant, doublant & introduisant la masse du Sphéroïde M à la place de son volume $\frac{4 \pi a b c}{3}$,
 $\frac{3 M r}{(a^2 - c^2) \sqrt{r^2 + b^2 - a^2}} d \theta \cos \theta \left[\sqrt{\left(\frac{r^2 + b^2 - a^2 + (c^2 - b^2) \sin^2 \theta}{r^2 + b^2 - a^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} \right)} - \sqrt{\left(\frac{r^2 + c^2 - a^2}{r^2} \right)} \right]$, différentielle qui doit être intégrée depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 90^\circ$, pour donner l'attraction en S' .

3. Cette différentielle n'est pas intégrable exactement, à moins que deux des quantités a , b , c ne soient égales entre elles, ce qui est le cas des Sphéroïdes de révolution. Mais une conséquence très-remarquable, qui se déduit de cette formule, c'est qu'on peut changer les axes du Sphéroïde, pourvu que les foyers des ellipses principales ne changent pas, & les attractions de ces différens Sphéroïdes seront entre elles comme leurs masses. Car les quantités $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$ restant les mêmes, il n'y aura de variable, dans la formule précédente,

que la quantité M . C'est précisément en cela que consiste le Théorème de M. Maclaurin, dont voici l'énoncé :

Si deux Sphéroïdes ont leurs trois sections principales décrites des mêmes foyers, leurs attractions sur un même point situé dans le prolongement d'un des trois axes, seront entre elles comme leurs masses.

4. Pour déterminer maintenant la valeur absolue de l'attraction, j'observe qu'en vertu du Théorème précédent on peut faire $r=a$, puisque le cas où le point attiré est à la surface du Sphéroïde, conduit à la solution de tous les autres. Cette supposition réduit ma différentielle à la forme

$$-\frac{3Ma}{b(a^2-c^2)} d\theta \cos\theta \left[\sqrt{\left(\frac{b^2 + (c^2-b^2)\sin^2\theta}{b^2 + (a^2-b^2)\sin^2\theta} \right)} - \frac{c}{a} \right];$$

mais il se présente ici une difficulté dont il est bon de donner la solution avant d'aller plus loin.

5. Puisque a est le demi-axe du Sphéroïde qui est dans la direction du point attiré, & que b & c sont les deux autres demi-axes, il doit être indifférent de changer b & c l'un dans l'autre, & la valeur de l'attraction doit toujours être la même. Cependant notre formule ne paroît pas se prêter à ce changement. Pour examiner la chose de plus près, je commence par simplifier ma différentielle en faisant

$$\begin{aligned} \sin\theta &= x \\ b^2 &= a^2(1-\epsilon) \\ c^2 &= a^2(1-\gamma), \end{aligned}$$

elle devient

$$\frac{3M}{a^2} \cdot \frac{dx}{\gamma\sqrt{1-\epsilon}} \left[\sqrt{\left(\frac{1-\epsilon + (\epsilon-\gamma)x^2}{1-\epsilon + \epsilon x^2} \right)} - \sqrt{1-\gamma} \right];$$

nouvelle expression où il faut que ϵ & γ soient permutables, lorsqu'on aura intégré depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Soit encore

$$\frac{x^2}{1-\epsilon + \epsilon x^2} = \zeta^2, \text{ on aura } \frac{3M}{a^2} \left[\int \frac{d\zeta \sqrt{1-\gamma\zeta^2}}{\gamma(1-\epsilon\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{1-\gamma}}{\gamma\sqrt{1-\epsilon}} \right],$$

& l'intégration qui reste à effectuer doit toujours être prise

entre les limites $z = 0$, $z = 1$. Mais en différenciant la quantité $\frac{z\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{\sqrt{(1-\epsilon z^2)}}$, on a $\frac{d\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\epsilon z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\gamma z^2 dz}{\sqrt{(1-\epsilon z^2)} \cdot \sqrt{(1-\gamma z^2)}}$;

donc $\int \frac{d\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\epsilon z^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\gamma z^2 dz}{\sqrt{(1-\epsilon z^2)} \cdot \sqrt{(1-\gamma z^2)}} = \frac{z\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{\sqrt{(1-\epsilon z^2)}}$,

& en prenant ces intégrales depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, on aura

$$\int \frac{d\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\epsilon z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{(1-\gamma)}}{\sqrt{(1-\epsilon)}} = \gamma \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-\epsilon z^2)} \cdot \sqrt{(1-\gamma z^2)}};$$

donc l'attraction cherchée sera $\frac{3}{a^2} \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-\epsilon z^2)} \cdot \sqrt{(1-\gamma z^2)}}$,

quantité où il est clair maintenant que ϵ & γ sont permutables l'une dans l'autre.

6. La formule de l'attraction étant réduite à cette forme très-simple, on effectuera l'intégration en développant le produit

$$z^2 dz \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \epsilon^2 z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \epsilon^3 z^6 + \&c. \right) \left(1 + \frac{1}{2} \gamma z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \gamma^2 z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \gamma^3 z^6 + \&c. \right);$$

or un terme quelconque de ce produit pouvant être représenté par

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \epsilon^m \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \gamma^n z^{2m+2n+2} dz,$$

son intégrale sera

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\epsilon^m \gamma^n}{2m+2n+3};$$

donc l'attraction demandée sera exprimée par cette suite dont la loi est manifeste :

$$\begin{aligned} \frac{3}{a^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon + \gamma}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\epsilon^2 + \gamma^2}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\epsilon^3 + \gamma^3}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\epsilon^4 + \gamma^4}{11} + \&c. \right] \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon \gamma}{7} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon^2 \gamma + \epsilon \gamma^2}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon^3 \gamma + \epsilon \gamma^3}{11} \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{11}. \end{aligned}$$

Telle est l'attraction d'un Sphéroïde elliptique, qui a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, sur un point placé à l'extrémité du demi-axe

semi-axe a , les quantités ϵ & γ étant $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ & $\frac{a^2 - c^2}{a^2}$, & pouvant être positives ou négatives à volonté. On en déduit facilement, par le théorème ci-dessus, la valeur de l'attraction pour tout autre point placé dans le prolongement d'un des trois axes à une distance quelconque r du centre. Il suffit de mettre r à la place de a dans la formule précédente, sans changer la valeur des quantités $a^2 - b^2$ & $a^2 - c^2$. On prendra donc $\epsilon = \frac{a^2 - b^2}{r^2}$, $\gamma = \frac{a^2 - c^2}{r^2}$, & l'attraction à la distance r , sur le prolongement du demi-axe a , fera

$$\frac{3}{r^2} M \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon + \gamma}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\epsilon^2 + \gamma^2}{7} + \&c. \right].$$

7. Suivant la remarque que nous venons de faire, l'attraction à la distance r sera généralement $\frac{3}{r^2} M \int \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1 - \epsilon \xi^2)} \cdot \sqrt{(1 - \gamma \xi^2)}}$, les quantités ϵ & γ désignant $\frac{a^2 - b^2}{r^2}$ & $\frac{a^2 - c^2}{r^2}$. Cette formule devient intégrable lorsque le Sphéroïde est de révolution. Soit, par exemple, $c = a$, on aura $\gamma = 0$, & l'intégrale sera

$$\frac{M}{r^2} \left[\frac{\theta - \frac{1}{2} \sin. 2\theta}{\frac{2}{3} \sin. 3\theta} \right], \text{ en prenant l'angle } \theta \text{ tel que } \sin. \theta = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{r}.$$

Cette formule donne l'attraction d'un point situé dans le plan de l'équateur du Sphéroïde à la distance r du centre.

8. Si, pour le même Sphéroïde dont a est le rayon de l'équateur, & b le demi-axe, on demande l'attraction dans le prolongement de l'axe, il faudra d'abord changer a en b l'un dans l'autre, puis faire $a = c$, ce qui donnera $\epsilon = \gamma = -\left(\frac{a^2 - b^2}{r^2}\right)$.

Je prends $\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{r} = \text{tang. } \lambda$, & la quantité à intégrer devient $\frac{3}{r^2} M \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \xi^2 \text{tang.}^2 \lambda}$; d'où résulte l'attraction dans le prolongement de l'axe $\frac{M}{r^2} \left[\frac{\text{tang. } \lambda - \lambda}{\frac{1}{3} \text{tang.}^3 \lambda} \right]$.

Ces résultats sont parfaitement d'accord avec ceux de M. Maclaurin. Il est inutile d'avertir que les angles θ & λ ne sont réels qu'autant que le Sphéroïde est applati ; s'il étoit alongé , on auroit , dans les formules précédentes , des logarithmes à la place des arcs de cercle.

De l'attraction des Sphéroïdes de révolution , quelle que soit la figure du méridien.

FIGURE 3.

9. Soit $BA b$ le méridien qui passe par le point attiré S ; BC , l'axe du Sphéroïde ; $A a$ son équateur qui divise le méridien en deux parties égales & semblables AB , $A b$. D'un point quelconque M du Sphéroïde , j'abaisse $M Q$ perpendiculaire sur le méridien $BA b$; & suivant $M Q$, je mène les plans triangulaires $M Q P$, $M Q O$ perpendiculaires aux droites CB , CS . Je fais $CS = r$, $BCS = \omega$, $CM = \zeta$, $BCM = \psi$, $MPQ = \theta$, $MCS = \mu$, d'où je tire $MS^2 = r^2 - 2 r \zeta \cos. \mu + \zeta^2$, & $\cos. \mu = \cos. \omega \cos. \psi + \sin. \omega \sin. \psi \cos. \theta$. Cela posé , la particule $d M$, située en M , exercera sur le point S les deux attractions suivantes dirigées dans le plan du méridien.

$$\text{Suivant } SC \dots\dots\dots (P) = \int \frac{(r - \zeta \cos. \mu) d M}{(r^2 - 2 r \zeta \cos. \mu + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{Suiv. } SV \text{ perp. à } SC (Q) = \int \frac{(\cos. \psi \sin. \omega - \cos. \omega \sin. \psi \cos. \theta) \zeta d M}{(r^2 - 2 r \zeta \cos. \mu + \zeta^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Quant à l'expression de la particule $d M$, on peut la faire dépendre de variables bien différentes , & le choix de ces variables contribue beaucoup à faciliter les intégrations. D'après celles que nous avons adoptées pour déterminer la position du point M , savoir ζ , ψ & θ , on aura $d M = \zeta^2 d \zeta d \theta d \psi \sin. \psi$. On commencera donc par intégrer , par rapport à ζ , depuis le centre jusqu'à la surface du solide ; on prendra ensuite les deux autres intégrales par rapport à θ & ψ entre les limites 0 & 180°. Nous verrons que les deux premières intégrations , par rapport à ζ & θ , peuvent s'effectuer sans connoître la figure du méridien.

dien, & c'est ce qui conduit au Théorème que nous avons annoncé.

10. Pour évaluer la force (P), je considère d'abord la différentielle $\frac{(r - z \cos \mu) z^2 dz}{(r^2 - 2 r z \cos \mu + z^2)^{3/2}}$, & je la réduis ensuite, quoiqu'on

la puisse intégrer exactement par les méthodes connues. Mon but est de simplifier par-là les intégrations ultérieures; d'ailleurs, la méthode des suites n'est pas moins rigoureuse qu'une autre, tant que la loi permet de les continuer sans difficulté aussi loin qu'on veut. J'aurai donc, en rejetant les puissances impaires de z ,

$\frac{z^2 dz}{r^2} \left[1 + 3 A. \frac{z^2}{r^2} + 5 B. \frac{z^4}{r^4} + 7 C. \frac{z^6}{r^6} + \&c. \right]$, & les coefficients A, B, C, &c. seront les fonctions suivantes de $\cos \mu$,

$$A = \frac{3}{2} \cos^2 \mu - \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \mu - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \mu + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$$

$$C = \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \mu - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \mu + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \mu - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$D = \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cos^8 \mu - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} 4 \cos^6 \mu + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} 6 \cos^4 \mu - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} 4 \cos^2 \mu + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \&c.$$

L'intégrale de cette suite, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \pm CN$, que j'appelle Z, sera

$$\frac{2 Z^3}{r^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{3 A}{5} \cdot \frac{Z^2}{r^2} + \frac{5 B}{7} \cdot \frac{Z^4}{r^4} + \frac{7 C}{9} \cdot \frac{Z^6}{r^6} + \&c. \right].$$

11. Nous avons maintenant à intégrer la différentielle

$$\frac{2 Z^3}{r^2} d\theta d\psi \sin \psi \left[\frac{1}{3} + \frac{3 A}{5} \cdot \frac{Z^2}{r^2} + \frac{5 B}{7} \cdot \frac{Z^4}{r^4} + \&c. \right]$$

par rapport à θ ; & comme Z est une fonction de ψ seul, donnée par la figure du méridien, il suffira d'intégrer les termes $d\theta$, $A d\theta$, $B d\theta$, &c. entre les limites $\theta = 0$, $\theta = 180^\circ$. On substituera donc, dans les quantités A, B, C, &c. pour $\cos \mu$, la valeur $\cos \omega \cos \psi + \sin \omega \sin \psi \cos \theta$, & supposant

$$P' = \cos^2 \omega \cos^2 \downarrow + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} \sin^2 \omega \sin^2 \downarrow,$$

$$P'' = \cos^4 \omega \cos^4 \downarrow + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cos^2 \omega \cos^2 \downarrow \sin^2 \omega \sin^2 \downarrow \\ + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \sin^4 \omega \sin^4 \downarrow,$$

$$P''' = \cos^6 \omega \cos^6 \downarrow + \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cos^4 \omega \cos^4 \downarrow \sin^2 \omega \sin^2 \downarrow \\ + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \cos^2 \omega \cos^2 \downarrow \sin^4 \omega \sin^4 \downarrow \\ + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \sin^6 \omega \sin^6 \downarrow \&c.$$

ensuite

$$A' = \frac{3}{2} P' - \frac{1}{2},$$

$$B' = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} P'' - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 P' + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4},$$

$$C' = \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} P''' - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 P'' + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 P' - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \&c.$$

On aura $\int d\theta = \pi$, $\int A d\theta = A' \pi$, $\int B d\theta = B' \pi$ &c.
& l'intégrale cherchée sera

$$\frac{2\pi Z^3 d\downarrow \sin \downarrow}{r^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{3A'}{5} \cdot \frac{Z^2}{r^2} + \frac{5B'}{7} \cdot \frac{Z^4}{r^4} + \&c. \right].$$

12. Avant de passer à la dernière intégration, je remarque que les quantités A' , B' , C' , &c. peuvent se décomposer en fonctions séparées de ω & de \downarrow , comme il suit :

$$A' = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \downarrow - \frac{1}{2} \right).$$

$$B' = \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \downarrow - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \downarrow + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right).$$

$$C' = \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \omega - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \downarrow - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \downarrow + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \downarrow - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \&c.$$

Ce Théorème algébrique que nous démontrerons plus loin, va nous offrir des conséquences utiles.

13. Soient prises les intégrales suivantes depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 90^\circ$, je les représente par $3M$, $3M\alpha$, $3M\epsilon$, &c. M étant la masse du Sphéroïde.

$$3M = 4\pi \int Z^3 d\psi \sin. \psi.$$

$$3M\alpha = 4\pi \int Z^5 d\psi \sin. \psi \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right).$$

$$3M\epsilon = 4\pi \int Z^7 d\psi \sin. \psi \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \psi - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot 2 \cos^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right).$$

$$3M\gamma = 4\pi \int Z^9 d\psi \sin. \psi \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \psi - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \psi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \psi - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \&c. \&c.$$

& l'attraction (P) dirigée vers le centre du Sphéroïde, sera exprimée par cette formule très-simple :

$$(P) = \frac{3M}{r^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{3\alpha}{5r^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2} \right) + \frac{5\epsilon}{7r^4} \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot 2 \cos^2 \omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \right. \\ \left. + \frac{7\gamma}{9r^6} \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \omega - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \&c. \right],$$

dans laquelle les quantités α , ϵ , γ , &c. ne dépendent que de la figure du méridien.

14. Par des calculs semblables, on détermineroit la force (Q) en intégrant trois fois la quantité

$$\frac{(\sin. \omega \cos. \psi - \cos. \omega \sin. \psi \cos. \theta) r dM}{(r^2 - 2r\chi \cos. \mu + \chi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

mais on y parvient bien plus facilement à l'aide d'un Théorème que M. de la Place a bien voulu me communiquer : voici en quoi il consiste.

Soit V la somme des particules du corps, divisées par leurs distances au point attiré, c'est-à-dire $V = \int \frac{dM}{(r^2 - 2r\chi \cos. \mu + \chi^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Cette seule intégrale suffira pour déterminer, par ses diffé-

ances partielles, les deux forces (P) & (Q), & on en conclura

$$(P) = -\frac{dV}{dr}, (Q) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{d\omega}.$$

Ce Théorème se démontre facilement par la différentiation sous le signe; en observant que

$$\frac{d \cos \mu}{d\omega} = \frac{d(\cos \omega \cos \psi + \sin \omega \sin \psi \cos \theta)}{d\omega} = -\sin \omega \cos \psi + \cos \omega \sin \psi \cos \theta,$$

d'où résulte

$$-\frac{dV}{dr} = \int \frac{(r - \chi \cos \mu) dM}{(r^2 - 2r\chi \cos \mu + \chi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{d\omega} = \int \frac{(\sin \omega \cos \psi - \cos \omega \sin \psi \cos \theta) \chi dM}{(r^2 - 2r\chi \cos \mu + \chi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

valeurs qui sont précisément celles des forces (P) & (Q).

15. De ce que $(P) = -\frac{dV}{dr}$, on tire facilement

$$V = \frac{3M}{r} \left[\frac{1}{3} + \frac{\omega}{5r^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2} \right) + \frac{6}{7r^4} \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) + \&c. \right],$$

& puisque $(Q) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{d\omega}$, nous aurons

$$(Q) = \frac{3M}{r^2} \sin \omega \cos \omega \left[\frac{\omega}{5r^2} \cdot 3 + \frac{6}{7r^4} \left(\frac{5 \cdot 7}{2} \cos^2 \omega - \frac{3 \cdot 5}{2} \right) \right. \\ + \frac{4}{9r^6} \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \right) \\ + \frac{8}{11r^8} \left(\frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \omega - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \omega \right. \\ \left. \left. + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \omega - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \&c. \right].$$

16. Ces formules font voir que si on connoît l'attraction pour un point situé sur l'axe du Sphéroïde, on en déduira facilement les deux attractions qui ont lieu pour tout autre point. En effet, que l'attraction pour un point situé sur l'axe à la distance r du centre, soit donnée par la formule

$$\frac{M_2}{r^2} \left[1 + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^4} + \frac{C}{r^6} + \&c. \right],$$

& les deux forces (P) & (Q) auxquelles se réduit l'attraction

du Sphéroïde sur un point quelconque, auront pour valeurs

$$(P) = \frac{M}{r^2} \left[1 + \frac{A}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2} \right) + \frac{B}{r^4} \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \right. \\ \left. + \frac{C}{r^6} \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \omega - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \&c. \right].$$

$$(Q) = \frac{M \sin \omega \cos \omega}{r^2} \left[\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^4} \left(\frac{5 \cdot 7}{2} \cos^2 \omega - \frac{3 \cdot 5}{2} \right) + \frac{C}{r^6} \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \right) + \frac{D}{r^8} \left(\frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \omega - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \omega - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \&c. \right].$$

Cela suppose que lorsque $\omega = 0$, les quantités $\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2}$, $\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$, &c. sont égales à l'unité; on peut le démontrer de plusieurs manières, & notamment par la théorie des différences.

17. Si on aime mieux exprimer l'attraction pour un point quelconque par deux forces X & Y parallèles à l'axe & à l'équateur, il faudra substituer les valeurs de (P) & de (Q) dans les formules $X = (P) \cos \omega - (Q) \sin \omega$ & $Y = (P) \sin \omega + (Q) \cos \omega$, & on trouvera

$$X = \frac{M \cos \omega}{r^2} \left[\frac{A}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2} \right) + \frac{B}{r^4} \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \omega + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \right) \right. \\ \left. + \frac{C}{r^6} \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \omega - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \&c. \right].$$

$$Y = \frac{M \sin \omega}{r^2} \left[1 + \frac{A}{r^2} \left(\frac{3 \cdot 5}{2} \cos^2 \omega - \frac{1 \cdot 3}{2} \right) + \frac{B}{r^4} \left(\frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \omega + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \right) \right. \\ \left. + \frac{C}{r^6} \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \omega - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \omega + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \omega \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \&c. \right].$$

Application du Théorème de l'art. 16 aux Sphéroïdes elliptiques de révolution.

18. Nous avons trouvé (art. 8.) que l'attraction d'un point

situé dans le prolongement de l'axe , étoit $\frac{M}{r^2} \left[\frac{\text{tang. } \lambda - \lambda}{\frac{1}{3} \text{ tang.}^3 \lambda} \right]$,

en supposant $\text{tang. } \lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{r}$. Réduisant cette quantité ensuite , & faisant $a^2 - b^2 = c^2$, on aura

$$\frac{M}{r^2} \left[1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{c^2}{r^2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{c^4}{r^4} - \frac{3}{9} \cdot \frac{c^6}{r^6} + \&c. \right];$$

donc les deux attractions X & Y , pour un point quelconque , seront

$$X = \frac{M \cos. \omega}{r^2} \left[1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{5}{2} \cos.^2 \omega - \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{7} \cdot \frac{c^4}{r^4} \left(\frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 4} \cos.^4 \omega - \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} 2 \cos.^2 \omega + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \right) - \&c. \right].$$

$$Y = \frac{M \sin. \omega}{r^2} \left[1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{3 \cdot 5}{2} \cos.^2 \omega - \frac{1 \cdot 3}{2} \right) + \frac{3}{7} \cdot \frac{c^4}{r^4} \left(\frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4} \cos.^4 \omega - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4} 2 \cos.^2 \omega + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \right) - \&c. \right].$$

La loi de ces expressions permet de les continuer aussi loin qu'on veut ; mais comme elles ne contiennent d'autre fonction de a & de b que c^2 ou $a^2 - b^2$ qui est le carré de l'excentricité , on en tire une propriété très-remarquable , qui donne bientôt les valeurs de X & Y en termes finis :

Si un même point est attiré par deux Sphéroïdes dont les ellipses génératrices ont les mêmes foyers , les attractions de ces Sphéroïdes auront la même direction , & seront entre elles comme leurs masses.

FIGURE 2. 19. On peut donc substituer au Sphéroïde B A b un autre Sphéroïde de même masse \mathcal{E} S α qui passe par le point S , & l'attraction fera la même dans les deux cas. Il faut seulement que les deux ellipses B A b , \mathcal{E} α \mathcal{E}' soient décrites des mêmes foyers , & qu'elles fassent leur révolution autour de la même ligne C \mathcal{E} . Soit α l'attraction du Sphéroïde \mathcal{E} S α au point α de son équateur , & \mathcal{E} son attraction au pôle , on aura , suivant les principes de M. Maclaurin , les deux attractions du point S dans les directions S D & S E.

$$X = \frac{CE}{C\mathcal{E}^2} \cdot \mathcal{E}, \quad Y = \frac{CD}{Ca} \cdot \alpha.$$

Pour avoir ces valeurs analytiquement , je suppose , comme le représente

représente la Figure, que Aa est le grand axe de l'ellipse BAb , & F l'un de ses foyers, qui sera aussi celui de l'ellipse CSa . J'appelle Ca , A ; Cl , B , & j'ai les deux équations

$$A^2 - B^2 = a^2 - b^2 = c^2,$$

$$r^2 \sin^2 \omega = \frac{A^2}{B^2} (B^2 - r^2 \cos^2 \omega),$$

d'où l'on tire

$$A = \sqrt{\left[\frac{r^2 + c^2 + \sqrt{(r^4 + 2r^2 c^2 \cos^2 \omega + c^4)}}{2} \right]}.$$

$$B = \sqrt{\left[\frac{r^2 - c^2 + \sqrt{(r^4 + 2r^2 c^2 \cos^2 \omega + c^4)}}{2} \right]}.$$

J'appelle l'angle ECF , λ , ce qui donne $\tan \lambda = \frac{C}{B}$, $\sin \lambda = \frac{C}{A}$.

Les attractions α & ℓ sont donc, par les formules des art. 7 & 8,

$$\alpha = \frac{M}{A^2} \left(\frac{\lambda - \frac{1}{2} \sin 2\lambda}{\frac{2}{3} \sin^3 \lambda} \right)$$

$$\ell = \frac{M}{B^2} \left(\frac{\tan \lambda - \lambda}{\frac{1}{3} \tan^3 \lambda} \right),$$

d'où l'on déduit les deux attractions X & Y au point S en termes finis, savoir :

$$X = \frac{3}{c^3} M r \cos \omega (\tan \lambda - \lambda).$$

$$Y = \frac{3}{c^3} M r \sin \omega \left(\lambda - \frac{1}{2} \sin 2\lambda \right).$$

20. Si nous avions voulu trouver directement l'attraction des Sphéroïdes elliptiques, sans connoître l'attraction dans le prolongement de l'axe, il auroit fallu effectuer les intégrations de l'art. 13. Or la valeur de Z^2 ou CN^2 est dans ce cas $\frac{a^2 b^2}{b^2 + c^2 \cos^2 \psi}$

ou $\frac{c^2 (1+k)}{k(1+k \cos^2 \psi)}$, en faisant $c^2 = b^2 k$; & comme k doit disparaître dans les quantités α , ℓ , γ , &c. il auroit fallu démontrer que les intégrales suivantes, prises depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 90^\circ$, sont indépendantes de k .

Tome X.

H h h

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{1}{2}}}{(1+k \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}}} d\psi \sin \psi.$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{1}{2}}}{k(1+k \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}}} d\psi \sin \psi \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right).$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{5}{2}}}{k^2(1+k \cos^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} d\psi \sin \psi \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \psi - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right).$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{7}{2}}}{k^3(1+k \cos^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} d\psi \sin \psi \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \psi - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^4 \psi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 \cos^2 \psi - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \&c.$$

On trouve en effet que, pour l'identité de nos résultats, ces intégrales doivent être respectivement $+1$, $-\frac{1}{3}$, $+\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{7}$, &c. C'est ce qu'on trouveroit aussi par l'intégration immédiate.

Démonstration du Théorème algébrique de l'art. 12.

21. La théorie précédente ne seroit fondée que sur une induction peu satisfaisante, si nous n'ajoutions pas la démonstration rigoureuse du Théorème algébrique qui lui sert de base. Mettons d'abord sous les yeux l'objet de la question, en la considérant d'une manière purement analytique.

Les quantités P' , P'' , P''' , &c. étant formées suivant cette loi,

$$P' = x^2 y^2 + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} (1-x^2) (1-y^2).$$

$$P'' = x^4 y^4 + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} x^2 y^2 (1-x^2) (1-y^2) + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} (1-x^2)^2 (1-y^2)^2.$$

$$P''' = x^6 y^6 + \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 2} x^4 y^4 (1-x^2) (1-y^2) + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} x^2 y^2 (1-x^2)^2 (1-y^2)^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} (1-x^2)^3 (1-y^2)^3 \&c.$$

on en compose les quantités A' , A'' , A''' , &c. suivant cette nouvelle loi.

$$A' = \frac{3}{2} \cdot P' - \frac{1}{2}.$$

$$A'' = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} P'' - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 P' + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}.$$

$$A''' = \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} P''' - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 P'' + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 P' - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

$$A^{IV} = \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} P^{IV} - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} 4 P''' + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} 6 P'' - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} 4 P' + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \&c.$$

Il faut démontrer que ces quantités A' , A'' , A''' , &c. seront décomposables chacune en deux fonctions séparées de x & de y , & semblables entre elles, de sorte qu'on aura

$$A' = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} y^2 - \frac{1}{2} \right).$$

$$A'' = \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} y^4 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 y^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right).$$

$$A''' = \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 x^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \left(\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} y^6 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 y^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 y^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right), \&c.$$

On peut prouver d'abord que la décomposition des quantités A' , A'' , &c. ne peut pas se faire autrement si elle est possible. Car en admettant qu'elles puissent se partager ainsi en deux fonctions, l'une de x seule, l'autre de y seule, ces deux fonctions doivent être semblables, puisque x & y entrent également dans les quantités P' , P'' , P''' , &c. Elles ont de plus la forme que nous leur avons donnée; car en faisant $y = 1$, A''' , par exemple, devient

$$\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 x^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Cette quantité doit donc être facteur de A''' dans notre hypothèse; & l'autre facteur sera

$$\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} y^6 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 y^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 y^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Il reste à voir si le produit de ces deux facteurs donne

H h h ij

428 RECHERCHES SUR L'ATTRACTION

exactement la quantité A''' , ou s'il ne faut pas les multiplier encore par une quantité constante. Mais on s'assure que cette constante n'a pas lieu, & que le produit est exact, en observant que la quantité $\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$ qu'on a en faisant x & y égales à l'unité, & toutes celles de la même forme sont égales à l'unité, comme nous l'avons déjà dit (art. 16).

22. Il faut donc prouver que chacune des quantités A' , A'' , A''' , &c. est de la forme XY , X étant une fonction de x seule, & Y une fonction semblable de y . Pour simplifier le calcul, à la place de x^2 & de y^2 , je mets $\frac{x^2}{1+x^2}$ & $\frac{y^2}{1+y^2}$, & négligeant les dénominateurs communs, je fais de nouveau

$$P' = x^2 y^2 + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2}$$

$$P'' = x^4 y^4 + \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2} x^2 y^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}$$

$$P''' = x^6 y^6 + \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 2} x^4 y^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} x^2 y^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \&c.$$

d'où je forme les quantités

$$A' = \frac{3}{2} P' - \frac{1}{2} (1+x^2)(1+y^2).$$

$$A'' = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} P'' - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 P' (1+x^2)(1+y^2) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (1+x^2)^2 (1+y^2)^2.$$

$$\begin{aligned} A''' = \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} P''' - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 P'' (1+x^2)(1+y^2) \\ + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3 P' (1+x^2)^2 (1+y^2)^2 \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (1+x^2)^3 (1+y^2)^3 \&c. \end{aligned}$$

Or si ces quantités sont décomposables, comme nous voulons le démontrer, on verra facilement, comme ci-dessus, que la décomposition ne peut avoir lieu que de la manière suivante.

$$A' = \left(x^2 - \frac{2.1}{2.2} \right) \left(y^2 - \frac{2.1}{2.2} \right).$$

$$A'' = \left(x^4 - \frac{4.3}{2.2} x^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4} \right) \left(y^4 - \frac{4.3}{2.2} y^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4} \right).$$

$$A''' = \left(x^6 - \frac{6.5}{2.2} x^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4} x^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6} \right) \left(y^6 - \frac{6.5}{2.2} y^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4} y^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6} \right) \&c.$$

Ce Théorème est renfermé dans le suivant, qui paroît plus facile à démontrer.

Soit $x y = p$, $(1 + x^2)(1 + y^2) = q$, & soient prises les quantités P^0 , P^1 , P^2 , &c. puis A^1 , A^2 , A^3 , &c. (où les nombres 0, 1, 2, 3, &c. désignent des quantités & non des exposans) suivant cette loi.

$$P^0 = 1.$$

$$P^1 = p.$$

$$P^2 = p^2 + \frac{2.1}{2.2}.$$

$$P^3 = p^3 + \frac{3.2}{2.2} p.$$

$$P^4 = p^4 + \frac{4.3}{2.2} p^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}.$$

$$P^5 = p^5 + \frac{5.4}{2.2} p^3 + \frac{5.4.3.2}{2.2.4.4} p.$$

$$P^6 = p^6 + \frac{6.5}{2.2} p^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4} p^2 + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}.$$

&c.

$$A^1 = P^1.$$

$$A^2 = \frac{3}{2} P^2 - \frac{1}{2} q P^0.$$

$$A^3 = \frac{5}{2} P^3 - \frac{3}{2} q P^1.$$

$$A^4 = \frac{5.7}{2.4} P^4 - \frac{3.5}{2.4} 2 q P^2 + \frac{1.3}{2.4} q^2 P^0.$$

$$A^5 = \frac{7.9}{2.4} P^5 - \frac{5.7}{2.4} 2 q P^3 + \frac{3.5}{2.4} q^2 P^1.$$

$$A^6 = \frac{7.9.11}{2.4.6} P^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 q P^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3 q^2 P^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} q^3 P^0.$$

$$A^7 = \frac{9.11.13}{2.4.6} P^7 - \frac{7.9.11}{2.4.6} 3 q P^5 + \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 q^2 P^3 - \frac{3.5.7}{2.4.6} q^3 P^1 \&c.$$

Je dis qu'on aura

$$A^1 = x y.$$

$$A^2 = \left(x^2 - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} \right) \left(y^2 - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} \right).$$

$$A^3 = \left(x^3 - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} x \right) \left(y^3 - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} y \right).$$

$$A^4 = \left(x^4 - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} x^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \right) \left(y^4 - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} y^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \right).$$

$$A^5 = \left(x^5 - \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 2} x^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} x \right) \left(y^5 - \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 2} y^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} y \right).$$

$$A^6 = \left(x^6 - \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 2} x^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} x^2 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \right) \left(y^6 - \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 2} y^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} y^2 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \right) \&c.$$

23. Si cette décomposition est vraie en général, on aura $\frac{dd(A^n)}{dx dy} = n^2 A^{n-1}$, comme il est facile de voir à l'inspection des facteurs précédens. Nous ferons voir d'abord que cette équation a lieu; nous prouverons ensuite que la décomposition de A^n en est une suite nécessaire.

La quantité A^n peut être représentée par la suite

$$A^n = a P^n - b P^{n-2} q + c P^{n-4} q^2 - f P^{n-6} q^3 + g P^{n-8} q^4 - \&c.$$

dans laquelle $a, b, c, f, \&c.$ sont des fonctions connues de n . Je différencie cette équation deux fois de suite; la première, par rapport à x ; la seconde, par rapport à y , & j'observe que

$$\text{par la nature des quantités } P^1, P^2, \&c. \text{ on a } \frac{d(P^n)}{dx} = n P^{n-1};$$

$$\text{d'ailleurs } \frac{dP}{dx} = y, \frac{dP}{dy} = x, \frac{dQ}{dx} = 2x(1+y^2), \frac{dQ}{dy} = 2y(1+x^2).$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \frac{dd(A^n)}{dx dy} &= n a P^{n-1} - \{ (n-2) b P^{n-3} q + \{ (n-4) c P^{n-5} q^2 - 7 (n-6) f P^{n-7} q^3 + \&c. \} \\ &+ P \left\{ \begin{aligned} &n (n-1) a P^{n-2} - (n-2) (n-3) b P^{n-4} q + (n-4) (n-5) c P^{n-6} q^2 - \&c. \end{aligned} \right\} \\ &- 4 b P^{n-2} + 16 c P^{n-4} q \dots \dots - 36 f P^{n-6} q^2 \dots \dots + \&c. \} \\ &- 2 (P^2 - 1) [(n-2) b P^{n-3} - 2 (n-4) c P^{n-5} q + \{ (n-6) f P^{n-7} q^2 - \&c. \}]. \end{aligned}$$

Comme il s'agit de réduire cette quantité à la forme $n^2 A^{n-1}$ que l'on peut représenter par

$$n^2 (a' P^{n-1} - b' P^{n-3} q + c' P^{n-5} q^2 - \&c.),$$

on voit qu'une telle réduction ne pourroit avoir lieu, si on n'avoit pas en général

$$P^n = \alpha P^{n-1} p + \epsilon P^{n-2} (p^2 - 1),$$

α & ϵ étant fonctions de n seul. Pour examiner si on a en effet une semblable équation, je reprends les valeurs générales de P^n , P^{n-1} , P^{n-2} qui sont

$$P^n = p^n + \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 2} p^{n-2} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} p^{n-4} \\ + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} p^{n-6} + \&c.$$

$$P^{n-1} = p^{n-1} + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 2} p^{n-3} + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} p^{n-5} \\ + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} p^{n-7} + \&c.$$

$$P^{n-2} = p^{n-2} + \frac{n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 2} p^{n-4} + \frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} p^{n-6} \\ + \frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} p^{n-8} + \&c.$$

& je les substitue dans l'équation précédente. Il faut, pour qu'elle devienne identique, qu'on satisfasse à différentes conditions, qui sont toutes représentées par l'équation . .

$$(n-1)(n-2k)\alpha + (n-2k)(n-2k-1)\epsilon - 4k^2\epsilon = n(n-1),$$

le nombre k étant à volonté. Or cette équation se résout sans difficulté, en prenant $\alpha = \frac{2n-1}{n}$, & $\epsilon = \frac{1-n}{n}$. On aura donc

$$P^n = \frac{2n-1}{n} P^{n-1} p - \left(\frac{n-1}{n} \right) P^{n-2} (p^2 - 1).$$

Au moyen de cette formule, j'élimine les termes affectés de $p^2 - 1$ dans ma différentielle, & j'ai

$$\frac{dd(A^n)}{dx dy} = [n+2] \cdot [n-1] P^{n-1} - [n-2] \cdot b + 4(n-3) c P^{n-3} + [n-4] c + 6(n-5) f P^{n-5} q^2 + c$$

$$+ P \left\{ \begin{aligned} & n-1 \cdot [n-1] P^{n-1} - (n-2) \cdot (n-3) b P^{n-3} q + (n-4) \cdot (n-5) c P^{n-5} q^2 - c \\ & - 2(n-1) b P^{n-1} + 4(n-3) c P^{n-3} q - 6(n-5) f P^{n-5} q^2 + c \end{aligned} \right.$$

Il faut en outre, avant que les termes qui multiplient p se détruisent d'eux-mêmes, & qu'on ait

$$b = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2n-1} a, c = \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} b, f = \frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)} c, \&c.$$

Cette relation entre les coefficients $a, b, c, f, \&c.$ est d'autant plus singulière, que la valeur générale de A^n semble n'être pas la même lorsque n est pair & lorsqu'il est impair. En effet, nous avons

$$A^{2m} = \frac{2m+1 \cdot 2m+3 \dots 4m-1}{2 \cdot 4 \dots 2m} P^{2m} - \frac{2m-1 \cdot 2m+1 \dots 4m-3}{2 \cdot 4 \dots 2m} m P^{2m-2} q$$

$$+ \frac{2m-3 \dots 4m-5}{2 \dots 2m} \cdot \frac{m \cdot m-1}{2} P^{2m-4} q^2 - \&c.$$

$$A^{2m+1} = \frac{2m+3 \cdot 2m+5 \dots 4m+1}{2 \cdot 4 \dots 2m} P^{2m+1} - \frac{2m+1 \cdot 2m+3 \dots 4m-1}{2 \cdot 4 \dots 2m} m P^{2m-1} q$$

$$+ \frac{2m-1 \dots 4m-3}{2 \cdot 4 \dots 2m} \cdot \frac{m \cdot m-1}{2} P^{2m-3} q^2 - \&c.$$

Cependant on trouve, dans les deux cas, que les relations précédentes entre les coefficients $a, b, c, \&c.$ sont exactes. On a donc

$$\frac{dd(A^n)}{dx dy} = \frac{n}{2n-1} \cdot a n^2 P^{n-1} - \frac{n-2}{2n-3} b n^2 P^{n-3} q + \frac{n-4}{2n-5} \cdot c n^2 P^{n-5} q^2 - \&c.$$

& pour que cette quantité se réduise enfin à $n^2 A^{n-1}$ ou $n^2 (a' P^{n-1} - b' P^{n-3} q + \&c.)$, il faut que

$$a = \frac{2n-1}{n} a', b = \frac{2n-3}{n-2} b', c = \frac{2n-5}{n-4} c', \&c.$$

Ces égalités se vérifient en comparant les coefficients des formules $A^{2m}, A^{2m+1}, A^{2m+2}$. Mais on verra le tout d'un coup d'œil,

d'œil, ainsi que les relations qui ont été données ci-dessus entre les coefficients a , b , c , &c, si nous mettons la valeur de A^n sous cette forme générale où il n'y a plus à distinguer le cas de n pair & celui de n impair.

$$A^n = \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} P^n - \frac{1.3.5 \dots 2n-3}{1.2.3 \dots n-2} \cdot \frac{1}{2} P^{n-2} q$$

$$+ \frac{1.3.5 \dots 2n-5}{1.2.3 \dots n-4} \cdot \frac{1}{2.4} P^{n-4} q^2 - \frac{1.3.5 \dots 2n-7}{1.2.3 \dots n-6} \cdot \frac{1}{2.4.6} P^{n-6} q^3$$

$$+ \frac{1.3.5 \dots 2n-9}{1.2.3 \dots n-8} \cdot \frac{1}{2.4.6.8} P^{n-8} q^4 - \&c.$$

24. L'équation $\frac{dd A^n}{dx dy} = n^2 A^{n-1}$ étant ainsi vérifiée, j'appelle X^n la quantité

$$x^n - \frac{n. n-1}{2.2} x^{n-2} + \frac{n. n-1. n-2. n-3}{2.2.4.4} x^{n-4} - \&c.$$

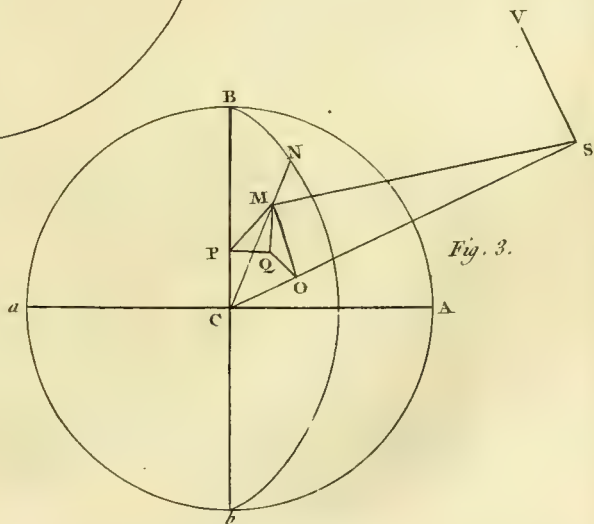
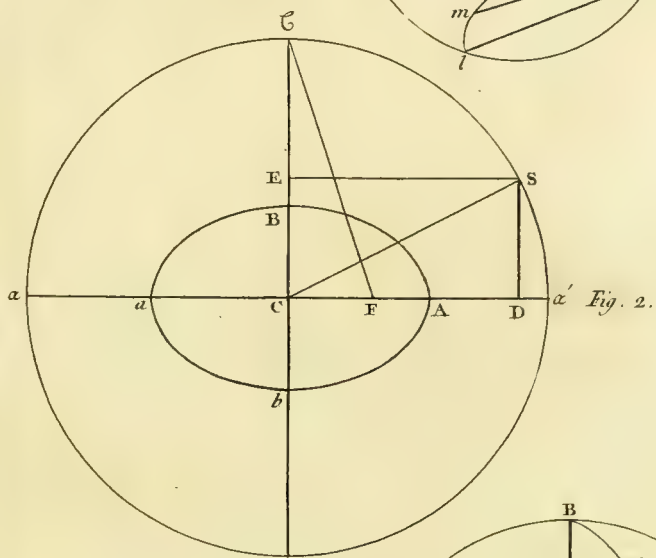
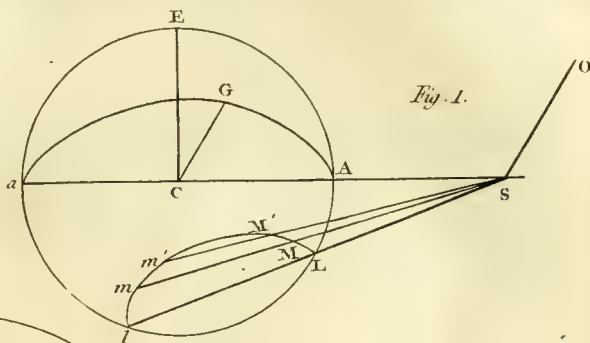
& Y^n une semblable fonction de y ; je suppose qu'on a trouvé $A^{n-1} = X^{n-1} Y^{n-1}$, & je vais démontrer qu'il en résulte $A^n = X^n Y^n$. Car soit $A^n = X^n Y^n + u$, puisque $\frac{dd A^n}{dx dy} = n^2 A^{n-1}$, & $\frac{dX^n}{dx} = n X^{n-1}$, on aura $\frac{dd u}{dx dy} = 0$. Donc $u = \phi : x + \psi : y$. Mais les quantités x & y doivent entrer de la même manière dans A^n ; ainsi les deux fonctions arbitraires désignées par ϕ & ψ sont égales. On aura donc $A^n = X^n Y^n + \phi : x + \phi : y$. Si n est impair, & qu'on fasse $x = 0$, les quantités A^n & X^n s'évanouissant, on aura $\phi : y + \phi : 0 = 0$. Donc $\phi : y$ est constant, il en est de même de $\phi : x$; & puisque leur somme s'évanouit dans un cas particulier, on a toujours $A^n = X^n Y^n$.

Si n est pair, $\phi : x$ sera une fonction paire de x , puisqu'il n'entre que des puissances paires de x dans A^n & X^n . On peut donc écrire $A^n = X^n Y^n + \psi : x^2 + \psi : y^2$. Mais dans le

cas particulier où $y^2 = -1$, on a $A^n = X^n Y^n$. Donc $\psi : x^2 + \psi : -1 = 0$; donc les fonctions $\psi : x^2, \psi : y^2$ sont encore constantes, & puisque leur somme s'évanouit dans le cas particulier où $y^2 = -1$, elle s'évanouit toujours, & on a encore $A^n = X^n Y^n$.

Donc la décomposition de A^{n-1} entraîne nécessairement celle de A^n ; & puisque la décomposition de A^n est évidente pour les premières valeurs de n , elle est donc vraie pour toutes les autres. C'est ce qu'il falloit démontrer.









DESCRIPTION

DES

VOLCANS,

DÉCOUVERTS EN 1774, DANS LE BRISGAW;

Par M. le Baron DE DIETRICH, Magistrat-Noble de la Ville de Strasbourg, Secrétaire général des Suisses & Grisons, &c. Correspondant de l'Académie Royale des Sciences.

P A R M I les différens phénomènes que la Nature offre à ceux qui la contemplent, l'un des plus intéressans, sans doute, est la vue des effets qu'ont produits les efforts impétueux des incendies souterrains.

Il n'y a plus que quelques parties de l'Europe qui renferment des Volcans encore enflammés; mais il n'y a presque pas de provinces où l'on ne découvre des Volcans éteints.

M. Hermann, Professeur d'Histoire Naturelle à Strasbourg; possédoit, dans sa collection de fossiles, une pierre noire

venant du côté du vieux Brisach en Brisgaw. Il supposa qu'elle pouvoit devoir son origine à un Volcan; il envoya un échantillon à un de ses Correspondans en Allemagne, en lui faisant part de ses idées sur l'origine de cette pierre. Je la vis chez cet ami, & cela me suffit pour me persuader que son opinion étoit fondée. De retour chez moi, je lui demandai des éclaircissements à cet égard; il ne put rien ajouter à ce que je savois déjà, que cette pierre avoit été tirée des environs du vieux Brisach (a).

Le vieux Brisach même est situé sur les bords de la rive droite du Rhin, dans le Brisgaw; sa position est frappante: il est bâti sur une colline entièrement isolée, située à trois lieues à l'ouest des montagnes de la Forêt-noire, dont il est séparé par un pays plat & graveleux que le Rhin arrosoit autrefois, sans aucune apparence de liaison avec cette grande chaîne de montagnes.

Dès qu'on entre dans cette Ville, on ne sauroit douter qu'il n'y ait des Volcans dans la proximité. Les ruines de ses fortifications sont toutes formées de laves, & les maisons de la Ville sont généralement bâties de cette pierre volcanique; la lave est désignée dans le pays sous le nom de *pierre noire*, & personne ne se doute de son origine.

Le vieux Brisach est situé sur une colline médiocrement élevée, au midi de laquelle est une seconde colline moins haute, qui n'est séparée de la première que par une très-petite

(a) Depuis que la première partie de ce Mémoire a été lue à l'Académie Royale des Sciences, j'ai fait imprimer ma Traduction des Lettres de M. Feiber; j'ai parlé transitoirement, dans mes notes, de ma découverte des Volcans du Brisgaw; les amis de M. Hermann m'ont fait un crime de m'attribuer cette découverte. L'Auteur des *Annales Littéraires de Göttingue*, au n.^o 130, année 1776, me donne un démenti formel à ce sujet, & attribue, sans autre forme de procès, la découverte des Volcans du Brisgaw à M. Hermann. Je lui avois rendu, dans ce Mémoire, l'hommage que je lui devois; il tenoit de l'Architecte de notre Ville les morceaux de lave qui m'ont engagé à faire des recherches; il a soupçonné un Volcan; mais jusqu'à ce jour il ne connoît encore ces Volcans que par ce qu'il en a appris de moi, & il ne se doutoit pas que le Kayserstul, au pied duquel il avoit passé, fût volcanique. M. Hermann désapprouve lui-même ce zèle inconsidéré de ses amis.

étendue de terrain. Le Rhin coule aujourd'hui à leur pied. Ces deux monticules décrivent une demi-circonférence en forme d'amphithéâtre, qui fait face à l'ouest & au Rhin. Elles peuvent avoir toutes deux une lieue de tour, sont absolument isolées, & le terrain qui les environne est parfaitement plat.

En suivant le rivage de l'ouest au sud, j'eus la satisfaction de voir la coupe entière de la colline sur laquelle est bâtie la Ville.

L'Impératrice Reine a fondé au Brisach un Couvent de Dames pour l'éducation des Demoiselles de condition du Brisgaw; cette Maison Religieuse est justement bâtie au sommet de la partie du monticule qui est coupé à pic à une hauteur d'environ cent pieds.

Il n'y a du haut en bas qu'une seule masse de lave, dont on ne distingue les couches que par une légère variété de couleurs. Il y a dans cette masse des petites fentes perpendiculaires, ou peu inclinées, de deux à trois lignes d'épaisseur, refermées par du gyps strié. Ces crevasses doivent sans doute leur origine au refroidissement ou à la condensation de la lave; le gyps qui s'y est logé, ne proviendrait-il pas du dépôt des eaux qui ont découlé des bâtimens qui sont au dessus de la lave, ces eaux ayant détaché des parties gypseuses, qui en se réunissant ont pu former des stries?

Une partie de cette lave est couverte à sa superficie d'une croûte blanche vitreuse qui ressemble à la calcédoine, qui provient vraisemblablement d'une surabondance de schoerl blanc (a),

(a) Lorsque cette première partie de mon Mémoire fut lue à l'Académie, je traduisois les Lettres de M. Ferber sur l'Italie; j'adoptai de cet Ouvrage la dénomination de schoerl blanc pour cette substance blanche qui est si commune dans les laves. M. Desmarest a depuis lors trouvé que souvent cette substance est de la zéolite, que d'autres fois elle est calcaire. C'est chez ce Savant que M. Pafumot a vu la zéolite striée dans la lave du Brisgaw: j'en ai trouvé d'après lui; mais il y a aussi, parmi cette substance blanche, des parties simplement quartzes; M. Lavoisier & M. Sage en ont tous deux & séparément fait l'épreuve devant moi. Nous avons détaché des laves les grains blancs & vitreux qu'elles renfermoient; une partie de ces grains mis en digestion dans l'acide nitreux, y fut dissoute, l'autre partie resta intacte, & il ne se forma pas de gelée: ces grains étoient donc en partie calcaires & en partie quartzes.

qui n'ayant pu se loger dans les pores de la lave , a été repoussé à sa superficie. Quelquefois cette croûte blanche est farineuse, ce qu'il faut attribuer à l'action de l'air qui a réduit en poudre ces parties qui étoient vitreuses.

En général ces laves sont des terres cuites plus ou moins vitrifiées, noirâtres, brunes, rougeâtres, grises, jaunes, verdâtres, blanches, plus ou moins poreuses, renfermant beaucoup de cristaux de schoerl noir, oblongs ou arrondis, aplatis & hexagones, & du schoerl blanc (voyez la note) qui revêt les parois de leurs pores, ou les remplit entièrement, sous la forme de cristaux, de petites boules, de points infiniment petits, ou d'une farine blanche. Elles sont toutes plus ou moins attirables à l'aimant; quelques-unes ont eu un degré de cuisson qui les met en état de faire feu avec l'acier. Mais il n'y en a point qui soit parvenue au degré de vitrification de cette espèce de lave que l'on nomme agate noire, d'Islande, à moins qu'elle n'eût été décomposée par les acides qu'on trouve abondamment sur les Volcans encore enflammés ou nouvellement éteints. Quoique ces laves soient presque toutes poreuses, aucune n'approche de la légèreté de la pierre-ponce.

On y trouve aussi un tuf volcanique jaunâtre, attirable à l'aimant par les petits grains de schoerl noir qu'il renferme.

Il y a au pied de cette masse de lave, de petits jardins qui n'ont d'autre terre que de la cendre volcanique; ils sont d'une grande fertilité : au bas de ces jardins est le rivage du Rhin, sur lequel on trouve un mélange de gravier, de lave roulée & de cendres volcaniques.

Toute la colline méridionale du vieux Brisach, qui porte le nom d'*Eckardsberg*, est formée de cendres volcaniques, grises & jaunâtres. Il y a au sommet de la colline, des ruines d'un ancien château; le reste du terrain produit de très-beau grain; on n'y trouve d'autre lave que celle qui provient des décombres du château.

Les collines du vieux Brisach sont donc vraiment volcani-

qués; elles forment vraisemblablement une grande partie de la circonférence d'un ancien crater écroulé.

Les éruptions du *vieux Brisach* peuvent avoir contribué aux petites variations que le cours du Rhin a éprouvées; mais ce n'est point à ce Volcan que j'attribue ces grands changemens de lits; il y a des causes plus certaines, fondées sur l'état actuel du local, dont je ferai mention ci-dessous.

Le schoerl blanc, contenu dans plusieurs variétés de lave du vieux Brisach, a adopté la forme des pores dans lesquels il s'est niché. Ces pores n'étant pas tous régulièrement sphériques, le schoerl qui y est contenu, ne l'est pas non plus. Cette observation me prouve que la matière du schoerl blanc étoit en fusion dans la lave fluide; que les molécules de cette matière se sont rapprochées lors de la condensation de la lave, par la tendance des particules homogènes les unes vers les autres, & que cette matière s'est logée dans les cavités que l'air dilaté avoit produites; que si le schoerl blanc n'avoit point trouvé assez de pores, il auroit été repoussé jusqu'à la superficie de la lave, parce que la matière qui compose le corps de la lave, étoit plus considérable, & qu'elle a fait les mêmes efforts que celle du schoerl blanc, pour rapprocher ses parties en repoussant toute la matière hétérogène.

Bien convaincu que les collines du vieux Brisach étoient les débris d'un ancien crater, je résolus de reconnoître la montagne d'Yhryngen, d'où les habitans du vieux Brisach tirent la pierre noire avec laquelle ils bâtissent.

La plaine du vieux Brisach est terminée au nord par un chaînon de collines que j'avois déjà présumé n'être pas de première formation, puisque j'étois convaincu que le Rhin avoit eu son cours de ce côté-là, par les dépôts de graviers qu'il a laissés entre la Forêt-noire & le vieux Brisach, & par la tradition du pays même; ce qui eût été impossible, si ces montagnes avoient toujours existé. Mon opinion fut confirmée en

apprenant au vieux Brisach que la pierre noire à bâtir se tiroit de ces collines.

Cette suite de monticules est située au nord-est du vieux Brisach ; elles se présentent sur une même ligne qui forme une sorte d'équerre avec la grande chaîne de la Forêt-noire , d'où cette ligne paroît commencer. Elle se porte de l'est à l'ouest presque jusqu'au Rhin. La ligne est interrompue par le vallon d'Yhryngen , qui , tout petit qu'il est , met une grande différence entre les collines qui sont au levant de ce vallon & celles qui leur sont opposées.

Les premières de ces monticules , au levant du vallon , sont calcaires , & tiennent aux autres collines de la même nature , qui devancent les hautes montagnes de la Forêt-noire ; elles peuvent donc être regardées comme collines avancées de la Forêt-noire.

Les collines qui sont au couchant du vallon d'Yhryngen ; sont d'une formation postérieure ; elles sont entièrement volcaniques. C'est à elles que j'attribue la grande variation que le Rhin a éprouvée dans son cours. Je suppose avec vraisemblance que son lit a occupé la plaine dans laquelle se sont élevées les collines volcaniques , lesquelles ont formé une digue tout au travers de cette plaine , de manière que le Rhin a été forcé de prendre son cours à une forte lieue au couchant de sa première direction ; on n'a qu'à remarquer le coude que ce fleuve décrit à la hauteur de ces collines volcaniques , pour en être convaincu.

Les collines volcaniques sont beaucoup plus élevées que les collines calcaires qui sont sur la même ligne ; il y en a qui peuvent passer pour de hautes montagnes , elles ont au delà de six lieues d'étendue du sud au nord , sur près de deux de largeur de l'est à l'ouest. Ces collines doivent leur origine à des éruptions réitérées & des plus violentes ; ce qui est prouvé par la quantité de croupes de montagnes qu'elles renferment.

Je passai , en sortant du vieux Brisach , par une plaine dont
le

le terrain est graveleux ; cependant ce gravier est mêlé de cendres volcaniques ; la terre végétale même paroïssoit en être chargée, le chemin étoit rempli de morceaux de lave détachés, qui ont été roulés des collines voisines, ou qui ont été répandus par les voitures qui mènent la pierre au vieux Brisach.

Je gagnai l'extrémité orientale des collines volcaniques qui se terminent au vallon d'Yhryngen ; je donne ce nom à ce vallon, parce que le village d'Yhryngen est situé à son entrée. Ce village appartient à M. le Margraff de Baden.

La montagne qui termine, du côté du levant, les collines volcaniques, porte aussi le nom de ce village. Cette montagne d'Yhryngen est à une petite demi-lieue au sud du village, & à une lieue & demie du vieux Brisach. On y voit les marques les plus distinctes de bouleversement. Sa pente méridionale est couverte de morceaux de lave détachés, qui, par leur mobilité, en rendent l'accès pénible ; il n'y croît que des ronces, & par-ci par-là il y a des grands blocs de lave qui sortent du corps de la colline ; les autres côtés & le sommet de la montagne sont semés de grains & plantés en vigne, le terrain en est très-fertile ; cette différence provient de ce que la côte méridionale est formée par plusieurs massifs de lave qui sont à nu, tandis que les autres parties de la superficie de la montagne sont recouvertes de cendres volcaniques, & cela à une très-grande hauteur ; car en allant du sud au nord de cette colline, on trouve des chemins creux très-profonds, où l'on ne voit que des cendres qui ont bien acquis un degré de fermeté, mais qui sont bien éloignées d'être converties en tuf volcanique, car elles sont encore friables ; les montagnes volcaniques qui sont au nord de celles d'Yhryngen, s'élèvent successivement à une très-grande hauteur.

En suivant la pente méridionale des collines volcaniques de l'est à l'ouest, on observe qu'elles décrivent successivement le tiers, la moitié & jusqu'au trois quarts de la circonférence de plusieurs cercles.

La partie de la côte méridionale attenante à la montagne d'Yhryngen, montre les laves à découvert, & n'est revêtue que de quelques ronces; mais en avançant vers l'ouest, la côte est plantée de vignes. Ces laves servent à bâtir; elles sont de la même nature que celles du vieux Brisach, à l'exception de quelques variétés, telle qu'une lave d'un rouge briqueté, remplie de grands pores dont les parois sont revêtues d'une terre jaunâtre; on y trouve aussi des laves qui renferment des cristaux de schoerl jaunes & bruns, oblongs ou arrondis, qu'on ne voit pas dans les laves du vieux Brisach.

Il y a dans les collines de cendres, qui sont derrière la montagne d'Yhryngen, des pierres arrondies, d'un gris blanchâtre, alcalines, d'un grain très-fin, qui ne sont autre chose qu'un tuf formé par l'endurcissement des cendres volcaniques.

En s'enfonçant un peu vers le nord-ouest dans le corps de ces collines volcaniques, on entre dans la banlieue du village d'*Achkarn*; on y voit constamment de hautes collines & montagnes volcaniques; on y distingue sur-tout un très-grand cratère évasé. Les montagnes qui lui servent de mur, sont toutes sur pied; il est parfaitement entier, il n'a d'autre ouverture que le chemin creux par lequel on y entre. Le fond de ce cratère forme aujourd'hui une belle plaine très-fertile; il y vient les plus beaux grains. Cette plaine est environnée de hautes montagnes plantées de pins, & d'autres arbres qui ne sont formés que de laves & de cendres. On a ouvert sur la côte de l'une de ces montagnes, une carrière de lave superbe qui mérite d'être vue. La masse de lave qu'on y exploite, a près de 150 pieds de hauteur; on en tire des blocs prodigieux; elle sert de pierres de taille. Elle n'offre que de légères variétés de celle du vieux Brisach & d'Yhryngen.

En allant d'*Achkarn*, vers le nord-nord-ouest, on entre dans le ban du village de *Rothweil*, dans lequel est une montagne entièrement formée de lave, & les montagnes qui l'environnent, de cendres volcaniques. On a découvert tout le côté du levant de cette montagne, sur une longueur de plus de

fix cents pas, pour en tirer la lave. Cette carrière est aussi intéressante pour son étendue, que parce qu'on y voit la coupe de cette montagne de lave : il ne croît à son sommet que des buissons; les arbres plus forts ne sauroient y prendre racine, car il n'y a encore que très-peu de terre végétale par-dessus la lave; il n'y a que des ronces sur les côtés de cette montagne.

Les couches de lave s'y succèdent, en commençant immédiatement sous le gazon; elles se distinguent par la couleur & la qualité de la lave; mais elles ne sont séparées par aucunes couches de cendre ou de terre végétale : d'où il faut conclure qu'il n'y a pas eu de longs intervalles entre les éruptions qui ont produit ces différentes laves, car alors on trouveroit, comme à *Pompeïa* & à *Herculanum*, des couches intermédiaires non volcanisées.

En allant au levant de *Rothweil*, par Bickernsol, on trouve sur la lisière des collines volcaniques, le village de *Waafenweiler*; il est situé à une forte demi-lieue au nord-est d'*Yhryngen*. Là le vallon qui sépare les collines volcaniques d'avec les collines avancées de la Forêt-noire, s'élargit de plus en plus; la rivière de *Treisam* baigne les pieds des collines volcaniques.

D'*Yhryngen* à *Waafenweiler*, on passe devant des collines de cendres, toutes plantées de vignes. On fouille de la tourbe près de *Waafenweiler*, au levant du chemin dans la vallée dont je viens de parler. On tire de la lave au dessous de l'église de *Waafenweiler*.

On voit, à une portée de fusil de *Waafenweiler*, une masse de lave qui est exploitée en carrière, sur environ cinquante pieds de hauteur; on y observe plusieurs crevasses perpendiculaires & obliques, remplies d'une substance pierreuse, alcaline & blanche, d'environ quatre lignes d'épaisseur, provenant sans doute du dépôt des eaux qui ont filtré au travers de ces crevasses : ces eaux venant de collines volcaniques plus élevées, il est vraisemblable qu'elles avoient entraîné les parties alcalines

des cendres volcaniques , sur lesquelles elles avoient coulé , en plus grande quantité que les autres parties qui forment cette production.

La lave qu'on retire de cette carrière, n'offre que peu de variétés de celles du vieux Brisach ; je ne ferai mention que de celles qui ont quelques accidens particuliers.

La lave de Waafenweiler a beaucoup de gerçures peu sensibles, au moyen desquelles elle se rompt aisément ; la surface de cette lave , séparée par ces petites fentes, est communément revêtue d'une petite couche alcaline d'un gris blanc , sur laquelle il y a par-ci par-là des petites arborisations rouges , qui attirent l'aimant plus fortement que le corps de la lave. L'extérieur de cette lave est enduit de même d'une couche alcaline blanche , qui tire sur le jaune & le vert , entremêlée & quelquefois recouverte de petites lames couleur de fer & gorge de pigeon, qui ont le brillant métallique, & qui attirent l'aimant.

On y trouve de la lave noire, formée de plusieurs couches fortement unies, de quatre à cinq lignes d'épaisseur chacune , & séparées par autant de petites lisières ou feuilles métalliques à l'œil , & attirables à l'aimant ; cette lave a le grain très-fin , fort ferré ; elle est excessivement dure , fait feu avec l'acier , renferme des cristaux de schoerl noir, qui font corps avec cette lave , & grand nombre de petits points de schoerl brillant. Elle approche beaucoup , dans sa fracture , du basalte , elle attire généralement l'aimant ; sa couche supérieure devient brunâtre , & enfin grise aux extrémités , & en général aux parties qui ont été en contact avec l'air.

Les crevasses de cette masse de lave sont remplies par un tuf calcaire de quatre lignes d'épaisseur , revêtu de ses deux lisières , qui font une espèce de croûte mêlée de parties alcalines & de lave décomposée ; ce qui est non seulement visible à l'œil , mais encore prouvé par l'effet de cette lisière sur l'aimant qu'elle attire quoique très-faiblement , tandis que le corps de

la pierre ne l'attire point, à l'exception des endroits où ce tuf a enveloppé la matière de la lave en se formant.

De Waafenweiler, je côtoyai constamment des collines de cendres volcaniques, sans voir de lave à découvert jusqu'à Oberschaffhausen, gros village situé à une lieue au nord-est de Waafenweiler, dans l'intérieur & sur le penchant d'une colline volcanique. Il y a dans ce village des eaux minérales qu'on boit, & dans lesquelles on se baigne; elles sont vraisemblablement martiales & vitrioliques. J'ai fait l'impossible pour avoir un peu du sédiment qu'elles déposent; mais je n'ai pu m'en procurer, ayant fait ma course hors de la saison des bains, & après que les tuyaux & les cuves avoient été bien nettoyés.

Toute la colline septentrionale à laquelle un côté du village est adossé, n'est qu'une seule masse de lave, que l'on fouille dans le village même par deux carrières peu distantes l'une de l'autre. La lave s'étend & se voit à découvert jusqu'à une bonne distance au dessus du village sur le chemin de Vogsburg.

La lave de la carrière inférieure de ce village est d'un gris de cendre plus clair que celle de la carrière supérieure; elle est mêlée de petits points de schoerl noirs & blancs, mais ils ne sont pas suffisans pour la rendre attirable à l'aimant; elle n'est point poreuse, mais elle est dure & compacte, fait feu avec l'acier, & ressemble, au premier coup-d'œil, à un grès. Les blocs extérieurs de cette carrière sont revêtus d'une croûte alcaline jaunâtre, qui s'attache un peu à la langue.

En suivant cette montagne de lave au dessus d'Oberschaffhausen, dans un chemin creux qui conduit à Vogsburg, on trouve, à une petite distance d'Oberschaffhausen, à la droite du chemin, sous des rochers de lave grise, une argile brune, couleur de foie, que j'ai tirée d'une espèce d'enfoncement, à la base duquel les eaux de pluie se rassemblent. Elle s'attache à la langue, ne fait effervescence avec les acides qu'à sa surface, où elle est accidentellement couverte d'un peu de terre blanche alcaline. Ce produit volcanique est un des plus attirables à l'aimant de

toute cette contrée. Son fond est rempli de petits points blancs & verts; il y a des morceaux qui renferment des petits cristaux de schoerl vitreux & sphériques, que l'eau-forte attaque; mais l'échantillon le plus remarquable que j'en aye rapporté, renferme des cristaux de schoerl hexagones, qui ont depuis deux jusqu'à cinq lignes de diamètre; ils se détachent aisément de la lave, & sont revêtus d'une feuille brune foncée, luisante, de la nature des hémathites de cette couleur; l'intérieur de ces cristaux de schoerl est d'un noir verdâtre: vu à la loupe, on juge que c'est de la même matière que certaines laves noires. Ne pourroit-on pas penser que les cristaux de schoerl volcanique sont effectivement de la même matière que les laves de la même couleur; que cette matière est toujours disposée à se cristalliser par le refroidissement; que, dès qu'elle trouve jour dans les petits vuides que l'air dilaté produit dans la masse en fusion, elle adopte une forme régulière; que de cette tendance provient l'immense quantité des cristaux de schoerl noir dans les laves?

Le même échantillon d'argile qui donne lieu à ces réflexions; présente, dans plusieurs parties de son fond même, des surfaces planes, hexagones, comme si cette argile avoit la propriété de prendre cette forme en se rompant. Je croirois plus volontiers que cette forme est due à une empreinte de cristaux de schoerl, qui se sont détachés, si le centre de ces surfaces n'étoit pas occupé par un petit cristal de schoerl noir élevé. Une couche martiale qui a la couleur & le luisant de la poix, couvre la base de ce morceau, & de petites feuilles ferrugineuses qui ont l'apparence métallique, en enduisent le dessus. Cette argile n'est vraisemblablement qu'une décomposition de la lave.

J'ai tiré du même enfoncement une terre également molle & friable, de la même consistance que la précédente, grasse & savonneuse au toucher, s'attachant à la langue, attirant fortement l'aimant; l'acide nitreux ne l'attaque pas avec effervescence; son fond est d'un brun plus rouge que celui de la

lave décrite ci-dessus ; elle est remplie d'une infinité de petites & grandes taches blanches & vertes farineuses , qui occupent presque autant d'étendue dans cette lave , que son fond. On découvre à la loupe , au milieu , des taches vertes , des particules de schoerl noir. Cette farine verte ne feroit-elle pas une dissolution du schoerl noir , par l'acide vitriolique contenu dans les eaux qui séjournent dans cet enfoncement ?

Ces terres se trouvent dans un tuf blanc , jaune & grisâtre qui s'attache à la langue , en même temps qu'il est alkalin.

Je quittai le chemin de Vogtsbourg peu au dessus d'Oberchaffhausen , & tirai vers le sud-ouest ; j'atteignis , après une heure de marche , le sommet du Kaysersthal , en passant alternativement sur des rochers de lave & de la cendre volcanique , ayant de droite & de gauche un grand nombre de croupes de montagnes & de bas fond. Quelques cantons du centre de ces volcans sont assez garnis de bois ; mais les environs de Vogtsbourg , ceux de Rothweil & de Burcken sont arides.

Le sommet du Kaysersthal est fort élevé ; plusieurs motifs m'avoient déterminé à y monter ; le désir d'embrasser , d'un seul coup-d'œil , toute cette étendue volcanique (que j'appellerai dorénavant le *Kaysersthal* , suivant l'usage du pays) , & celui d'y découvrir quel pouvoit être le gouffre principal d'où étoient sorties des éruptions aussi considérables.

Au plus haut point du Kaisersthal sont deux tilleuls (*a*) peu distans l'un de l'autre , célèbres dans le pays , à l'ombre desquels

(*a*) M. Koch , Professeur attaché à l'Université de Strasbourg , & possesseur des Manuscrits de feu M. Schœpflin , a eu la bonté de me communiquer une note de ce Savant , au sujet du Kaysersthal , une partie de laquelle je transcris ici.

Vulgare nomen montis est Kaysersthal , quod solum Caesaris designat. Montem conscendi , & in vertice ejus , qui in Betzingensis vici finibus est , duas tilias praegrandes exiguo à se intervallo distantes conspexi. Utraque ex una radice septem altas projicit arbores. Ibidem rudera veteris Oratorii visuntur , quod pridem destructum. Alius in eodem monte apex est , ferè similis priori , & ab eo haud longè distans , in quo adhuc superest Capella. Inferiores montis partes ab utraque parte vitibus constae ; at latus orientale , quod nigram silvam aspicit , ob praestantiam vini praefertur. Otto III , Imp. Sasbaci monasterio S. Margaretha ad Wala-Kircham privilegium deait an. 1094 , qui locus ad pedes montis situs est. Diceret Casarem juvenem , venationis avidum montis hoc conscendisse fastigium , nomenque montis inde prognatum.

on découvre tout le cours du Rhin, depuis Bâle jusqu'à Strasbourg, & par conséquent une bonne partie de l'Alsace, du Brisgaw, & sur-tout toutes nos collines volcaniques.

Les gens du pays prétendent qu'il y avoit au sommet de cette montagne un grand palais, ou un monastère; leur imagination les porte même jusqu'à assurer que le son creux qu'on entend en y frappant du pied, décèle les voûtes de ces vastes constructions. On y trouve en effet quelques vestiges de maçonnerie, sans doute les débris de quelque petit ermitage (*a*). Mais ce son peut provenir de la formation intérieure de la montagne; car étant volcanique, elle a dû être produite par un bouleversement qui ne permet pas aux différentes parties de se rapprocher, & contenir des vuides qui peuvent donner lieu à cette espèce de résonnance, lorsqu'on frappe la terre avec véhémence. Il est probable que ce son creux ne s'entend qu'au sommet du Kaysersthal, & non dans les parties moins élevées, parce que dans les collines inférieures la masse s'est affaîlée & rapprochée par le poids des collines supérieures, tandis que rien ne pouvoit comprimer le point le plus élevé de ces montagnes (*b*).

Le sommet du Kaysersthal, & celui de l'Eichel Spitz sont toujours environnés de vapeurs, ce que j'attribue à l'élévation de ces deux montagnes, & sur-tout aux bois qui environnent leur sommet. Les habitans regardent ce fait comme un phénomène. C'est sur-tout lorsque le temps doit se mettre à la pluie, que ces vapeurs sont plus sensibles, de manière que ces montagnes servent en quelque façon de baromètre.

Il est notable que j'ai trouvé des rochers de lave dans toute cette course, à toutes les hauteurs, & jusqu'aux parties les plus

(*a*) Voyez, dans la note précédente, la description du Kaysersthal.

(*b*) M. Desmarest m'a assuré qu'il avoit observé ce son creux dans les terrains crayeux de la Champagne, dont la gelée avoit soulevé la croûte supérieure; il en conclut avec raison que ce son creux n'est point propre aux terrains volcanisés. Il est néanmoins vrai de dire qu'on le remarque fréquemment, & sur-tout dans les endroits où il y a des sources chaudes, comme à la solfatara de Pouzzole & à la solfatara de Tivoli, &c.

élevées de toute l'enceinte du Kaysersthul : j'en tirerai quelque conséquence dans les réflexions générales qui suivront cette description. J'ai rapporté du Kaysersthul deux variétés de lave.

De la lave noire, très-dure, très-compacte, mêlée de beaucoup de petits & de grands cristaux de schoerl noir, hexagones, arrondis & oblongs parallélipèdes. Il y a de ces cristaux qui ont au delà de trois lignes de longueur ; j'en ai examiné plusieurs à la loupe dans leur fracture ; j'ai derechef trouvé qu'ils ressemblent beaucoup au corps même de la lave que je décris : on auroit de la peine à les distinguer du fond de la lave, sans le brillant qu'ils ont, tant ils lui sont intimement unis. Cette lave ne fait point effervescence avec l'acide nitreux ; elle attire fortement l'aimant, fait feu avec le briquet, n'est point poreuse, & son grain est ferré. Elle avoit été prise, par les gens du pays, pour du charbon de pierre, à cause de sa couleur ; on la fouille à mi-côte du Kaysersthul. Les morceaux détachés de la masse sont couverts, sur toute leur circonférence, d'une croûte de lave grise d'une à deux lignes d'épaisseur, mêlée de petits points blancs, & dans laquelle on voit de combien de cristaux de schoerl noir cette lave est remplie. La surface de cette lave seroit-elle grise parce qu'elle étoit exposée au contact de l'air lors de sa fluidité qui l'auroit privée d'une partie de son principe inflammable, ou cette croûte ne proviendrait-elle pas plutôt d'une sorte d'altération & même d'un commencement de décomposition de la lave noire, due à la longueur des temps, à l'action réunie de l'air & de l'eau, comme je l'ai déjà conjecturé ? En effet, si cette croûte grise ne provenoit que de la fusion, pourquoi toute la circonférence de la lave en seroit-elle revêtue ? La surface supérieure seule devoit en être couverte, puisqu'elle seule étoit alors en contact avec l'air.

Pourquoi trouve-t-on des morceaux détachés de lave, à une certaine distance de la masse de lave que je décris, dont l'intérieur est absolument semblable à cette croûte extérieure, si bien qu'il n'est pas permis de douter que ces morceaux détachés ne proviennent de cette masse ? N'est-ce pas parce que ces

morceaux plus éloignés , sont depuis long-temps exposés à l'action de l'air & de l'eau , & que ces dissolvans les ont pénétrés de part en part ?

On pourroit faire ici la réflexion, que si les cristaux de schoerl noir étoient en effet de la même nature que la matière de la lave , ils devroient avoir été altérés ou décomposés comme leur matrice. Cette objection est de peu de conséquence. Qui est-ce qui ne fait pas que les cristaux résistent infiniment plus à l'action des dissolvans , que les masses informes de matières pareilles ? Des cristaux de spath calcaire résistent quelquefois à l'acide nitreux peu concentré ; cassés-les , vous verrez une forte effervescence à l'endroit de la fracture , si vous y appliquez l'acide.

Le sommet du Kaysersthal proprement dit , est couvert de rochers , d'une lave dure , brune presque noire. Sa surface est couverte , en quelques endroits , d'une feuille ferrugineuse qui a l'aspect métallique.

L'Eichelspitz , montagne en pain de sucre que j'ai déjà dit ci-dessus être vis-à-vis & au nord du sommet du Kaysersthal , est remarquable par son élévation & les différentes carrières de lave qu'on y exploite. On m'avoit assuré que Madame la Margrave de Baden Dourlach en avoit tiré & fait polir du marbre ; j'ai visité ces carrières , & je puis assurer que je n'y ai pas trouvé de vestiges d'une carrière de marbre : j'avoue que ma surprise auroit été grande d'en rencontrer une au centre de ces volcans.

Les carrières que j'y ai vues offrent peu de variétés de lave.

1°. De la lave grise dure , d'un grain ferré & compacte , faisant feu avec l'acier , mêlée de beaucoup de petits points de schoerl , noirs & blancs ; elle fait effervescence avec les acides , & elle n'est point attirable à l'aimant. On y voit quelques cristaux de schoerl vitreux , réguliers & hexagones , parfaitement pellucides , les seuls que j'aye trouvés dans toute la circonfé-

rence du Kayfersthal. Les morceaux détachés depuis longtemps de la carrière, sont environnés d'une croûte de lave grise blanchâtre.

2°. Une lave (a) corrodée & réduite en poussière dans ses couches supérieures qui sont de la même matière, mais friables & poreuses; cependant les parties qui touchent aux laves sont encore pierreuses; j'en conserve un morceau dans lequel ces différens degrés d'altération se trouvent réunis.

La carrière entière qui est immédiatement sous la terre végétale, est totalement recouverte d'une croûte cristallisée d'un doigt d'épaisseur, alcaline, & toute pénétrée d'ochre martiale jaune & brune.

Une autre de ces carrières fournit une lave d'un gris noir, mêlée d'un grand nombre de cristaux de schoerl noirs, arrondis ou oblongs, hexagones, & de quelques cristaux de schoerl blanc, farineux & vitreux. Cette lave se rompt assez facilement; cependant elle fait feu avec l'acier, elle attire fortement l'aimant. L'intérieur de cette lave ne fait point d'effervescence avec l'acide nitreux, mais bien la croûte extérieure des morceaux qui ont été long-temps exposés à l'air.

Cette masse de lave est traversée par une veine d'un pied de largeur, d'une terre blanche jaunâtre, assez semblable, à l'œil, à la pierre d'alun de la Tolfa.

Au village de Vogsbourg même, on trouve du spath calcaire, blanc, l'amelleux & cristallin, qui renferme beaucoup de cristaux de schoerl noirs & bruns, hexagones, arrondis ou oblongs, avec des feuilles ou mica de schoerl verdâtre, hexagones ou irrégulières, tels que les spaths du Vésuve, n°. 5 & 8, décrits par M. Ferber, p. 216 & 217.

Ce village, ceux de Kichelsperg & de Schelingen, sont situés dans l'intérieur de nos collines volcaniques. Tous sont

(a) Elle ressemble assez au *peperino*, à l'exception que celui-ci a plus de consistance.

bâti & environnés de lave & de cendres volcaniques; ces deux derniers villages se servent des laves de l'Eiche'spitz pour bâtir; les environs du village d'Amoltren, qui est situé plus au nord, n'offrent rien de particulièrement remarquable.

Telles ont été les observations que j'ai été à portée de faire dans ma seconde course.

Reprenons nos volcans au village d'Oberrothweil, & suivons-les du côté du couchant; nous nous trouverons bientôt sur leurs lisières occidentales; une suite de collines volcaniques nous conduira presque au bord du Rhin, dont nous étions à une lieue & demie.

Burcken, petite ville bâtie sur une de ces collines, domine agréablement ce fleuve; les collines des environs de Burcken sont généralement cultivées ou garnies de bois; ce qui fait qu'on ne voit que très-peu de masses de laves à découvert. Cependant le chemin de Burcken à Lisolten, où le Kaysersthal s'écarte derechef un peu du Rhin, est très-instructif. On y voit des laves éparfées dans la cendre volcanique, & des terres cuites décomposées & friables immédiatement sous la terre végétale: elles sont blanches avec des taches pourpres & jaunes, attirent l'aimant, font effervescence avec les acides en même temps qu'elles s'attachent à la langue.

Les villages de Bischoffingen & de Kœnigschaffhausen sont au nord de Burcken. On longe constamment des collines de cendres & de laves, lesquelles s'étendent vers le nord, le long du Rhin, jusqu'à un quart de lieue de Saspach; elles décrivent, depuis Burcken jusqu'à ce dernier endroit, plusieurs grands demi-cercles. La côte occidentale du Kaysersthal se termine à un quart de lieue de Saspach. Là les collines volcaniques se tirent de l'ouest à l'est, pour former la côte septentrionale de ce chaînon.

Le village de Saspach est situé dans un bas-fond, terminé au sud-est par le Kaysersthal, au sud-ouest par le Rhin, au nord-est par une grande plaine de trois lieues de largeur, qui s'étend

depuis le Rhin jusqu'aux collines avancées de la Forêt-noire ; mais il ne communique avec cette plaine que par l'intervalle que laisse entre elle & le Kaysersthul , la montagne qui porte en même temps les noms de Lutzelberg & de Limbourg , qui borne ce bas-fond du côté du nord-ouest.

Cette montagne mérite une attention particulière ; elle n'est plus comprise dans le Kaysersthul ; elle forme une pointe dans le Rhin , qui a un quart de lieue de long , oppose sa pointe méridionale aux impétueux efforts de ce fleuve , & l'oblige de baigner la base de sa côte occidentale. La montagne est entièrement détachée ; on conçoit cependant , en la voyant , qu'elle peut avoir été attenante autrefois au Kaysersthul.

Quoi qu'il en soit , cette montagne est divisée en deux parties ; l'une , orientale & moins élevée , porte le nom de Lutzelberg ; l'autre , occidentale & beaucoup plus haute , prend le nom du château de Limbourg , qui est bâti sur la côte occidentale , à l'extrémité de la pointe qu'elle forme. Ces deux parties décrivent aussi entre elles , & du côté méridional , une demi - circonférence ; il est possible qu'elles doivent leur origine à un gouffre particulier.

Un pèlerinage placé au haut du Lutzelberg , qui est en grande vénération dans le pays , est cause qu'il n'y a guère que les gens de Saspach qui distinguent les deux parties de cette montagne ; les autres habitans des environs ne la connoissent que sous le nom de Lutzelberg.

En suivant la côte méridionale du Lutzelberg & du Limbourg le long du Rhin , on voit que leur base est composée de cendres volcaniques qui s'élèvent perpendiculairement à une grande hauteur , & qui sont remplies & surmontées de rochers menaçans de lave. Le sommet & le noyau de cette montagne ne forment qu'une seule masse de lave ; on la découvre du côté de Saspach , environ à mi-côte , où il y a une carrière ; mais elle s'étend dans toute la circonférence du Lim-

bourg. J'entends maintenant sous ce nom les deux parties réunies.

Le château de ce nom est une vieille maifure dont l'enceinte est affez vaste; il est pofé fur un rocher de lave à pic fur le bord du Rhin, & totalement bâti de lave (a).

Le Limbourg est en général ftérile, à l'exception de quelques petits arbres pins qui en garniffent un peu la crête.

Le rivage du Rhin n'est compofé que de cendres volcaniques & de graviers de lave; les gens de Saspach font de ce mélange, qu'ils appellent fable du Rhin, un mortier excellent.

Le Limbourg est une des montagnes volcaniques les plus intéreffantes de cette contrée.

Quelqu'un qui feroit peu accoutumé à voir des volcans éteints, pourroit peut-être douter que toutes les collines volcaniques du Kayferstul fuffent volcaniques, fur-tout s'il ne parcouroit que certaines parties de fes limites; il verroit une terre grife, jaunâtre ou blanchâtre, & très-rarement ou point de lave. Mais s'il a commencé par aller au Limbourg, qu'il ait fimplement une idée de ce que c'est que la lave, qu'il y voie cette terre grife pulvérulente, remplie, mêlée & furmontée des laves qu'elle recouvre, il ne pourra plus douter que cette terre ne foit vraiment une production volcanique: convaincu de cette vérité, il fera perfuadé que toutes les collines du Kayferstul, qui font formées de la même terre, ont eu la même origine.

On obferve de plus au Limbourg, que les cendres ne peuvent avoir été lancées par cet ancien volcan, qu'après les laves, puifqu'elles en couvrent la circonférence. Cette obfervation peut auffi s'appliquer à une grande partie du Kayferstul; car

(a) L'Abbé Prince de Saint-Blaise, dans la Forêt noire, fit, en 1770, un voyage au château de Limbourg avec feu M. Schoepflin, & tomba d'accord avec ce Savant, que c'est le même château où les anciens Comtes de Habsbourg ont réfidé quelquefois, & où l'Empereur Rodolphe de Habsbourg, Fondateur de la Maifon d'Autriche, est né.

Les Barons de Gerhardi tiennent aujourd'hui ce château en fief.

l'extérieur & la base des collines qui le composent , ne contient pas souvent de la lave.

Les habitans des environs du Limbourg le regardent avec raison comme une barrière invincible que la Nature a opposée aux ravages que feroit le Rhin ; il est assez remarquable que la tête de cette étendue volcanique soit placée comme en vedette, sur le rivage du Rhin , & qu'à l'extrémité opposée, il en soit de même. Les collines de Burcken contiennent ce fleuve directement dans le milieu de la ligne droite, qu'on tireroit du vieux Brisach au Limbourg. Ces trois digues retiennent le Rhin dans le lit que les éruptions volcaniques lui ont fait prendre , & s'il gagne sur les terres à cette hauteur, ce ne peut être qu'aux dépens de l'Alsace. Il est remarquable que le Rhin se rejette du côté du levant tout de suite , au dessous du Limbourg ; nouvelle preuve de ce que j'ai avancé au commencement de ce Mémoire.

Les laves du Limbourg diffèrent à la vue de toutes celles du Kaysersthal, quoiqu'elles soient essentiellement composées des mêmes matières ; elles sont toutes plus ou moins facilement feu avec le briquet , & attirent fortement l'aimant. Elles sont singulièrement bigarrées par la proportion & la grandeur des substances dont elles sont composées.

Revenons maintenant à la côte septentrionale du Kaysersthal. Une suite de collines volcaniques conduit de Saspach à Endingen, petite ville impériale située à une lieue au levant de Saspach ; elle est remarquable , relativement à nos volcans , par le sable noir , brillant & ferrugineux que les ruisseaux, qui coulent dans sa banlieue, charient avec plus d'abondance que les autres ruisseaux du Kaysersthal, quoique tous en fournissent. Ce sable attire fortement l'aimant , & ressemble parfaitement à celui qui est décrit dans les Lettres de Ferber, édition Française, p. 178, 303 & 366, & qu'on trouve dans tous les environs des volcans.

Le ban d'Endingen renferme aussi des carrières de lave ; mais elles n'ont rien de particulier à remarquer.

On compte encore une petite lieue d'Endingen jusqu'au village de Riegel, endroit placé à l'extrémité orientale de la côte septentrionale du Kaysersthal, qui est terminé par le mont Saint-Michel, colline au bas de laquelle Riegel est bâti.

En remontant de Riegel le long de la Treisam, on suit la côte orientale des collines volcaniques du Kaysersthal du nord au sud; on traverse successivement les villages de Balingen à trois quarts de lieues de Riegel, celui d'Eichstett qui est à une lieue & demie de Riegel; on passe enfin par Betzingen, & on retrouve Oberschaffhausen & Waasenweiler dont j'ai parlé ci-dessus.

On ne voit point de lave sur toute cette côte; elle n'est formée extérieurement que de cendres entièrement pareilles à celles du Limbourg: les laves sont au sommet ou au revers de la côte; chacun des villages que j'ai nommés a sa carrière de lave; tous sont bâtis de cette matière: on ne rencontre point de masse entière de cendres endurcies; mais toutes ces collines sont remplies de morceaux détachés d'un tuf alkalin, lequel donne, quand on le broie, une poudre parfaitement semblable à la cendre même; il n'est en effet autre chose que de la cendre volcanique endurcie & sans mélange. Les gens du pays donnent à cette pierre son véritable nom; ils l'appellent *tufstein*, pierre de tuf.

J'ai rapporté de ces volcans une espèce de fritte blanche, mêlée de petits points rouges, noirs & jaunes, qui attirent l'aimant; mais il me seroit impossible de nommer l'endroit même où je l'ai prise; cela m'afflige d'autant plus, que cet échantillon me paroît être une des productions les plus curieuses de ces volcans.

J'ai dit au commencement de ce Mémoire, que la partie méridionale du Kaysersthal est totalement séparée des collines avancées & calcaires des montagnes de la Forêt noire; il me reste à faire voir que toutes les collines volcaniques que je viens de décrire, forment un chaînon isolé, auquel on a donné le nom de *Kaysersthal*, nom que ces collines volcaniques doivent

à la montagne de ce nom, qu'elles renferment dans leur sein.

Il est important de commencer par établir les limites du Kaysersthal; cela est facile, en rapprochant les différentes parties de ce Mémoire; mais il me seroit impossible de les décrire avec plus de précision que ne l'a fait feu M. Schœpflin dans la Note dont j'ai déjà donné un extrait ci-dessus. M. Schœpflin ne se doutoit assurément pas qu'en traçant les bornes du Kaysersthal, il indiquoit en même temps les limites que la Nature a prescrites aux ravages d'un incendie souterrain. Je transcris cette Note mot à mot.

« In inferiori Brisgovia & vicinia Brisfaci, mons quinque
 « leucarum (*) est in longum, sesqui leuca in latum extensus,
 « inter Itringam & Riegelam, cujus pes ad Rhenum usque
 « hinc indè excurrit.

« Ad ortum siti sunt vici Riegel, Balingen, Eichstett, Betzingen, Oberschaffhausen, Waasenweiler; ad occasum, sive
 « ad Rhenum, Bickernsol, Rothweil, Bischoffingen, Lifolen
 « feu Leiselheim, Kœnigschaffhausen, Eendingen. Monti
 « incubant Amoltren, Ober & Niederbergen, Kichelsberg,
 « Schelingen, Vogsburg, aliaque molis exiguæ loca ».

D'après cette description, il suffit de prendre la Carte du Brisgaw, pour voir que ce n'est que du côté du levant que le Kaysersthal pourroit tenir à une chaîne de montagnes, étant borné au couchant par le Rhin & la plaine d'Alsace, & au septentrion & au midi par les plaines que les collines avancées de la Forêt-noire laissent entre elles & le Rhin.

Rappelons-nous maintenant le vallon d'Ihryngen, qui commence à l'extrémité méridionale de la côte orientale du Kaysersthal, où il n'y a plus de vestiges de pierre calcaire dans cette partie. Ce vallon, assez resserré à la montagne d'Ihryngen, s'élargit successivement du côté de Betzingen; les collines calcaires s'écartent beaucoup de la rive droite de la Treisam; à Eichstett

(a) Ces cinq lieues en valent bien six de France; mais il est vrai que les gens du pays n'en comptent pas davantage.

il occupe encore plus d'espace, & à la hauteur de Balingen il renferme tout le terrain contenu entre les rivières de Treisam & d'Eltz ; si bien que tous les habitans de cette partie du Kaysersthul sont obligés de chercher leur pierre à chaux & la pierre de sable rouge qui leur sert de chambranle, du côté d'Emendingen, où les collines calcaires se rapprochent un peu de l'extrémité septentrionale du Kaysersthul ; elles suivent le cours de la rive droite de la Bretten qui se jette dans la rivière d'Eltz au dessous de Riegel, s'étendent à une bonne demi-lieue de cet endroit derriere Malterdingen & Hechlingen, & c'est là où elles sont le moins éloignées des collines volcaniques, à l'exception du commencement du vallon d'Ihryngen qui n'a guère qu'une petite demi-lieue de largeur.

Non seulement j'ai visité toutes les carrières connues du Kaysersthul, mais j'ai promis une récompense pécuniaire à mes guides, capable de les tenter, s'ils m'indiquoient des pierres d'une nature différente de leur pierre noire. Le spath de Vogsburg a été la seule qu'ils m'aient montrée. Dans chaque village j'ai demandé d'où on tiroit la pierre à chaux & la pierre de sable ; par-tout on m'a répondu qu'il falloit chercher la première à Mundingen, & la pierre de sable encore plus loin. Cependant le village de Nienbourg, qui est un peu en avant des collines calcaires, fournit aussi de la pierre à chaux aux habitans du Kaysersthul, qui en sont à portée.

Mais une observation toute particulière, c'est que la montagne de Saint-Michel, qui termine le Kaysersthul à Riegel, fournit de la pierre à chaux : elle a peu d'étendue, & n'est séparée d'une autre colline qui porte le nom de Durlenberg (dans laquelle on ne trouve plus de vestiges de pierre calcaire), que par un chemin creux ; ces deux collines sont toutes deux volcaniques & formées de cendres, comme on le voit dans ce chemin ; cependant le bourg de Riegel ne se sert pas d'autre pierre à chaux, que de celle du mont Saint-Michel. Un pied de neige couvroit la carrière de la pierre à chaux de Riegel lorsque j'y fus, je ne pus l'examiner ; mais on m'assura qu'elle y étoit réellement en masse.

Le chemin creux dont je viens de parler , prouve cependant que cette colline est en partie volcanique. Comment cette pierre à chaux s'est-elle formée ? préexistoit-elle aux éruptions volcaniques , dans l'état où elle est aujourd'hui ? Je ne saurois le croire. Si son origine est plus moderne , il faut supposer que par l'éruption même , cette masse a été ainsi soulevée , puisqu'il n'est pas douteux que les volcans du Kaysersthal se soient fait jour à travers un terrain calcaire ; le voisinage des collines calcaires de la Forêt-noire , dont les couches se prolongent sous la plaine qui les devance , ce qui est prouvé par la pierre à chaux qu'on trouve à Nienbourg ; l'effervescence que les acides font avec les cendres , le tuf & une grande quantité des laves du Kaysersthal , sont autant d'argumens qui ne permettent guère d'en douter. Dès lors il est possible qu'en effet cette masse de pierre à chaux ait ainsi été soulevée , sans avoir été considérablement bouleversée , puisque l'effort des éruptions devoit être bien moins violent à l'extrémité la plus reculée de ces volcans.

J'aurois peut-être été mieux en état de juger de l'origine de cette pierre à chaux , si je l'avois vue à découvert ; il m'étoit impossible d'attendre la fonte de la neige. Je saisirai un autre moment plus favorable.

Peut-être qu'en voyant les couches inférieures & supérieures à cette masse calcaire , je pourrai tirer des conséquences plus justes de son origine.

Au nord de Riegel , les collines calcaires avancées de la Forêt-noire ne sont plus séparées du Rhin que par une belle plaine bien cultivée ; la grande route de Fribourg à Strasbourg passe constamment à leur pied ; de Hechlingen elles s'étendent derrière Kentzingen qui est à une forte lieue de Riegel ; on trouve ensuite Herbolsheim , Ettenheim , Kippenheim & Dinglingen , endroit qui n'est éloigné de la petite ville de Lohr que d'un quart de lieue. On longe constamment des collines calcaires , dont la pierre à chaux a une teinte rougeâtre martiale , & qui sont dominées par des collines d'une pierre de sable rouge , fort abondant dans toute cette partie ; car cette pierre est em-

ployée avec profusion sur toute la route, pour les ponts, les pierres, bornes, les chambranles & les bâtimens, &c. Ces dernières collines sont immédiatement appuyées aux hautes montagnes de la Forêt-noire.

A Dinglingen, la route abandonne les collines calcaires, & s'en écarte successivement de plus en plus; l'on traverse un sable rouge auquel succède, à *Kirtzel*, le gravier du Rhin que l'on ne quitte plus jusqu'à Kehl, où l'on passe le Rhin pour venir à Strasbourg.

Je terminerai ce Mémoire par quelques réflexions sur le Kaysersthul, & sur l'usage que l'on fait & que l'on pourroit faire de ces productions volcaniques.

Il est bien extraordinaire sans doute qu'on ait ignoré jusqu'aujourd'hui l'origine du Kaysersthul. Les laves sont connues dans le pays sous le nom de pierres noires; on est bien loin de soupçonner qu'elles doivent leur origine au feu. Les chroniques, les registres publics de Fribourg, de Brisach, &c. gardent le plus profond silence au sujet de ces volcans; les Auteurs les plus anciens n'en font aucune mention, à peine parlent-ils des petites variations que le cours du Rhin a éprouvées. Il n'est pas étonnant qu'ils ne disent rien du grand changement du lit du Rhin, puisqu'il doit être arrivé lors des éruptions du Kaysersthul, dont il faut renvoyer l'époque dans l'antiquité la plus reculée, quoique la tradition vulgaire du pays puisse cependant faire penser que ces événemens ne sont pas si anciens. Ces gens savent que le Rhin avoit autrefois son cours à une forte lieue au levant de son lit actuel; ils rendent même hommage aux collines volcaniques dont il baigne les pieds, de ce que ce fleuve ne les inquiète pas, non pas qu'ils croient que ces montagnes n'aient pas toujours existé, mais parce qu'ils voient qu'elles leur servent effectivement de digue. Ils assurent de plus au vieux Brisach, à Endingen, enfin dans tous les villages du Kaysersthul, qu'on avoit vu autrefois des *dragons ardents* sur ces montagnes. Cette tradition est aussi généralement reçue que la précédente; elle ne fixe point d'époque; de temps immémorial elle se communiqua de père en fils.

Ces prétendus dragons ardens sont peut-être plus modernes que les grandes éruptions du Kaysersthal ; quelques restes d'inflammation peuvent avoir donné lieu à cette tradition.

On lit dans le Collège expérimental de Muller, imprimé à Nuremberg en 1721, p. 237, que l'aiguille aimantée s'incline fortement sur le mont Eckard (*a*), cette colline qui décrit avec le vieux Brisach la moitié d'une circonférence. Je n'étois pas muni d'instrumens nécessaires pour vérifier cette assertion ; la barre aimantée que j'avois avec moi, y a été fortement agitée ; cela n'est point étonnant, puisque toutes les laves du vieux Brisach sont plus ou moins attirables à l'aimant.

On peut remarquer dans les différentes descriptions que j'ai données des laves, qu'en général les plus noires sont celles qui attirent le plus fortement l'aimant ; que les laves brunes ont la même propriété, mais pas à un si haut degré ; que les laves rouges en sont souvent entièrement privées, à moins qu'elles ne soient remplies de cristaux de schoerl noirs. L'aimant est encore insensible à l'approche de plusieurs laves grises blanchâtres. Les laves du Kaysersthal ont sur l'aimant le même pouvoir que celles du Vésuve. Voyez ma Traduction des Lettres de Ferber, p. 194.

La différence de leur vertu attractive provient de la portion de phlogistique qu'elles contiennent ; il est certain que les laves noires doivent en grande partie cette couleur à l'abondance du principe inflammable, & personne n'ignore que les substances ferrugineuses brunissent & deviennent rouges à mesure que ce principe les abandonne ; il est donc naturel que les laves rouges fassent moins d'effet sur l'aimant que les noires.

Les cristaux de schoerl volcaniques noirs agissent sur l'aimant ; il est tout simple qu'ils communiquent cette propriété aux pierres qui les renferment, quand même elles ne l'auroient pas par elles-mêmes ; de là vient que plusieurs laves rouges & quelques tufs sont attirables à l'aimant.

(a) M. Schurer, Professeur de Physique à l'Université de Strasbourg, m'a communiqué cette observation. Il m'a promis de m'accompagner dans la première course que je ferai au Kaysersthal, pour faire des expériences, de concert avec moi, à ce sujet.

J'ai trouvé que c'est-là un caractère distinctif des schoerls noirs volcaniques ; on peut les reconnoître à cette propriété de ceux qui ne le sont point. Aucuns des schoerls du mont Saint-Gothard , par exemple , n'agit sur l'aimant. Les schoerls noirs renfermés dans un grand nombre de granits que j'ai essayés , ne font aucune impression sur la barre aimantée.

Nos laves , frottées l'une contre l'autre , exhalent , ainsi que celles du Vésuve , une forte odeur de soufre.

En vain j'ai cherché au Kaysersthul l'agate noire d'Islande ; la véritable pierre-ponce , le basaltes en colonnes , & la pouzzolane proprement dite.

Il paroît que le volcan du vieux Brisach a formé un volcan séparé du Kaysersthul , dont il est éloigné d'une lieue & demie.

La plaine qui sépare le vieux Brisach de la côte méridionale de nos collines volcaniques , est vaste. Il seroit presque absurde d'avancer que les collines du vieux Brisach faisoient autrefois partie de la circonférence d'un crater , qui , en embrassant toute cette plaine , eût eu une lieue de diamètre ; que ces collines , qui n'eussent formé qu'un très-petit segment d'une aussi vaste circonférence , fussent seules restées sur pied dans la partie méridionale , tandis que du côté du levant & du couchant il n'en existe plus de vestiges. Je me persuade qu'il y avoit au centre des deux collines du vieux Brisach , un crater particulier indépendant des volcans voisins.

Les collines volcaniques qui forment le Kaysersthul peuvent être comparées aux monts Euganiens du Padouan , & au mont Albano dans l'Etat Ecclesiastique. Plus on pénètre dans le corps de ces collines , plus elles s'élèvent : la plus haute en occupe le centre. Il est à présumer que c'est de ce point que sont sorties les principales & les premières éruptions ; mais qu'il s'est fait des éruptions dans différentes parties de ces collines , qui ont produit les gouffres séparés , dont on voit encore quelques restes ; c'est ainsi qu'en petit , la lave se fit jour , il y a quelques années , au Vésuve par sept endroits divers. Les bouches de feu devinrent autant de monticules , qui se con-

vertirent, par l'éroulement de leur sommet en eux-mêmes, en autant de craters, lorsque la grande affluence de lave eut épuisé les antres ardens du Vésuve. C'est de la même manière que la bouche supérieure de l'Etna est environnée de quarante-quatre monticules volcaniques qui doivent leur existence à autant de bouches de feu.

Les collines du Kaysersthal sont éloignées des montagnes de la Forêt-noire, comme le Vésuve l'est des Apennins. J'ai déjà dit qu'il paroît que nos volcans se sont fait jour à travers des couches calcaires prolongées des collines calcaires voisines, dans la plaine d'où sont sorties les éruptions. Les éruptions du Vésuve ont également traversé les couches calcaires qui descendent des Apennins.

J'attribue ce volcan, ainsi que tous les autres volcans, à une cause locale; l'identité de leurs produits, leur proximité de la mer ou de grandes rivières, les montagnes calcaires qui les avoient ne sont-elles pas suffisantes pour en tirer des conséquences fondées? Toutes les laves contiennent du fer; les volcans encore enflammés abondent en vitriol & en soufre; ils rejettent de l'eau & de la pierre calcaire. Il faut donc admettre une effervescence souterraine occasionnée par le mélange & la dissolution des corps qui ont donné ces produits.

Les laves du vieux Brisach, du Kaysersthal & du Limbourg sont toutes formées de la même matière; mais elles diffèrent par leur couleur, leur dureté, leur porosité, & par les proportions & la figure des parties dont elles sont composées.

Elles sont généralement bonnes pour bâtir; il y en a qui réunissent la dureté à la légèreté; elles s'unissent toutes avec force avec la chaux & les mortiers. La carrière d'Achkarn fournit des blocs immenses de pierre de taille; ces blocs sont sans gerfures. On emploie aussi les laves de la grande carrière de Rothweil, pour chambranles de portes & de fenêtres, comme on le voit dans tous les villages des environs; mais elles font un mauvais effet. Les laves du Limbourg donnent une bigarrure singulière & pittoresque au château ruiné de ce nom.

Tous les villages du Kaysersthul , ceux qui sont situés sur ses lisières & dans ses environs , sont bâtis de lave ; son usage s'étend aussi loin le long du Rhin , que les habitans trouvent de l'économie , eu égard aux distances , de la préférer aux pierres de sable des montagnes de la Forêt noire.

Une seconde utilité des laves du Kaysersthul est due à sa solidité dans le feu.

Toutes les laves du Kaysersthul n'ont pas la même propriété ; les unes se fondent facilement , les autres se gersent. Il en est de même des laves d'Andernach dans le voisinage de Cologne ; on ne sauroit employer le lapis molaris Rhenanus Cronstedt , §. 294 , ou la pierre de Mennich , *Mennicher Stein* , dans le feu ; elle y éclate , & les incendies la détruisent : on n'emploie cette pierre que pour les meules. Cet usage fort ancien de la lave est peu ou point connu au Kaysersthul : je n'ai vu tailler dans aucune carrière des pierres à meules ; je ne doute pas cependant qu'on ne trouvât son compte & de l'avantage à les préférer aux grès dont nous nous servons , sur-tout lorsqu'il s'agit de moudre des matières qui doivent être bien pures ; il se détache toujours des particules du sable dont le grès est formé ; & il est en général moins solide , s'use & se fend plus aisément que de certaines laves. La carrière d'Achkarn fournilroit de très-bonnes pierres à meule.

La lave de Rothweil sert au même usage que la pierre de Bell , qu'on trouve à une lieue de Niedermennich dans le pays de Cologne. Toutes deux ont la propriété de résister à un feu violent : elles portent chacune le nom de *Backofenstein* , pierre à four ; mais celle de Rothweil est supérieure à la pierre de Bell. Les Brasseurs de Strasbourg se servoient autrefois pour la chauffe de leurs chaudières , de la pierre de Bell ; ils préfèrent aujourd'hui de beaucoup la pierre à four de Rothweil. Ils s'en servirent pour la première fois en 1765 , que l'un d'eux se trouvant dans les environs du Kaysersthul , reconnut une pierre qui avoit de la ressemblance avec celle de Bell. Apprenant en même temps qu'on l'employoit pour les fours , il se détermina , avec trois
de

de ses confrères, à en faire venir. Ils l'employèrent dès la même année ; & ces chauffes , deux fois plus durables que les précédentes , sont , malgré la révolution de 12 années , en état de servir encore nombre d'années , quoiqu'elles aient été exposées à un feu continu six mois de chaque année. Le milieu seul de ces pierres , qui forme la base des chauffes , a été un peu excavé & brûlé ; en les réparant , toute la base de la chauffe sera comme neuve (a).

On devrait faire l'essai de la pierre de Rothweil dans les grands fourneaux de fusion. On sait combien il importe que les pierres dont leurs parois intérieurs sont revêtus , soient à l'épreuve du feu & de longue durée. Les fourneaux de fusion , qui ne sont pas constamment en feu , pourroient servir à faire cet essai ; je ne doute pas qu'ils réussissent ; mais , supposé que je me trompe , cet essai ne coûteroit que la pierre & la main-d'œuvre ; on ne souffriroit point de chômage.

C'est pour les fourneaux dans lesquels on fond la mine de fer , qu'une pierre durable au feu est sur-tout d'une grande utilité ; malheureusement les essais y sont trop coûteux , quand ils ne réussissent pas. Il seroit possible que la pierre de Rothweil résistât parfaitement à un feu , tel que celui des fours , des chaudières , & qu'elle ne supportât pas le feu d'un fourneau de fonte. Qu'en résulteroit-il ? Il faudroit faire éteindre le fourneau , arracher la pierre , en remettre d'autre ; la main-d'œuvre & le prix de la pierre sont la moindre perte que cela causeroit ; mais le chômage , la quantité de charbon qu'il en coûte pour remettre un fourneau en feu , le temps nécessaire pour qu'un fourneau soit derechef bien en train , ce sont-là des raisons qui effrayent. En revanche , quel avantage n'y auroit-il pas , si la pierre de Rothweil duroit deux fois plus que la pierre de sable que nous employons en Alsace ? Nous éviterions une répara-

(a) D'après un calcul de comparaison , que m'a remis un de nos plus fameux Brasseurs , il y a une grande économie , indépendamment de celle que le bon usage produit , à préférer les pierres de Rothweil à celles de Bell pour les chauffes des Brasseriers ; car une chauffe construite avec ces dernières revient à près de 200 livres , tandis qu'elle ne coûte pas 120 liv. avec la pierre de Rothweil.

tion , & par conséquent toutes les pertes que je viens de détailler ; il y auroit d'ailleurs une grande différence du produit de la mine & de la consommation du charbon ; un fourneau , usé & élargi vers son foyer , produit bien moins de fer avec la même quantité de mines , & exige beaucoup plus de charbon.

En vain j'ai cherché de la véritable pouzzolane grêlée au Kaysersthal ; je ne dirai pas décidément qu'il n'y en a pas , mais je n'en ai point vu à découvert. Faute de pouzzolane , la cendre volcanique y abonde. On lit à la page 307 de ma Traduction des Lettres de Ferber , que ces cendres rendent aux environs de Rome le même service que la pouzzolane ; qu'on les conduit à Civita-Vecchia , pour être envoyées dans différentes parties de l'Europe où on les emploie pour maçonner dans l'eau.

La persuasion où j'étois que nos cendres du Kaysersthal devoient rendre le même service , m'a engagé à faire un grand nombre de mélanges avec de la chaux vive & éteinte , du sable , de la brique pilée , du laitier de fer , pour voir lequel de ces mélanges produiroit le meilleur ciment pour les eaux. Mais peu accoutumé à ces sortes de manipulations , & assisté d'Ouvriers peu intelligens , mes expériences n'ont pas eu le succès que je m'en promettois ; il est cependant certain que les mortiers , dans lesquels j'avois mêlé des cendres du Kaysersthal , avoient plus de tenacité & résistoient plus long-temps à l'eau que les mortiers & cimens ordinaires que j'avois faits en même temps , & ils ne se gerfoient point ; mais ils n'avoient pas acquis un degré de dureté suffisant , quoique j'eusse employé pour objet de comparaison du trass , sorte de peperino , réduit en poudre , des environs de Cologne , qui ressemble absolument aux cendres volcaniques du Kaysersthal , & dont le bon usage pour la composition des mortiers pour murer dans les eaux , est aussi généralement reconnu que celui de la pouzzolane. Je désire que quelqu'un , plus habitué que moi à ces sortes d'expériences , veuille bien les entreprendre ; j'offre de fournir autant de cendres volcaniques qu'on en voudra ; je m'estimerai heureux si le succès répond à mon attente.



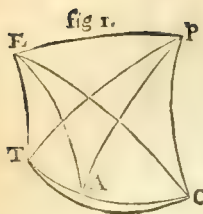
M É T H O D E
POUR TROUVER
LA SITUATION DE L'ÉQUATEUR
D'UNE PLANÈTE,
ET
L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE
PAR RAPPORT A LA ROTATION DU SOLEIL
ET DE LA LUNE;
PAR M. CAGNOLI DE VÉRONE.

Etant données trois longitudes & trois latitudes héliocentriques ou sélénocentriques d'une tache , trouver l'inclinaison de l'Équateur solaire ou lunaire , le lieu de ses nœuds , & la distance de la tache au pôle de rotation.

1. IL existe plusieurs solutions de ce problème : j'en vais proposer une qui me paroît aussi simple que rigoureuse, tirée de la Géométrie élémentaire.

Nnn ij

468 MÉTHODE POUR TROUVER LA SITUATION



Soit E (fig. 1.) le point du globe solaire ou lunaire, qui répond au pôle de l'Écliptique; P, le pôle de la rotation de l'astre; T, A, C, les trois lieux de la tache observés.

On connoît, par l'observation, les trois distances TE, AE, CE de la tache au pôle de l'Écliptique, ainsi que les différences de longitude TEA, AEC.

2. Il s'agit de trouver la valeur de PE, distance des deux pôles; la longitude du pôle P qui est à 90° de celle des nœuds, & la distance TP = AP = CP de la tache à ce même pôle.

3. Dans le triangle sphérique TEA connoissant deux côtés ET, EA avec l'angle compris, on a, par la règle de Néper, cette analogie. Le sinus de la demi-somme des côtés donnés est au sinus de leur demi-différence, comme la cotangente du demi-angle compris est à la tangente de la demi-différence des angles à la base; ou $\sin. \frac{1}{2}(EA+ET) : \sin. \frac{1}{2}(EA-ET) :: \cot. \frac{1}{2}TEA : \tan. \frac{1}{2}(ETA-EAT)$. Mais $ETA-EAT=ETP+PTA-(PAT-EAP)=ETP+EAP$, à cause du triangle isocèle (2) où $PTA=PAT$. Donc, dans le dernier terme de l'analogie, on peut substituer, au lieu de la demi-différence des angles à la base, la demi-somme des angles de position adjacens aux côtés donnés, & on aura:

$$4. \left. \begin{array}{l} \tan. \frac{1}{2} \text{ somme des angles de} \\ \text{position adjacens aux côtés donnés} \end{array} \right\} = \frac{\sin. \frac{1}{2} \text{ diff. de ces côtés} \times \cot. \frac{1}{2} \text{ angle compris}}{\sin. \frac{1}{2} \text{ somme des mêmes côtés}}$$

5. Appliquant le même raisonnement, & la même formule aux deux triangles AEC, TEC; si l'on appelle, pour abréger, T, A, C les trois angles de position ETP, EAP, ECP, on trouvera successivement la valeur de $\frac{T+A}{2}$, $\frac{A+C}{2}$, $\frac{T+C}{2}$. On aura donc trois équations & trois inconnues; & la valeur de chacun des trois angles de position sera aisée à tirer. Car il est évident, par la seule inspection, que l'on a, par exemple, $T = \frac{T+A}{2} + \frac{T+C}{2} - \frac{A+C}{2}$. Donc en général

6. Chaque angle de position est égal aux deux demi-sommes où il se trouve, moins la demi-somme où il ne se trouve pas.

7. De même, pour connoître la demi-différence correspondante à une demi-somme quelconque (j'entends par demi-sommes & demi-différences *correspondantes*, celles qui sont exprimées par les mêmes lettres), on a, par exemple :

$$\frac{T - A}{2} = \frac{T + C}{2} - \frac{A + C}{2}, \text{ ou } \frac{A - T}{2} = \frac{A + C}{2} - \frac{T + C}{2}.$$

Donc, dans tous les cas,

8. Chaque demi-différence de deux angles de position est égale à la différence des deux demi-sommes, auxquelles cette demi-différence ne correspond pas.

9. Dans les triangles PTE, PAE, PCE, à cause du côté commun PE & des côtés égaux, PT, PA, PC, les sinus des angles au pôle de l'Ecliptique sont proportionnels aux sinus des angles correspondans de position.

10. Ainsi, en prenant deux triangles quelconques, par exemple,

PET, PEA, on aura $\sin. PET : \sin. PEA :: \sin. T : \sin. A$,

d'où l'on tire (en faisant attention que

$$\sin. T + \sin. A : \sin. T - \sin. A :: \text{tang. } \frac{T + A}{2} : \text{tang. } \frac{T - A}{2},$$

& que le premier rapport peut se transformer de même)

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(PET + PEA) : \text{tang. } \frac{1}{2}(PET - PEA) :: \text{tang. } \frac{1}{2}(T + A) : \text{tang. } \frac{1}{2}(T - A).$$

Mais on vient de trouver (4) les demi-sommes, & (8) les demi-différences des angles de position; la demi-différence des angles au pôle est égale à la moitié de l'angle donné par l'observation; donc cette dernière analogie ne renfermant qu'un seul terme inconnu, fera connoître la valeur des angles au pôle de l'Ecliptique PET, PEA. On aura donc

$$\left. \begin{array}{l} 11. \text{ Tangente } \\ \frac{1}{2} \text{ somme des an-} \\ \text{gles au pôle de} \\ \text{l'Ecliptique} \end{array} \right\} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ différ. des mêmes angl. } \times \text{tang. } \frac{1}{2} \text{ somme des angl. de position correspondans}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ différence des mêmes angles de position}}.$$

12. Par le moyen de cette formule & de la précédente (4), on connoît, dans tel triangle que l'on veut, deux angles avec

470 MÉTHODE POUR TROUVER LA SITUATION

le côté compris, c'est-à-dire, l'angle au pôle de l'Écliptique; celui de position correspondant, & la distance de la tache au même pôle donnée par l'observation; & on peut trouver à la fois les deux autres côtés que l'on cherche par le moyen des formules suivantes, données de même par Néper.

$$13. \left. \begin{array}{l} \text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ différ.} \\ \text{des côtés cherchés} \end{array} \right\} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ côté donné} \times \text{fin. } \frac{1}{2} \text{ différence des angles adjacens à ce côté}}{\text{fin. } \frac{1}{2} \text{ somme des mêmes angles}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ somme} \\ \text{des côtés cherchés} \end{array} \right\} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ côté donné} \times \text{cofin. } \frac{1}{2} \text{ différ. des angles adjacens à ce côté}}{\text{cof. } \frac{1}{2} \text{ somme des mêmes angles}}.$$

14. Ainsi, dans le triangle PET, par exemple, on aura les analogies suivantes :

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (\text{PT} - \text{PE}) : \text{tang. } \frac{1}{2} \text{TE} :: \text{fin. } \frac{1}{2} (\text{PET} - \text{T}) : \text{fin. } \frac{1}{2} (\text{PET} + \text{T}).$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (\text{PT} + \text{PE}) : \text{tang. } \frac{1}{2} \text{TE} :: \text{cof. } \frac{1}{2} (\text{PET} - \text{T}) : \text{cof. } \frac{1}{2} (\text{PET} + \text{T}).$$

15. On aura donc, par quatre formules seulement, la déclinaison de la tache, l'obliquité de l'Écliptique, & le lieu du nœud. La première formule (4) n'est que préparatoire, & donne les angles de position. Les deux dernières (13) font connoître la déclinaison de la tache, & l'obliquité de l'Écliptique; & l'on conclut de la seconde (11) le lieu du nœud; en ajoutant ou en retranchant d'une des longitudes observées, par exemple, en T, le complément de l'angle au pôle TEP, suivant qu'il est obtus ou aigu, si le pôle de l'Écliptique est à la gauche de celui de l'Équateur; & suivant qu'il est aigu ou obtus, si ce même pôle est à la droite de celui de l'Équateur.

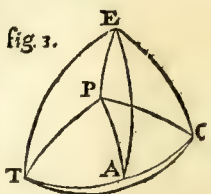
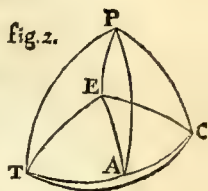
Ces formules au surplus sont commodes; car dans la seconde on n'a que deux logarithmes à chercher, les deux autres étant fournis par la première. Les analogies (14) qui répondent à la troisième & à la quatrième formule, ont aussi le second terme commun, & les deux derniers se trouvent sur la même ligne pour les deux analogies dans les Tables.

Ma méthode me paroît donc remédier à la fois & à l'inexac-

titude des approximations, & à la longueur des calculs; obstacles qui, réunis à l'imperfection des instrumens, se sont opposés jusqu'ici à ce que les élémens dont il s'agit fussent déterminés avec précision.

Je vais passer à l'application de ces formules dans les différens cas.

16. Lorsque quelqu'une des limites se trouve entre les longitudes observées, comme l'on voit dans les *fig. 2 & 3*, alors $ETA - EAT$ n'est pas égal à $ETP + EAP$, comme nous l'avons trouvé dans la première *figure*; mais $ETA - EAT$ (*fig. 2.*) = $PTA - PTE - (PAT - PAE) = PAE - PTE$, & de même (*fig. 3.*) $ETA - EAT = PTE + PTA - (PAE + PAT) = PTE - PAE$; c'est-à-dire, que, dans les deux cas représentés par ces *figures*, la première formule (4) donne la demi-différence des angles de position, au lieu de donner la demi-somme, & cela nécessairement dans deux triangles, comme TEC , TEA , ou TEC , AEC , si c'est par le dernier triangle que passe le cercle des limites.



17. La première formule donne donc nécessairement, ou trois demi-sommes des angles de position pris deux à deux, ou une demi-somme & deux demi-différences. Dans le second cas, on reconnoît immédiatement les demi-différences, parce que, sachant à peu près le lieu des nœuds, on voit par les longitudes observées quel est l'angle que traverse le cercle des limites, à moins cependant que les observations ne tombent aux environs du même cercle; mais alors, comme on a déjà vu (5) que $T = \frac{T+A}{2} + \frac{T+C}{2} - \frac{A+C}{2}$; toutes les fois que les trois valeurs données par la première formule ne pourront satisfaire à cette équation, mais qu'en appliquant aux deux plus petites valeurs les deux termes positifs du second membre, leur somme se trouvera moindre que le terme négatif, on sera sûr que ces deux plus petites valeurs sont les demi-différences, au lieu d'être les demi-sommes des angles de position.

472 MÉTHODE POUR TROUVER LA SITUATION

18. Alors, pour avoir les demi-sommes inconnues, je suppose, par exemple, que $\frac{A+C}{2}$ soit la seule demi-somme donnée par la première formule, & que l'on veuille connoître $\frac{T+C}{2}$, on aura $\frac{T+C}{2} = \frac{A+C}{2} + \frac{T-A}{2} = \frac{A+C}{2} - \frac{A-T}{2}$; c'est-à-dire, que, lorsque la première formule donne deux demi-différences des angles de position, la demi-somme correspondante à chacune des deux est égale à la somme, ou à la différence des deux autres valeurs trouvées par la même formule. Ce sera la somme, lorsque la demi-somme cherchée sera la plus grande des trois demi-sommes, c'est-à-dire, qu'elle renfermera les deux angles les plus éloignés de la ligne des limites, la différence dans les autres cas.

19. Car du rapport (9) entre les angles au pôle & ceux de position, il suit que les angles de position vont toujours en augmentant, depuis les limites où ils sont nuls, jusqu'aux nœuds où ils atteignent leur maximum.

Il fera bon de porter la précision jusqu'aux dixièmes de seconde, relativement aux angles de position, si l'on veut avoir avec exactitude les angles au pôle de l'Écliptique.

20. L'usage de la seconde formule (11) exige aussi quelques remarques particulières. Dans les deux cas de la deuxième & troisième figure, on a toujours $\text{tang. } \frac{PET+PEA}{2} = \text{tang. } \frac{TEA}{2}$. Donc lorsque la première formule (16) donnera deux demi-différences pour les angles de position, la deuxième formule donnera aussi les demi-différences des angles au pôle pour les deux cas correspondans. Car l'on vient de voir qu'alors l'angle connu n'est pas la différence, mais qu'il est la somme des angles au pôle; & par conséquent il faudra renverser la seconde formule comme il suit.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tang. } \frac{1}{2} \text{ différence} \\ \text{des angles au pôle de} \\ \text{l'Écliptique} \end{array} \right\} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ angle connu} \times \text{tang. } \frac{1}{2} \text{ différ. des angles de position correspondans}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ somme des mêmes angles de position}}.$$

21. Dans tous les cas, lorsqu'on connoît la demi-somme & la demi-différence de deux angles au pôle de l'Écliptique, il est encore nécessaire de savoir lequel des deux est le plus grand. Il ne peut y avoir aucune incertitude là-dessus, car (9) l'angle au pôle, qui correspond au plus grand angle de position, doit avoir le *sinus* le plus grand.

22. Il faut de plus connoître si la demi-somme des angles au pôle surpasse 90° . Or, comme dans la seconde formule (11) on considère ces angles pris deux à deux, combinaison qui présente trois cas différens; si l'on emploie la même formule dans ces trois cas successivement, il ne restera aucun doute sur ce point; & lors même qu'on ne l'emploiera que pour un ou deux de ces cas seulement, il y en aura encore rarement, pourvu que, pour se guider, l'on esquisse une figure, le lieu des nœuds étant connu d'avance à peu près, & par conséquent la situation de la ligne des limites. On observera de placer, dans cette figure, le pôle de l'Écliptique à la gauche de celui de l'Équateur, lorsque les distances au premier pôle observées vont en augmentant, & *vice versa* dans le cas de diminution. Cette figure & la règle (21) indiqueront quel est l'angle le plus grand, & si la demi-somme trouvée surpasse 90° . Je résoudrai ce même cas dans un exemple ci-après.

23. On a cet avantage en calculant les observations trois à trois, que l'on peut s'appercevoir s'il y a quelque erreur sensible dans les observations mêmes, ou dans les calculs préparatoires. J'ai calculé quelques-unes des Observations de Mayer, détaillées dans son excellent Mémoire, imprimé à Nuremberg en 1750, où il a suppléé, par son génie, à l'imperfection de ses instrumens. Les erreurs qu'il ne pouvoit découvrir par sa Méthode, ont pu sans doute se compenser; mais elles ont pu aussi se multiplier dans le calcul proposé par ce grand Astronome, & dans lequel il réunit un nombre quelconque d'observations. Il paroît avoir été heureux dans la détermination de la latitude sélénographique de Manilius; mais peut-être les erreurs ont-elles affecté l'inclinaison & le nœud. J'ai calculé trois

474 MÉTHODE POUR TROUVER LA SITUATION

observations faites avec de meilleurs instrumens , & avec le plus grand soin, par M. de la Lande (Astronom. vol. III, art. 3206.) Elles m'ont donné , pour l'inclinaison , $1^{\circ} 42' 43''$, telle à peu près qu'elle se conclut des mêmes latitudes extrêmes de Mayer, tandis que sa formule collective réduit cet élément à $1^{\circ} 30'$. J'ai trouvé , pour la déclinaison de Manilius, $14^{\circ} 36' 7''$, & le nœud de l'Équateur lunaire plus avancé de $2^{\circ} 51'$ que celui de l'orbite selon l'ordre des signes.

Quand on aura calculé rigoureusement trois à trois un assez grand nombre d'observations faites par des bons instrumens , & que l'on parviendra à n'avoir que des différences légères dans les résultats , il me semble qu'un milieu entre ces calculs aura un degré de certitude que l'on ne peut espérer des méthodes d'approximation.

24. Je crois devoir terminer en donnant un exemple de ma Méthode. Pour cela, je choisis les trois observations d'une tache du Soleil faites par M. de la Lande, & insérées dans le IV^e vol. de son Astronomie, pag. 724; mais au lieu de la première longitude & de la première latitude rapportées par erreur dans cet article, j'emploie les élémens que m'a donnés M. de la Lande, & desquels est effectivement déduit le calcul, qu'il donne au même endroit, de ces observations:

1. ^{re} Longit. observée le 14 Juin 1775	$7^{\circ} 8' 33'' \dots$	} Différence... $57^{\circ} 23' = TEA.$
2. ^e Longit..... le 18	$9^{\circ} 5' 56'' \dots$	
3. ^e Longit..... le 21	$10^{\circ} 18' 58'' \dots$	
		Diff. totale... $100^{\circ} 25' = TEC.$
1. ^{re} Distance au pôle de l'Écliptique	$90^{\circ} 38' = TE$	} Différence... $6^{\circ} 53' = AE - TE.$
2. ^e Dist.....	$97^{\circ} 31' = AE$	
3. ^e Dist.....	$101^{\circ} 35' = CE$	
		Diff. totale... $10^{\circ} 57' = CE - TE.$

On voit par ces données, que c'est le cas de la première figure; car les distances au pôle vont en augmentant; donc (22) le pôle de l'Écliptique doit être à gauche: le nœud est à $8^{\circ} 10'$ environ; donc la ligne des limites ne passe pas par les triangles, & la première formule (4) doit donner trois demi-sommes des angles de position.

FORMULE I. (4)

$\cot. \frac{1}{2} T E C$	$50^{\circ} 12' 30''$	9.9206044
$\sin. \frac{1}{2} (C E - T E)$	$5 28 30$	8.9796004
ajoutant la première distance.....	$90 38 0$	
comp. arithm. $\sin. \frac{1}{2} (C E + T E)$	$96 6 30$	0.0024727
$\tan g. \frac{1}{2} (C + T)$	$4 34 10, 6$	8.9026775
$\cot. \frac{1}{2} A E C$	$21 31$	0.4042321
$\sin. \frac{1}{2} (C E - A E)$	$2 2$	8.5499948
ajoutant la deuxième distance.....	$97 31$	
comp. $\sin. \frac{1}{2} (C E + A E)$	$99 33$	0.0060609
$\tan g. \frac{1}{2} (C + A)$	$5 12 52, 0$	8.9602878
$\cot. \frac{1}{2} T E A$	$28 41 30$	0.2617785
$\sin. \frac{1}{2} (A E - T E)$	$3 26 30$	8.7783850
ajoutant la première distance.....	$90 38$	
comp. $\sin. \frac{1}{2} (A E + T E)$	$94 4 30$	0.0010993
$\tan g. \frac{1}{2} (A + T)$	$6 16 31, 6$	9.0412628
(8) $\frac{1}{2} (A - T)$	$0 38 41, 4$	
(6) $\left\{ \begin{array}{l} A = \\ T = \end{array} \right.$	$6 55 13, 0$ $5 37 50, 2$	

FORMULE II. (11)

$\tan g. \frac{1}{2} (A + T)$		9.0412628
$\cot. \frac{1}{2} (A - T)$		1.9486569
$\tan g. \frac{1}{2} T E A$	$28^{\circ} 41' 30''$	9.7382215
$\tan g. \frac{1}{2} (T E P + A E P)$	$79 24 27$	0.7281412

Donc par la figure $\left\{ \begin{array}{l} T E P = \\ A E P = \end{array} \right.$ 108 5 57
50 42 57

Mais parce que A est plus grand que T, (21) $\sin. A E P$ doit être plus grand que $\sin. T E P$.

On ne peut concilier cette règle avec la figure, qu'en prenant (22) pour $\frac{T E P + A E P}{2}$, au lieu

de..... $79^{\circ} 24' 27''$

Le supplément..... $100 35 33$

Ajoutant $\frac{1}{2} T E A$ $28 41 30$

On a T E P..... $129 17 3$

Retranchant (14) T..... $5 37 50$

Différence..... $123 39 13$

Et par conséquent $\frac{1}{2} (T E P - T)$ $61 49 36$

Ajoutant T, l'on aura $\frac{1}{2} (T E P + T)$ $67 27 26$

FORMULES III & IV. (13)

$\tan g. \frac{1}{2} T E$	$45^{\circ} 19'$	0.0048007			0.0048007
$\sin. \frac{1}{2} (T E P - T)$		9.9452338		cos.....	9.6740713
comp. $\sin. \frac{1}{2} (T E P + T)$		0.0345191		comp. cos.....	0.4163783
$\tan g. \frac{1}{2} (P T - P E)$	$45^{\circ} 58' 53''$	9.9845536	$\tan g. \frac{1}{2} (P T + P E)$	$51^{\circ} 14' 0''$	0.0952503
			$\frac{1}{2} P T - P E$	$43 58 53$	

Distance de la tache au pôle boréal du Soleil... $95 12 53$

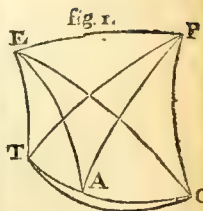
Inclinaison de l'Equateur solaire sur l'Ecliptique $7 15 7$

Longitude, observée, du point T..... $7^{\circ} 8' 33''$

Ajoutant (15) le complément de T E P..... $1 9 17$

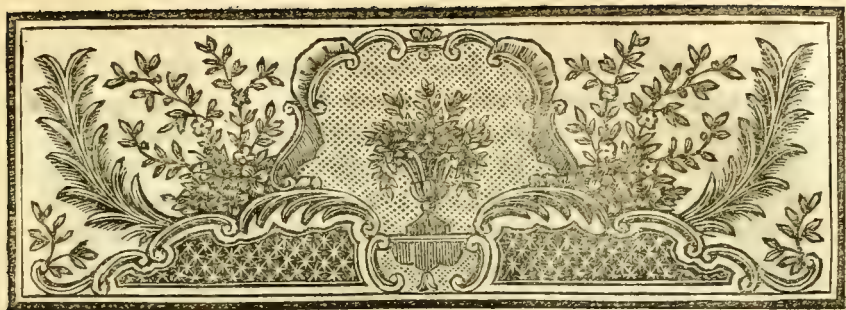
On trouve le lieu du nœud..... $8 17 50$

Si l'on cherche les deux autres demi-sommes $\frac{A E P + C E P}{2}$, $\frac{T E P + C E P}{2}$, & que l'on résolve les deux autres triangl. A E P, C E P, on ne trouvera pas la moindre différ. dans les résultats.



25. Les calculs préparatoires , par lesquels on détermine les longitudes , & les latitudes vues du centre de l'astre , me paroissent pouvoir être abrégés. On cherche ordinairement , par les différences de longitude & de latitude observées , l'arc de distance , ainsi que l'angle au centre apparent de l'astre ; puis on cherche l'angle au pôle de l'Écliptique. Mais l'angle au centre étant déjà trouvé dans l'opération que l'on fait pour convertir les différences d'ascension droite & de déclinaison en différences de longitude & de latitude , il seroit plus court d'employer la proportion , qui sert à trouver l'arc de distance , pour chercher , au lieu de cet arc , la différence de longitude vue du centre de l'astre. Cette différence est la même chose , quant au Soleil , que l'angle au pôle de l'Écliptique. Pour ce qui regarde la Lune , il faudra toujours tenir compte de sa latitude.





M É M O I R E

S U R

L A C O U R B U R E

D E S S U R F A C E S ,

*Par M. MEUSNIER, Lieutenant en premier,
Surnuméraire au Corps Royal du Génie, Corres-
pondant de l'Académie.*

LU A L'ACADÉMIE LES 14 ET 21 FÉVRIER 1776.

LA Théorie de la Courbure des lignes courbes est fondée sur cette propriété, que chacun de leurs élémens peut être regardé comme une portion de cercle, c'est-à-dire, comme engendré par la rotation d'un point. L'objet de ce Mémoire est d'assigner une génération qui convienne de même à tout élément de surface : on conçoit quelle facilité la solution de ce problème doit donner dans toutes les questions où il s'agira de connoître la forme d'un élément de surface, & par conséquent dans la question de la Courbure où on ne demande autre chose.

La marche que nous suivons dans cette recherche, est entièrement analogue à celle qu'on a suivie pour les lignes ; en effet, voici comme on a dû raisonner : La Courbure d'une ligne est évidemment ce qui fait que d'un point à un autre la tangente change de position, & plus ce changement est considérable, plus on peut dire que la Courbure est grande : donc, si l'on conçoit deux tangentes en deux points infiniment voisins, l'angle formé par ces tangentes, mesure la Courbure de l'élément compris entre ces deux points, & l'expression de cet angle contient toute la Théorie de la Courbure ; mais on a observé que cette formule dépend uniquement des équations aux différences premières & secondes de l'élément dont il s'agit ; d'où il suit qu'une Courbe tangente à cet élément, & ayant au contact la même équation aux différences secondes, aura aussi la même Courbure. Or, il est toujours possible d'assigner un cercle qui ait cette propriété ; on peut donc regarder tout élément de Courbe comme une portion d'un certain cercle.

De même, disons-nous, la Courbure d'une surface consiste en ce que d'un point à un autre le plan tangent varie : ainsi la Courbure d'un élément de surface dépend de la formule qui exprime le changement du plan tangent dans l'étendue de cet élément ; mais nous verrons bientôt que cette formule dépend elle-même des équations aux différences premières & secondes : donc une surface tangente à l'élément aura au contact la même Courbure que lui, si elle a la même équation aux différences secondes, & l'élément en question pourra être regardé comme faisant portion de cette surface. Ainsi notre problème se réduit à trouver une surface qui ait la propriété analytique que nous venons d'énoncer, & dont la génération soit connue & simple, parce qu'on pourra attribuer la même génération à l'élément dont il s'agit.

M. Euler a traité la même matière dans un fort beau Mémoire, imprimé en 1760 parmi ceux de l'Académie de Berlin. Cet illustre Géomètre envisage la question d'une manière différente de celle que nous venons d'exposer ; il fait dépendre la

Courbure d'un élément de surface, de celle des différentes sections qu'on y peut faire en le coupant par des plans; c'est pourquoi il commence par déterminer le rayon de Courbure d'une section faite dans un élément de surface par un plan quelconque. Il restreint ensuite cette détermination au cas où le plan coupant est perpendiculaire sur le plan tangent à l'élément qu'on considère, & découvre cette belle propriété : qu'entre tous les plans coupans qui sont dans ce cas, celui qui donne la section de plus grande Courbure, fait, avec celui qui donne la section de moindre Courbure, un angle droit, quelle que soit la nature de la surface dont il s'agit. Il fait voir enfin que les rayons de Courbure de ces deux sections suffisent pour déterminer tous les autres; d'où il conclut qu'on connoîtra la Courbure d'un élément de surface, pourvu qu'on ait cette Courbure dans les deux sens où elle est la moindre & la plus grande.

Il est clair que la question de la Courbure est résolue dans ce Mémoire; aussi ne prétendons-nous ici que présenter la même question sous un autre point de vue, en la faisant dépendre d'une propriété intéressante; savoir, qu'il existe une génération qui convient à tout élément de surface : il manquoit d'ailleurs à cette Théorie plusieurs résultats importants, que nous donnons ici.

PROBLÈME PREMIER.

1. *Déterminer les différentes positions que peut avoir le plan tangent dans l'étendue d'un élément de surface ?*

SOLUTION. Soit en A (*fig. 1.*) l'élément dont il s'agit, & FIGURE 1.
soient pris, dans le plan tangent à cet élément, deux axes AB, AC perpendiculaires entre eux; soit AD un troisième axe perpendiculaire aux deux autres, & concevons la surface à laquelle appartient l'élément proposé, représentée par une équation exprimée en coordonnées parallèles aux trois axes; soient pour un point N de cette surface AP, PM, MN ces

trois coordonnées que je nomme u , v , t respectivement, & supposons qu'on ait :

$$dt = U du + V dv; dU = U' du + V' dv; dV = V' du + \Upsilon dv;$$

U, V, U', V', Υ étant des fonctions de u & v .

Cela posé, si l'on nomme u' , v' , t' les coordonnées du plan tangent en N , on sait que l'équation de ce plan est :

$$t - Uu - Vv = t' - Uu' - Vv'.$$

Supposons maintenant que le point N devienne en V infiniment près du point A , & voyons ce que devient alors l'équation du plan tangent. Pour cela, nommons c, e, f respectivement les valeurs que prennent au point A les fonctions U', V', Υ ; de sorte qu'en A on ait :

$$dU = c du + e dv; dV = e du + f dv.$$

Il est clair, d'après cela, que l'équation aux différences secondes, qui est généralement :

$$ddt = U dd u + V dd v + U' du^2 + 2 V' du dv + \Upsilon dv^2$$

deviendra $ddt = c du^2 + 2 e dudv + f dv^2$; (A)

parce que notre surface étant en A tangente au plan BAC , on a $U = 0$, $V = 0$.

Cela posé, les coordonnées $A\pi, \pi\mu, \mu\nu$ étant infiniment petites, on peut, dans l'équation du plan tangent, leur substituer leurs différences; alors le premier membre de cette équation devient $dt - U du - V dv$, & s'évanouit, puisque généralement $dt = U du + V dv$: quant au second membre, il faut remarquer que les quantités U, V , étant nulles en A , sont en v infiniment petites; on peut donc aussi leur substituer leurs différences; par ce moyen l'équation du plan tangent devient $t' = u [c du + e dv] + v' [e du + f dv]$, dans laquelle les différences du, dv expriment les coordonnées $A\pi, \pi\mu$ du point v auquel appartient le plan tangent dont il s'agit actuellement.

Les coefficients de u' & v' étant infiniment petits dans cette équation, il s'ensuit qu'à des coordonnées u', v' , de grandeur finie, répond une ordonnée t' infiniment petite, c'est-à-dire, que

le

le plan tangent en v fait, avec le plan BAC , un angle infiniment petit.

Cet angle mesure de combien le plan tangent a varié de A en v ; ainsi étant donnée l'expression de cet angle, quel que soit le point v , la Courbure de l'élément de surface sera déterminée dans tous les sens possibles. Or on fait qu'étant donnée l'équation d'un plan de la forme ci-dessus, le *sinus* de l'angle que fait ce plan avec celui des coordonnées horizontales, est la racine de la somme des carrés des coefficients de ces coordonnées dans l'équation du plan. Donc, à cause que l'angle que nous cherchons étant infiniment petit, on peut le prendre pour son *sinus*, nous aurons en le nommant ϵ : $\epsilon = \sqrt{[c\,du + e\,dv]^2 + [e\,du + f\,dv]^2}$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE PREMIER.

2. Si l'on conçoit une surface tangente en A au plan BAC , & ayant au contact la même équation (A) aux différences secondes, c'est-à-dire, pour laquelle les quantités c, e, f soient les mêmes qu'ici, il est clair que l'équation du plan tangent en v , & l'expression de l'angle ϵ seront les mêmes que pour l'élément dont il s'agit, quel que soit le point v ; donc toute surface tangente à l'élément proposé, & ayant au contact la même équation aux différences secondes, aura aussi la même Courbure.

COROLLAIRE II.

3. Donc la surface dont l'équation est :

$$z = \frac{c\,u^2 + 2\,e\,uv + f\,v^2}{2} \quad (B).$$

a en A la même Courbure que l'élément proposé; car elle lui est tangente, & donne, étant différenciée, la même équation aux différences secondes. Donc tout élément de surface peut être regardé comme faisant portion de la surface dont l'équation est ci-dessus écrite.

COROLLAIRE III.

4. Soit N un point de la surface que nous venons de
Tome X. P p p

considérer; qu'on mène dans le plan BAC une ligne quelconque AG , du point M soit menée Mp perpendiculaire sur AG , & soit transformée l'équation (B) par rapport aux nouvelles coordonnées Ap , pM ; pour cela, prenons les dénominations suivantes: angl. $CAG = \phi$; $Ap = u'$; $pM = v'$, MN étant toujours nommée t ; du point p soient menées pq , pr parallèles aux axes AB , AC , les triangles Apq , $p r M$ donneront :

$Aq = Ap \cos. \phi = u' \cos. \phi$; $p q = Ap \sin. \phi = u' \sin. \phi$;
 $pr = pM \sin. \phi = v' \sin. \phi$; $rM = pM \cos. \phi = v' \cos. \phi$;
 donc, à cause de $Ap = Aq - pr$; $PM = pq + rM$, nous aurons
 $u = u' \cos. \phi - v' \sin. \phi$; $v = u' \sin. \phi + v' \cos. \phi$; mettant pour
 u , v , ces valeurs dans l'équation (B), elle devient :

$$t = \left\{ \begin{array}{l} u'^2 \left[\frac{c \cos. \phi^2 + 2 e \sin. \phi \cos. \phi + f \sin. \phi^2}{2} \right] \\ + 2 u' v' \left[\frac{e (\cos. \phi^2 - \sin. \phi^2) - (c-f) \sin. \phi \cos. \phi}{2} \right] \\ + v'^2 \left[\frac{c \sin. \phi^2 - 2 e \sin. \phi \cos. \phi + f \cos. \phi^2}{2} \right] \end{array} \right\}$$

faisons en sorte que le terme qui contient le produit $u' v'$ des coordonnées s'évanouisse; pour cela, posons
 $e (\cos. \phi^2 - \sin. \phi^2) - (c-f) \sin. \phi \cos. \phi = 0$, c'est-à-dire,
 $\text{tang. } 2 \phi = \frac{2e}{c-f}$, & notre équation prend cette forme :

$$t = \left\{ \begin{array}{l} u'^2 \left[\frac{c \cos. \phi^2 + 2 e \sin. \phi \cos. \phi + f \sin. \phi^2}{2} \right] \\ + v'^2 \left[\frac{c \sin. \phi^2 - 2 e \sin. \phi \cos. \phi + f \cos. \phi^2}{2} \right] \end{array} \right\} \quad (C)$$

alors il est évident que la surface est symétrique de part & d'autre de l'axe AG , puisque, soit que v' soit positive ou négative, la valeur de t est la même.

5. Donc si l'on mène une ligne AG , telle que $\text{tang. } 2 \phi = \frac{2e}{c-f}$,
 notre surface sera symétrique de part & d'autre de cette ligne;
 mais cette équation donne pour 2ϕ deux valeurs qui diffèrent
 entre elles de 180° , c'est-à-dire, qu'elle indique pour ϕ deux

valeurs différentes l'une de l'autre de 90° , ou, pour AG, deux positions perpendiculaires entre elles; il existe donc encore un axe IL perpendiculaire sur AG de part & d'autre, duquel notre surface est symétrique; & comme tout ce que nous disons de cette surface peut s'affirmer de l'élément dont il est ici question, il s'ensuit que *tout élément de surface est symétrique de manière à pouvoir être partagé en quatre parties semblables.*

6. Il est clair que la surface dont nous avons parlé jusqu'ici, aura la même équation aux différences secondes que l'élément de surface dont il s'agit, quels que soient les axes par rapport auxquels on prendra cette équation; si donc on différencie deux fois l'équation (C), & que l'on fasse $u' = 0$, $v' = 0$ l'équation suivante

$$d^2t = \left\{ \begin{array}{l} du^2 [c \cos. \varphi^2 + 2 e \sin. \varphi \cos. \varphi + f \sin. \varphi^2] \\ + dv^2 [e \sin. \varphi^2 - 2 e \sin. \varphi \cos. \varphi + f \cos. \varphi^2] \end{array} \right\} \quad (D)$$

à laquelle on arrivera par ce moyen, sera aussi l'équation aux différences secondes de notre élément de surface par rapport aux axes AG, IL.

THÉORÈME.

7. *Tout élément de surface peut être regardé comme engendré par la rotation d'un petit arc de cercle autour d'un axe parallèle au plan tangent à cet élément.*

DÉMONSTRATION. Soit fEF (fig. 1.) un axe parallèle au plan BAC, coupant en E l'axe AD, & dont la projection tombe sur AG; soit kAh un arc de cercle tangent en A à la ligne AG, & dont le plan passe par EF; supposons que cet arc de cercle, en tournant autour de EF, engendre une surface de révolution, le théorème actuel sera démontré, si l'on fait voir qu'on peut assigner au rayon de l'arc kAh & à la distance EA des valeurs telles que la surface ainsi engendrée ait en A la même équation aux différences secondes que l'élément proposé; car il pourra être regardé comme faisant portion de cette surface, & par conséquent comme engendré de la même manière.

484 MÉMOIRE SUR LA COURBURE

Soit donc le rayon de l'arc $k A h = r$; $E A = \rho$; cela posé ; je dis que la surface engendrée par l'arc $k A h$ est évidemment symétrique de la manière énoncée ci-dessus : son équation aux différences secondes est donc de même forme que l'équation (D), c'est-à-dire, $d d t = A d u'^2 + B d v'^2$.

8. Pour déterminer A & B , remarquons que si nous coupons la surface de révolution dont il s'agit, par un plan vertical passant par $A G$, la section sera l'arc $k A h$; qu'ainsi faisant dans notre équation $d v' = 0$, elle doit devenir l'équation aux différences secondes de l'arc $k A h$, c'est-à-dire, $d d t = A d u'^2 = \frac{d u'^2}{r}$. Donc $A = \frac{1}{r}$; de même si on coupe la surface par un plan vertical passant par $I L$ perpendiculaire sur $A G$, la section sera un arc $i A l$, dont le rayon est $E A = \rho$. Donc si l'on fait $d u' = 0$, l'équation ci-dessus doit devenir celle de cet arc, c'est-à-dire, $d d t = B d v'^2 = \frac{d v'^2}{\rho}$. Donc $B = \frac{1}{\rho}$; donc l'équation aux différences secondes de notre surface de révolution est $d d t = \frac{d u'^2}{r} + \frac{d v'^2}{\rho}$ (E).

9. Maintenant cette équation devant être la même que celle de notre élément, égalons-la terme à terme à l'équation (D), nous aurons :

$$\frac{x}{r} = c \cos. \varphi^2 + 2 e \sin. \varphi \cos. \varphi + f \sin. \varphi^2 = \frac{c + f + 2 e \sin. 2 \varphi + (c - f) \cos. 2 \varphi}{2},$$

$$\frac{y}{\rho} = c \sin. \varphi^2 - 2 e \sin. \varphi \cos. \varphi + f \cos. \varphi^2 = \frac{c + f - 2 e \sin. 2 \varphi - (c - f) \cos. 2 \varphi}{2}.$$

Mais l'équation $\text{tang. } 2 \varphi = \frac{2 e}{c - f}$ donne

$$\sin. 2 \varphi = \frac{\pm 2 e}{\sqrt{(c - f)^2 + 4 e^2}}; \cos. 2 \varphi = \frac{\pm (c - f)}{\sqrt{(c - f)^2 + 4 e^2}},$$

substituant ces valeurs, nous aurons

$$r = \frac{2}{c + f \pm \sqrt{(c - f)^2 + 4 e^2}}; \rho = \frac{2}{c + f \mp \sqrt{(c - f)^2 + 4 e^2}}.$$

Voilà donc quelles doivent être les quantités r & ρ , pour que la

génération que nous avons énoncée puisse convenir à l'élément que nous considérons.

10. Qu'on remarque maintenant que le radical qui affecte les valeurs de r & ρ couvre la somme de deux carrés qui est nécessairement positive, que les expressions de $\sin. 2\phi$ & $\cos. 2\phi$ sont toujours renfermées entre les limites $+1$ & -1 , on verra que jamais nos résultats ne peuvent devenir imaginaires. Donc notre théorème est vrai dans tous les cas.

C. Q. F. D.

11. Il est clair que la position de l'axe de rotation est maintenant déterminée, puisque sa projection sur le plan BAC' est donnée par l'équation $\text{tang. } 2\phi = \frac{2e}{c-f}$, & que nous avons l'expression de EA ou de sa distance au plan BAC ; rien par conséquent n'est plus aisé que d'exprimer cette position par deux équations analogues à celles dont on se sert pour représenter une Courbe tracée dans l'espace. Pour cela, soient u, v, t les coordonnées de chaque point de l'axe de rotation, on a évidemment, pour tous ses points, $t = EA = \rho$; de plus $\frac{v}{u} = \text{tang. } \phi$; mais $\text{tang. } \phi = \frac{1 + \sin. 2\phi - \cos. 2\phi}{1 + \sin. 2\phi + \cos. 2\phi}$; mettant donc pour $\rho, \sin. 2\phi$, & $\cos. 2\phi$ leurs valeurs, on aura, pour l'axe de rotation, les équations suivantes :

$$t = \frac{2}{c+f \pm \sqrt{(c-f)^2 + 4e^2}}; \quad \frac{v}{u} = \frac{-(c-f) \pm \sqrt{(c-f)^2 + 4e^2}}{2e}.$$

12. Nous avons vu (§) qu'il y a pour ϕ deux valeurs qui satisfont également, c'est-à-dire, deux positions pour AG ou pour la projection de l'axe de rotation; il y a donc deux axes dont les projections sont perpendiculaires entre elles, & qui conviennent l'un & l'autre à la génération de l'élément de surface. C'est ce que signifient les doubles signes qui affectent les valeurs de r & ρ , ainsi que les équations ci-dessus, dans lesquelles, si le signe supérieur convient à l'axe EF , le signe inférieur conviendra à un autre axe $\phi e \Phi$, coupant en e l'axe AD , de telle sorte que Ae soit égale au rayon de l'arc kAh .

& autour duquel l'arc iAL , d'un rayon égal à EA , engendrera aussi, par sa rotation, l'élément de surface dont il est ici question.

13. Au reste, on remarquera que, quelque signe que l'on prenne, le système des quantités r & ρ ne change point; c'est pourquoi nous prendrons désormais le signe supérieur, & nous écrirons :

$$r = \frac{2}{c+f+\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}; \quad \rho = \frac{2}{c+f-\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}.$$

14. Telle est la génération propre à tout élément de surface que nous nous proposons de trouver; elle rend, comme on voit, la question de la Courbure bien simple, puisqu'elle fait dépendre la forme de tout élément de surface de deux quantités, savoir, r & ρ . Nous nommons à cause de cela ces quantités, *rayons de Courbure* des surfaces. Nous verrons dans la suite les différentes formes que peut avoir un élément de surface suivant les différentes valeurs de r & ρ .

Pour voir par quoi nos deux rayons de Courbure sont suppléés dans le Mémoire de M. Euler, & pour jeter en même temps plus de jour sur cette matière, résolvons le problème suivant.

PROBLÈME II.

15. *Déterminer le rayon de Courbure de la section faite dans un élément de surface par un plan quelconque donné de position.*

FIGURE 2. SOLUTION. Soient (*fig. 2.*) AL , AG , AD les mêmes axes que dans la *fig. 1*, c'est-à-dire, que l'élément de surface que nous considérons est symétrique de part & d'autre des axes AL , AG . Soit N un point de la surface à laquelle appartient l'élément, & soient AP , PM , MN les coordonnées de ce point.

Supposons que AQ soit l'intersection du plan LAG avec

celui qui coupe l'élément, & soit AN la courbe suivant laquelle la surface est coupée, le problème que nous nous proposons ici consiste à trouver le rayon de Courbure de la courbe AN au point A.

Pour cela, du point N menons NQ perpendiculaire sur AQ, joignons les points Q & M par la droite QM, l'angle MQN mesurera l'inclinaison du plan coupant; regardons de plus AQ, QN comme des coordonnées de la courbe AN prises dans son plan; tout cela posé, gardons les dénominations: $AP = u'$; $PM = v'$; $MN = t$. Soit de plus: $AQ = x$; $QN = y$; $\text{angl. } QAG = \pi$; $\text{angl. } NQM = \omega$. Rappelons-nous que (8) l'équation aux différences secondes de l'élément dont il s'agit, peut être mise sous cette forme:

$$ddt = \frac{du'^2}{r} + \frac{dv'^2}{\rho} (E).$$

Maintenant nous trouverons, par le moyen des triangles AqQ, QrM, & par le même procédé dont nous avons fait usage dans le corollaire troisième du problème premier.

$$\overline{AP} = \overline{AQ} \cdot \text{cos. } QAG - \overline{QM} \cdot \text{sin. } QAG$$

$$\overline{PM} = \overline{AQ} \cdot \text{sin. } QAG + \overline{QM} \cdot \text{cos. } QAG$$

de plus le triangle NQM donne:

$$\overline{QM} = \overline{QN} \cdot \text{cos. } NQM = y \cdot \text{cos. } \omega; \overline{MN} = \overline{QN} \cdot \text{sin. } NQM = y \cdot \text{sin. } \omega.$$

Mettant pour QM la valeur dans les deux équations ci-dessus, & les traduisant suivant nos dénominations, ainsi que celle qui donne la valeur de MN, il viendra:

$$u' = x \cdot \text{cos. } \pi - y \cdot \text{cos. } \omega \cdot \text{sin. } \pi.$$

$$v' = x \cdot \text{sin. } \pi + y \cdot \text{cos. } \omega \cdot \text{cos. } \pi.$$

$$t = y \cdot \text{sin. } \omega.$$

Différencions maintenant ces équations pour la portion infiniment petite de la courbe AN qui est en A, en observant de faire $dy = 0$; puisque la courbe AN est tangente en A à la droite AQ, nous aurons:

$d u' = d x . \cos . \pi$; $d v' = d x . \sin . \pi$; $d d t = d d y . \sin . \omega$.
 Mettons ces valeurs de $d u'$, $d v'$, $d d t$, dans l'équation (E),
 elle deviendra :

$$d d y = d x^2 \left[\frac{r \sin . \pi^2 + \rho \cos . \pi^2}{r \cdot \rho \sin . \omega} \right],$$

équation aux différences secondes de la courbe A N au point A.

Ce'a posé, si nous nommons $d s$ l'élément de la courbe A N, R son rayon de Courbure en un point quelconque, on a généralement $R = \frac{d s^3}{d x d d y}$; $d x$ étant supposé constant, comme nous sommes maîtres de le faire ; mais au point A on a $d s = d x$. La valeur de R devient donc $R = \frac{d x^2}{d d y}$, ou mettant pour $d d y$ sa valeur, il vient

$$R = \frac{r \rho \sin . \omega}{r \sin . \pi^2 + \rho \cos . \pi^2}, \text{ ou bien } R = \frac{2 r \rho \sin . \omega}{r + \rho - (r - \rho) \cos . 2 \pi}$$

C. Q. F. T.

16. Bornons-nous, comme fait M. Euler, au cas où le plan coupant est perpendiculaire sur le plan tangent, & cherchons pour lors le *maximum* & le *minimum* de R. Le *sinus* de l'angle ω étant = 1, la valeur de R devient : $R = \frac{2 r \rho}{r + \rho - (r - \rho) \cos . 2 \pi}$.

Le numérateur de cette expression étant constant, il suffit, pour avoir le *maximum* ou le *minimum*, d'égaliser à zéro la différentielle du dénominateur, ce qui donne $\sin . 2 \pi = 0$. Donc $\cos . 2 \pi = \pm 1$, valeurs qui, mises l'une & l'autre dans celle de R, donnent $R = r$ ou $R = \rho$, l'une de ces deux expressions convenant au *maximum*, l'autre au *minimum*. Ce qui fait voir que nos deux rayons de Courbure sont la même chose que le plus grand & le plus petit entre les rayons de Courbure des sections faites dans l'élément de surface par des plans qui lui soient perpendiculaires.

17. Le résultat $\cos . 2 \pi = \pm 1$ donne $\pi = 0$, ou $\pi = 90^\circ$.
 Ce qui démontre cette propriété donnée par M. Euler : que les
 deux

deux plans qui donnent la plus grande & la moindre Courbure sont perpendiculaires entre eux.

18. Au lieu de considérer les plans coupans perpendiculaires sur l'élément, c'est-à-dire, ceux qui passent tous par la normale, prenons ceux qui passent tous par une même ligne A Q prise dans le plan tangent. Pour tous ces plans, l'angle π est le même; nous pouvons donc mettre l'expression générale du rayon de Courbure sous cette forme $R = H \sin. \omega$, H étant une constante. Entre tous ces plans, il en est un perpendiculaire sur le plan tangent, & pour lequel on a $\sin. \omega = 1$: donc, si l'on nomme R' le rayon de Courbure de la section faite par ce plan, on aura $R' = H$. Donc $R = R' \sin. \omega$, équation qui fait voir qu'étant donné le rayon de Courbure de la section faite par le plan perpendiculaire sur le plan tangent, tous les autres sont déterminés par une relation indépendante de la nature de la surface.

Si l'on imagine une sphère tangente en A au plan L A G, & qu'on nomme R'' son rayon, cette sphère étant coupée par les mêmes plans que notre élément de surface, & R étant le rayon de Courbure d'une section quelconque, il est évident qu'on aura comme ci-dessus $R = R'' \sin. \omega$, puisque le plan perpendiculaire sur le plan tangent coupe cette sphère suivant son grand cercle, dont le rayon est R'' . Donc, si $R' = R''$, on aura, pour la sphère comme pour l'élément de surface, $R = R' \sin. \omega$. D'où suit cette propriété curieuse: Si l'on coupe un élément de surface par un plan qui lui soit perpendiculaire, qu'on imagine une sphère qui lui soit tangente, & dont le rayon soit égal au rayon de Courbure de la section dont nous venons de parler; qu'on fasse passer par l'intersection du plan coupant avec le plan tangent un autre plan quelconque, il fera, dans la sphère & dans l'élément de surface, des sections d'égale Courbure.

Mais passons à l'examen des différentes formes que peut avoir une surface relativement à la Courbure, & donnons les caractères analytiques auxquels on peut les reconnoître.

19. Les expressions que nous avons trouvées pour les rayons de Courbure peuvent être tantôt positives, tantôt négatives; pour savoir ce qu'il en doit résulter pour la forme de l'élément auxquels ils appartiennent, reprenons la formule $R = \frac{2 r \rho \sin. \omega}{r + \rho - (r - \rho) \cos. 2 \pi}$ qui est celle du rayon de Courbure d'une section quelconque, & mettons-la sous cette forme $R = \frac{2 r \rho \sin. \omega}{r (1 - \cos. 2 \pi) + \rho (1 + \cos. 2 \pi)}$.

Cela posé, ou r & ρ sont positifs, ou ils sont négatifs, ou ils sont de signe contraire.

20. Dans le premier cas, le dénominateur de R est toujours positif, puisque les coefficients de r & ρ le sont, quel que soit π ; donc alors R lui-même est toujours positif; d'où il suit que, dans ce cas, on ne sauroit faire, dans l'élément dont il s'agit, que des sections concaves, c'est-à-dire, que l'élément lui-même est concave.

21. Si r & ρ sont négatifs, le numérateur de R n'en est pas moins positif; mais le dénominateur est négatif, puisque les coefficients de r & ρ sont toujours positifs; donc, dans ce cas, toutes les sections qu'on peut faire dans l'élément sont convexes, c'est-à-dire, que l'élément lui-même est convexe.

22. Reprenons les expressions de rayon de Courbure r & ρ que nous avons données (13), & transformons-les comme il suit:

$$r = \frac{2}{c + f + \sqrt{(c + f)^2 + 4(e^2 - cf)}},$$

$$\rho = \frac{2}{c + f - \sqrt{(c + f)^2 + 4(e^2 - cf)}},$$

& remarquons que leur produit est $r \rho = \frac{-1}{e^2 - cf}$.

Cela posé, dans les deux cas que nous venons de détailler, r & ρ étant de même signe, leur produit est positif, & par conséquent $e^2 - cf$ négative, c'est-à-dire: $e^2 - cf < 0$. Il est clair ensuite que si $c + f$ est positive, r & ρ seront positifs, & réciproquement; c'est-à-dire, que le symptôme de la concavité est $c + f > 0$, & celui de la convexité est $c + f < 0$, pourvu qu'on ait en même temps $e^2 - cf < 0$.

23. Il nous reste à examiner le cas où les deux rayons de Courbure sont de signe contraire. Il est d'abord évident que $r\rho$ doit être une quantité négative, qu'ainsi on doit avoir $e^2 - cf > 0$; de plus, quel que soit le signe de $c + f$, r sera toujours positif, & ρ négatif.

Maintenant écrivons ainsi la valeur de R :

$$R = \frac{\left(\frac{2 r \rho \sin. \omega}{r - \rho} \right)}{\frac{r + \rho}{r - \rho} - \cos. 2 \pi},$$

dans le cas que nous traitons, r étant toujours positif & ρ négatif, $r - \rho$ est une quantité positive; par conséquent la fraction qui tient ici lieu de numérateur sera toujours négative, puisque $r\rho$ l'est. De plus, la quantité $\frac{r + \rho}{r - \rho}$ est évidemment contenue entre les limites $+1$ & -1 , à cause de la différence des signes de r & ρ ; donc, dans les différentes valeurs de l'angle π , on aura tantôt $\cos. 2 \pi > \frac{r + \rho}{r - \rho}$, & tantôt $\cos. 2 \pi < \frac{r + \rho}{r - \rho}$.

Dans le premier cas, R sera positif, & les sections faites dans l'élément seront concaves; dans le second, elles seront convexes; donc : *Quand les deux rayons de Courbure sont de signe contraire, les sections qu'on peut faire dans l'élément sont les unes concaves, les autres convexes.*

24. Dans le passage des sections concaves aux sections convexes, on a $\cos. 2 \pi = \frac{r + \rho}{r - \rho}$ ou $R = \infty$; il en résulte pour π deux valeurs que nous allons construire.

Soit (fig. 3.) AG , AL les axes perpendiculaires entre eux, FIGURE 3.
qui partagent symétriquement l'élément de surface dont il s'agit;
du centre A soit décrit le cercle $IKGL$ dont le rayon soit $= 1$;
soit pris $AH = \frac{r + \rho}{r - \rho}$, & soit menée FHE perpendiculaire sur AH ,
les deux valeurs qui conviennent à l'arc 2π sont GE & $GLKF$;
car AH est également le *cosinus* de l'une & de l'autre, & par
Q q q ij

conséquent l'équation $\cos. 2 \pi = \frac{r+p}{r-p}$ est satisfaite. Donc, si on partage ces arcs en deux également aux points N & R, GN & GLR seront les valeurs de π données par l'équation ci-dessus. Il suit de là, que si l'on mène les diamètres NQ, RM, quelque plan qu'on fasse passer par ces diamètres, il fera dans l'élément des sections de nulle Courbure, puisqu'on a $R = \infty$. Donc: *Quand les deux rayons de Courbure sont de signe contraire, il y a dans l'élément de surface deux sens suivant lesquels la Courbure est nulle.*

25. Si on avoit $r = \infty$ ou $\rho = \infty$, c'est-à-dire, que l'élément de surface pût être regardé comme une portion de cylindre, on auroit $AH = \frac{r+p}{r-p} = \pm 1$. Ce qui signifie qu'alors les diamètres NQ, MR, suivant lesquels la Courbure est nulle, se confondroient l'un & l'autre, ou avec GK ou avec IL. Donc: *Quand un des rayons de Courbure est infini, il n'y a, dans l'élément de surface, qu'un sens suivant lequel la Courbure est nulle.*

26. Nous venons de voir (23) que si $\cos. 2 \pi > \frac{r+p}{r-p}$, c'est-à-dire, $\cos. 2 \pi > AH$, alors, quel que soit ω , la section faite dans l'élément est concave; mais $\cos. 2 \pi > AH$ donne $\pi < GN$ ou $\pi > GLR$, ce qui veut dire également, que dans ce cas, le plan coupant passe dans l'angle MAN & dans son opposé au sommet: c'est donc la partie de l'élément comprise dans ces deux angles, qui est susceptible de donner des sections concaves; nous prouverons de même que c'est la portion comprise dans l'angle NAR, & son opposé MAQ, qui est susceptible de donner des sections convexes.

27. Ainsi, dans cet état, l'élément de surface n'est ni concave ni convexe; mais si l'angle MAN est plus grand que l'angle NAR, alors la partie qui donne les sections concaves sera plus grande que celle qui donne les sections convexes, & on pourra dire, en quelque façon, que l'élément de surface est

plus concave que convexe, c'est pourquoi nous le nommons alors *convexo-concave*.

Si au contraire l'angle NAR est plus grand que l'angle MAN , la partie de l'élément qui donne les sections convexes, sera plus grande que celle qui donne les sections concaves, & nous le nommerons *concavo-convexe*.

Dans le premier cas, l'angle MAN est obtus; & comme cet angle a pour mesure un arc MN égal à GE , il s'en suit que l'arc GE est plus grand que 90° , qu'ainsi AH est négative. Or $AH = \frac{r+p}{r-p}$; de plus $r-p$ est nécessairement une quantité positive, comme nous l'avons fait voir; donc $r+p$ est négative; or $r+p = -\frac{(c+f)}{e^2 - cf}$, expression qui ne sauroit être négative, à moins que $c+f$ ne soit positive, puisque nous avons vu que $e^2 - cf$ est positive dans le cas que nous traitons. Il faut donc, pour qu'un élément de surface soit *convexo-concave*, qu'on ait $c+f > 0$.

Dans le second cas, l'angle MAN est aigu, par conséquent l'arc GE moindre que 90° ; c'est-à-dire, AH positive. Donc l'élément de surface est *concavo-convexe*, si on a $c+f < 0$, pourvu que, dans ces deux derniers cas, on ait $e^2 - cf > 0$.

Il suit de tout cela, qu'une surface est :

Concave.....	par-tout où l'on a $e^2 - cf < 0$ & $c+f > 0$.
Convexe.....	$e^2 - cf < 0$ & $c+f < 0$.
Convexo-concave.....	$e^2 - cf > 0$ & $c+f < 0$.
Concavo-convexe.....	$e^2 - cf > 0$ & $c+f > 0$.

Voilà donc, pour les surfaces, quatre états de Courbure analogues aux deux qu'on distingue dans les lignes sous le nom de concavité & de convexité, & il est clair que tous les cas sont contenus dans cette division; pourvu qu'on y comprenne ceux où les quantités, dont le signe règle ces différens états, sont nulles ou infinies; mais il faut remarquer que la différence qu'il y a entre le troisième & le quatrième état, étant purement ana-

lytique, & ne pouvant être sensible aux yeux, la vue ne compte réellement, dans les surfaces, que trois états de Courbure.

Jusqu'ici nous avons toujours rapporté l'élément de surface que nous considérons au plan qui lui est tangent : cette méthode qui, comme on voit, est très-commode, tant qu'il ne s'agit que d'un seul élément, devient insuffisante dès qu'on veut en comparer plusieurs, & à plus forte raison quand on veut examiner une surface entière ; c'est pourquoi, supposant l'élément dont nous nous occupons, rapporté à des axes quelconques, nous allons transformer nos formules par rapport à ces axes, en commençant par les quantités c , e , f dont elles dépendent toutes.

Transformation des quantités c , e , f .

FIGURE 4. 28. Soient OB, OC, OD (*fig. 4.*) trois axes perpendiculaires entre eux, auxquels est rapportée la surface à laquelle appartient l'élément que nous avons considéré jusqu'ici, & dont deux OB, OC sont horizontaux & le troisième vertical. Soit en A l'élément dont il s'agit ; supposons que le plan qui lui est tangent vienne couper, suivant GH, le plan horizontal BOC ; soit imaginé par le point A un plan vertical perpendiculaire à GH ; soit U le point où il coupe cette ligne, & AU, UR les intersections de ce plan tangent & du plan BOC ; l'angle AUR mesurera l'inclinaison du plan tangent.

Soit en N un autre point de la surface, duquel abaissons une perpendiculaire NM sur le plan tangent en A prolongé ; par le point A, menons Ag parallèle à GH, & du point M soit MP perpendiculaire sur Ag, je dis que AP, PM, MN sont trois coordonnées perpendiculaires entre elles, au moyen desquelles le point N est rapporté au plan tangent ; nous pouvons donc les prendre pour celles dont nous nous sommes servis jusqu'ici, & leur donner les mêmes dénominations :

AP= u ; PM= v , MN= t . Soit de plus OQ= x ; QR= y , RA= z .
OS= x' ; ST= y' ; TN= z' ; angl. OGH= π ; angl. AUR= ω .

Soit transportée l'origine en A; pour cela, soient par le point A les axes Ab , Ac , Ad parallèles aux premiers; de sorte que les coordonnées du point quelconque N, par rapport à ces axes, sont $As = x' - x$; $ft = y' - y$, $tN = z' - z$.

Du point P soit menée, dans le plan horizontal bAc , la droite Ptu qui peut être regardée comme la projection horizontale de PM ; soient menées par le point M la verticale Mu , & dans le plan vertical MPu l'horizontale Mv . Par le point P soient menées Px , Py parallèles aux axes Ac , Ab , & soit prolongée ft jusqu'à ce qu'elle rencontre en x la droite Px .

Tout cela posé, soit l'équation de notre surface $dz = p dx + q dy$, & supposons qu'on ait de plus $dp = m dx + n dy$; $dq = n dx + f dy$, on aura de même $dz' = p' dx' + q' dy'$; $dp' = m' dx' + n dy'$; $dq' = n' dx' + f' dy'$; par conséquent, si l'on suppose dx' , dy' constans, on aura :

$$ddz' = m' dx'^2 + 2n' dy' dx' + f' dy'^2 \quad (A').$$

Maintenant les triangles NMv , MPu donnent :

$Nv = MN \cos. MPu = t \cos. \omega$; $Mv = MN \sin. MPu = t \sin. \omega$,
 $Mu = MP \sin. MPu = v \sin. \omega$; $Pu = MP \cos. MPu = v \cos. \omega$,
 donc $Pt = Pu - Mv = v \cos. \omega - t \sin. \omega$.

On a de plus par les triangles Ptx , PAy ;

$Px = Pt \sin. gAc = [v \cos. \omega - t \sin. \omega] \sin. \pi$;

$tx = Pt \cos. gAc = [v \cos. \omega - t \sin. \omega] \cos. \pi$.

$Py = AP \sin. gAc = u \sin. \pi$; $Ay = AP \cos. gAc = u \cos. \pi$;
 donc, à cause de

$Nt = z' - z = Nv + Mu$; $As = x' - x = Px + Ay$; $ft = y' - y = tx - Py$,
 on aura : $z' - z = t \cos. \omega + u \sin. \omega \quad (F)$;

$x' - x = [v \cos. \omega - t \sin. \omega] \sin. \pi + u \cos. \pi \quad (G)$;

$y' - y = [v \cos. \omega - t \sin. \omega] \cos. \pi - u \sin. \pi \quad (H)$.

Différencions ces expressions en traitant x , y , z comme constantes, pour exprimer que nous regardons le point A comme fixe, & faisons en sorte que les équations que nous aurons n'appartiennent qu'à l'élément dont il s'agit ici, c'est-à-dire, aux points de notre surface qui sont aux environs du point A. Supposons pour cela le point N infiniment voisin du point A, &

faisons par conséquent $dt = 0$, $p' = p$, $q' = q$, $m' = m$, $n' = n$, $f' = f$; nous aurons

$$\begin{aligned} dy' &= dv \cos. \omega \cos. \pi - du \sin. \pi, \\ dx' &= dv \cos. \omega \sin. \pi + du \cos. \pi, \\ ddz' &= ddv \cos. \omega + ddu \sin. \omega, \\ ddx' &= [ddv \cos. \omega - ddt \sin. \omega] \sin. \pi + ddu \cos. \pi, \\ ddy' &= [ddv \cos. \omega - ddt \sin. \omega] \cos. \pi - ddu \sin. \pi; \end{aligned}$$

mais dx' & dy' étant constans, on a $ddx' = 0$, $ddy' = 0$. Egalant donc à zéro leurs expressions, nous en tirerons $ddv \cos. \omega - ddt \sin. \omega = 0$, par conséquent $ddv = \frac{ddt \sin. \omega}{\cos. \omega}$, valeur qui, mise dans celle de ddz' , donne $ddz' = \frac{ddt}{\cos. \omega}$; mettant dans l'équation (A') ces valeurs de ddz' , dx' , dy' , elle devient;

$$ddt = \left\{ \begin{aligned} &du^2 [m \cos. \pi^2 - 2n \sin. \pi \cos. \pi + f \sin. \pi^2] \cos. \omega \\ &+ 2du dv [n (\cos. \pi^2 - \sin. \pi^2) + (m-f) \sin. \pi \cos. \pi] \cos. \omega^2 \\ &+ dv^2 [m \sin. \pi^2 + 2n \sin. \pi \cos. \pi + f \cos. \pi^2] \cos. \omega^2 \end{aligned} \right\}$$

équation qui, comparée avec l'équation (B)

$$ddt = c du^2 + 2e du dv + f dv^2, \text{ donne}$$

$$\begin{aligned} c &= [m \cos. \pi^2 - 2n \sin. \pi \cos. \pi + f \sin. \pi^2] \cos. \omega, \\ e &= [n (\cos. \pi^2 - \sin. \pi^2) + (m-f) \sin. \pi \cos. \pi] \cos. \omega^2, \\ f &= [m \sin. \pi^2 + 2n \sin. \pi \cos. \pi + f \cos. \pi^2] \cos. \omega^2. \end{aligned}$$

Mais si l'on fait attention que les angles π & ω dépendant de la position du plan tangent, on a :

$$\sin. \pi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \sin. \omega = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos. \pi = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \cos. \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

les valeurs de c , e , f deviendront :

$$c = \frac{mq^2 - 2npq + fp^2}{(p^2 + q^2) \sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

$$e = \frac{(m-f)pq - n(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)};$$

$$f = \frac{mp^2 + 2npq + fq^2}{(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)};$$

C. Q. F. T.

29. Les valeurs que nous venons de trouver pour c , e , f , donnent :

$$c + f = \frac{m(1+q^2) - 2npq + f(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad e^2 - cf = \frac{n^2 - mf}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}};$$

soit fait pour abrégé :

$$m(1+q^2) - 2npq + f(1+p^2) = U; \quad n^2 - mf = V;$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = K, \quad \text{nous aurons } c + f = \frac{U}{K^3}; \quad e^2 - cf = \frac{V}{K^4}.$$

Mais les valeurs des rayons de Courbure sont :

$$r = \frac{2}{c + f + \sqrt{(c+f)^2 + 4(e^2 - cf)}};$$

$$\rho = \frac{2}{c + f - \sqrt{(c+f)^2 + 4(e^2 - cf)}};$$

ou, mettant pour $c + f$ & $e^2 - cf$, ce que nous venons de trou-

$$\text{ver, il vient } r = \frac{2K^3}{U + \sqrt{U^2 + 4VK^2}}; \quad \rho = \frac{2K^3}{U - \sqrt{U^2 + 4VK^2}}.$$

30. Il se présente ici une ambiguïté à lever : K est une quantité radicale, dont par conséquent le signe n'est pas décidé. Mais il est évident que cette quantité $K = \sqrt{1+p^2+q^2}$ n'est entrée dans le calcul, que parce qu'elle entre dans l'expression de $\cos. \omega = \frac{1}{K}$; or il est aisé de voir que $\cos. \omega$ doit toujours représenter une quantité positive. Car tant que le point N sera au dessus du plan tangent, ou, ce qui revient au même, tant que t sera positive, Nt sera plus grande que Mu , c'est-à-dire, que Nv qui est l'excès de Nt sur Mu , sera positive. De même quand t sera négative, Nt sera moindre que Mu , ou Nv sera négative; donc Nv est toujours de même signe que t . Mais nous avons écrit $Nv = t \cos. \omega$, $\cos. \omega$ doit donc être toujours pris positivement dans cette équation; donc K doit l'être aussi.

31. Les expressions de nos rayons de Courbure étant maintenant transformées, il nous reste à faire la même opération sur les équations de l'axe de rotation que nous avons données (11). Pour cela, remarquons que si nous nommons x' , y' , z' les coordonnées de chaque point de cet axe par rapport aux axes

principaux OB, OC, OD, & u, v, t les coordonnées par rapport au plan tangent, les équations (F), (G), (H) ont lieu; mais ces équations donnent, après avoir mis pour les *sinus* & *cosinus*, leurs valeurs

$$\begin{aligned} u &= \frac{q(x' - x) - p(y' - y)}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \\ v &= \frac{(\zeta' - \zeta)(p^2 + q^2) + p(x' - x) + q(y' - y)}{\sqrt{p^2 + q^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \\ t &= \frac{\zeta' - \zeta - p(x' - x) - q(y' - y)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \end{aligned}$$

Mettant ces expressions dans les équations de l'axe, ainsi que les valeurs transformées de c, e, f , on aura les équations suivantes pour déterminer la position des deux axes qui conviennent à un élément donné :

$$\begin{aligned} &[\zeta' - \zeta - p(x' - x) - q(y' - y)][U \mp \sqrt{U^2 + 4VK^2}] = 2K^2; \\ &\frac{(\zeta' - \zeta)(p^2 + q^2) + p(x' - x) + q(y' - y)}{q(x' - x) - p(y' - y)} = \\ &\frac{2[m p^2 + 2npq + f q^2] - (p^2 + q^2)[U \mp \sqrt{U^2 + 4VK^2}]}{2(m - t)pq - n(p^2 - q^2)}; \end{aligned}$$

dans lesquelles x, y, ζ sont les coordonnées de l'élément auquel appartient l'axe dont il s'agit.

Au moyen de ces formules, on connoîtra la Courbure d'une surface en un point quelconque, en substituant pour p, q, m, n, t leurs valeurs données par l'équation de la surface & ses différentielles; nous croyons inutile de multiplier les exemples; c'est pourquoi nous nous contenterons de celui qui suit.

E X E M P L E.

32. Appliquer les formules des rayons de Courbure à une surface de révolution.

FIGURE 5. Soient OB, OC, OD (*fig. 5.*) les trois axes des coordonnées, & supposons de plus que OD soit l'axe autour duquel est engendrée la surface que nous considérons. Soit N

le point dont il s'agit, dont nous nommons les coordonnées OQ, QR, RN, x, y, z respectivement. Cela posé, l'équation des surfaces de révolution est $z = \text{fonct.}(x^2 + y^2)$, par conséquent on a $dz = P(x dx + y dy)$; $dP = Q(x dx + y dy)$; P & Q étant des fonctions de $(x^2 + y^2)$, on a par conséquent (28) $p = Px$; $q = Py$; $m = P + Qx^2$; $n = Qxy$; $f = P + Qy^2$; ainsi mettant dans U, V & K ces valeurs pour p, q, m, n, f , on auroit les expressions des rayons de Courbure. Mais, pour abréger, nous allons reprendre les valeurs :

$$r = \frac{2}{c + f + \sqrt{(c - f)^2 + 4e^2}}; \rho = \frac{2}{c + f - \sqrt{(c - f)^2 + 4e^2}},$$

& mettre dans c, e, f les valeurs que nous venons de trouver,

$$\text{il vient : } c = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2(x^2 + y^2)}}; e = 0; f = \frac{P + Q(x^2 + y^2)}{[1 + P^2(x^2 + y^2)]^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{ainsi : } r = \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{1 + P^2(x^2 + y^2)}}{P}; \rho = \frac{1}{f} = \frac{[1 + P^2(x^2 + y^2)]^{\frac{3}{2}}}{P + Q(x^2 + y^2)};$$

expressions qui ne dépendent plus que de P & de Q, c'est-à-dire, de la nature de la courbe génératrice.

Soit coupée notre surface par un plan passant par l'axe & par le point N, la section XNV ne sera évidemment autre chose que la courbe génératrice, dont on pourra regarder OR, RM comme les coordonnées. Soit $OR = u$, par conséquent $x^2 + y^2 = u^2$, les équations $dz = P(x dx + y dy)$, $dP = Q(x dx + y dy)$ deviendront $dz = P u du$; $dP = Q u du$, par conséquent $d d z = d u^2 (P + q u^2)$. (Nous traitons du comme constant, parce que tout le long de la ligne OR, on a $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, expression qui est constante, puisque dx & dy ont été supposés tels). Si on nomme ds l'élément de la courbe, on a $df = du \sqrt{1 + P^2 u^2}$. Tout cela nous donne : $P = \frac{dz}{u du}$; $P + Q u^2 = \frac{d dz}{d u^2}$, & $\sqrt{1 + P^2 u^2} = \frac{df}{du}$, donc $r = \frac{\sqrt{1 + P^2 u^2}}{P} = \frac{u df}{d dz}$; & $\rho = \frac{[1 + P^2 u^2]^{\frac{3}{2}}}{P + Q u^2} = \frac{df^3}{du d dz}$, mais $\frac{u df}{d dz}$ est évidemment la normale NS, & $\frac{df^3}{du d dz}$ le rayon de Cour-

bure de la courbe XY au point N ; donc les deux rayons de Courbure en un point quelconque d'une surface de revolution sont l'un le rayon de Courbure de la courbe génératrice au même point , l'autre la portion de la normale comprise entre la courbe & l'axe de rotation.

33. Les caractères analytiques des différens états des surfaces que nous avons donnés (27), sont susceptibles d'être aussi transformés par rapport à des axes quelconques. Pour cela , remarquons que K étant une quantité positive , $c + f$ & U sont toujours de même signe , ainsi que $e^2 - c f$ & V (29). Donc une surface est :

Concave.....	par-tout où l'on a :.....	$V < 0$ & $U > 0$.
Convexe.....		$V < 0$ & $U < 0$.
Convexo-concave.....		$V > 0$ & $U > 0$.
Concavo-convexe.....		$V > 0$ & $U < 0$.

Passons maintenant à des applications de notre théorie , à la solution de plusieurs problèmes.

Il est suffisamment démontré par tout ce qui a précédé , qu'on ne peut pas dire généralement qu'un élément quelconque de surface peut être regardé comme une portion de sphère , idée qui vient assez communément à ceux qui commencent à songer à cette matière ; il faudroit , pour qu'elle fût vraie , que nos deux rayons de Courbure fussent toujours égaux , & il est évident que cela n'est pas ; mais il est possible qu'il y ait une classe de surfaces qui jouisse de cette propriété , & il est intéressant de la connoître ; c'est pourquoi nous allons résoudre le problème suivant.

P R O B L È M E III.

34. Déterminer quelles sont les surfaces pour lesquelles les deux rayons de Courbure sont toujours égaux.

SOLUTION. Les expressions des deux rayons de Courbure ne diffèrent que par les signes qui affectent un même radical

dans l'une & dans l'autre ; si donc ce radical étoit nul , ces expressions seroient égales : donc (29) $V^2 + 4 V K^2 = 0$ est l'équation de la classe de surfaces que nous cherchons. Ainsi, développant U , V & K , & intégrant, s'il est possible, l'équation aux différences partielles qui en résulte, on aura la solution du problème proposé.

Mais une remarque fort simple va rendre cette recherche bien moins difficile. Rappelons-nous que le radical qui affecte les premières valeurs de r & p est (9) $\sqrt{(c-f)^2 + 4e^2}$, & qu'ainsi la condition demandée sera remplie si on fait $(c-f)^2 + 4e^2 = 0$. Or cette quantité est la somme de deux carrés ; ainsi elle ne sauroit être zéro, à moins que chacun d'eux ne le soit. Nous avons donc les deux équations $c=f$, $e=0$, au lieu d'une. $e=0$ donne (28) $(m-f)pq - n(p^2 - q^2) = 0$; d'où l'on tire $m = \frac{n(p^2 - q^2) + fpq}{pq}$, ou $f = \frac{mpq - n(p^2 - q^2)}{pq}$, valeurs qui, substituées successivement dans l'équation $c=f$, donnent : $\frac{n}{p} = \frac{fq}{1+q^2}$; & $\frac{n}{q} = \frac{mp}{1+p^2}$; mais souvenons-nous que $m = \left(\frac{dp}{dx}\right)$, $n = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, $f = \left(\frac{dq}{dy}\right)$, nos équations deviendront : $\frac{dp}{p} = \frac{q dq}{1+q^2}$; $\frac{dq}{q} = \frac{p dp}{1+p^2}$, dans la première desquelles les différences dp , dq sont prises en ne faisant varier que y , tandis que, dans la seconde, on ne fait varier que x ; nous pouvons donc intégrer ces équations comme à l'ordinaire, pourvu que nous complétions l'intégrale de la première par une fonction de x , & celle de la deuxième par une fonction de y . Nous aurons par ce moyen : $p^2 X = 1 + q^2$; $q^2 Y = 1 + p^2$, X étant une fonction de x , & Y une fonction de y . Nous tirons de là $p = \sqrt{\frac{Y+1}{XY-1}}$; $q = \sqrt{\frac{X+1}{XY-1}}$: or $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$ effectuant les différenciations indiquées, & réduisant, il vient : $\frac{dx}{dx(X+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dy}{dy(Y+1)^{\frac{1}{2}}}$; dans cette égalité, les fonctions de x ne sont point mêlées avec les fonctions de y ; par conséquent elle ne sauroit avoir lieu, à moins que les deux membres

ne soient égaux à une constante : soit $2A$ cette constante, on aura donc $\frac{dX}{2(X+1)^{\frac{1}{2}}} = A dx$; $\frac{dY}{2(Y+1)^{\frac{1}{2}}} = A dy$; intégrant & tirant les valeurs de X & Y , on aura : $X = \frac{1-(Ax+B)^2}{(Ax+B)^2}$; $Y = \frac{1-(Ay+C)^2}{(Ay+C)^2}$, mettant ces valeurs dans celles de p & q , & nous rappelant que $d\zeta = p dx + q dy$, il viendra $A d\zeta = \frac{-(Ax+B)A dx - (Ay+C)A dy}{\sqrt{1-(Ax+B)^2 - (Ay+C)^2}}$, intégrant, nous aurons $A\zeta + D = \sqrt{1-(Ax+B)^2 - (Ay+C)^2}$, ou bien $1 = (Ax+B)^2 + (Ay+C)^2 + (A\zeta + D)^2$.

Cette équation est celle de la sphère; d'où il suit qu'il n'y a que la sphère qui jouit de cette propriété, que les deux rayons de Courbure sont toujours égaux.

PROBLÈME IV.

35. Entre toutes les surfaces qu'on peut faire passer par un périmètre donné, formé par une courbe à double Courbure, trouver celle dont l'aire est la moindre.

FIGURE 6. SOLUTION. Soit en A (fig. 6.) un élément de la surface demandée, Ff l'axe de rotation qui convient à cet élément; soient menés deux plans infiniment voisins perpendiculaires l'un & l'autre à l'axe Ff , & qui comprennent entre eux l'élément dont il s'agit. Supposons que H , K sont les deux points où ces plans coupent l'axe Ff ; & qu'ils sont dans notre surface les sections UV , XY . Si l'on fait attention à la génération que nous avons démontrée propre à tout élément de surface, on verra que les portions infiniment petites AD , BE des courbes UV , XY , prises dans le voisinage du point A , peuvent être regardées comme deux élémens de cercle du même rayon; & ayant leurs centres en H & K , maintenant je dis qu'une portion quelconque de la zone comprise entre les courbes UV , XY , doit être un *minimum*; donc si l'on mène par l'axe Ff deux nouveaux plans infiniment voisins qui comprennent entre eux l'élément dont nous parlons, il

faût que la portion de surface renfermée entre ces deux plans & les Courbes AD, BE soit la moindre qu'il est possible.

Cela posé, soient ABHK, DEHK les portions des deux derniers plans qui sont comprises entre les premiers ; soit partagée HK en deux parties égales au point I, & soit menée IR parallèle à AH & BK, il existe (7) sur cette ligne un point C, d'où, comme centre décrivant un élément de cercle ArB, ce petit arc de cercle, en tournant autour de Ff, engendrera l'élément de surface dont il s'agit ; nous pouvons donc dire que notre élément de surface est égal au produit de l'arc ArB par le chemin que parcourroit son centre de gravité dans l'angle formé par les plans AK, DK. Ce produit doit donc être un *minimum* ; mais le chemin parcouru par le centre de gravité est proportionnel à sa distance à l'axe Ff ; ainsi soit g ce centre de gravité, on doit avoir $ArB \times gI = \text{minimum}$. Cela posé, il est évident que rC rayon de l'arc générateur, & rI distance de cet arc à l'axe de rotation, sont les deux rayons de Courbure de l'élément dont il s'agit : nous prendrons donc $rC = r$, $rI = \rho$; soit de plus $BK = u$, $I = a$, $Bu = \omega$, maintenant $ArB \times gI = ArB \times gC + ArB \times CI$; mais on fait, par les formules de statique, que $ArB \times gC = AB \times CR = 2r\omega$.

De plus, si l'on fait usage de la série par laquelle un arc de cercle est exprimé en valeur de l'ordonnée qui lui appartient, & qu'on n'en prenne que les deux premiers termes, à cause de l'infinité petitesse de ω (qui est ici l'ordonnée de l'arc rB ; ru étant l'abscisse), on aura $rB = \omega + \frac{\omega^3}{6r^2}$; donc $ArB = 2\omega + \frac{\omega^3}{3r^2}$, de plus $CI = \rho - r$; donc $ArB \times gI = 2r\omega + (\rho - r) \left(2\omega + \frac{\omega^3}{3r^2} \right) = \omega \left[2\rho + \frac{(\rho - r)\omega^2}{3r^2} \right] = \text{minimum}$; donc $2d\rho + \frac{(d\rho - dr)r^2\omega^2 - 2r(\rho - r)\omega^2 dr}{3r^4} = 0$ ou $d\rho [6r^4 + r^2\omega^2] + \omega^2 dr [r^2 - 2r\rho] = 0$. Mais l'équation du cercle donne $ru = \frac{\omega^2}{2r}$; ainsi, à cause de $rI = BK + ru$, nous aurons $\rho = a + \frac{\omega^2}{2r}$, & par conséquent $d\rho = -\frac{\omega^2 dr}{2r^2}$, mettant pour

$d\rho$ cette valeur, & réduisant, nous avons $r + \rho = 0$, ou $r = -\rho$.
Donc, la surface de moindre étendue entre ses limites a cette propriété, que chaque élément a ses deux rayons de Courbure de signe contraire & égaux.

Mettant dans l'équation $r = -\rho$ pour r & ρ leurs valeurs, il vient $U = 0$, ou $m(1 + q^2) - 2npq + f(1 + p^2) = 0$, équation demandée de la surface en question, qui, traduite ainsi en différences partielles

$$\left(\frac{dd\chi}{dx^2}\right)\left[1 + \left(\frac{d\chi}{dy}\right)^2\right] - 2\left(\frac{dd\chi}{dx dy}\right)\left(\frac{d\chi}{dx}\right)\left(\frac{d\chi}{dy}\right) + \left(\frac{dd\chi}{dy^2}\right)\left[1 + \left(\frac{d\chi}{dx}\right)^2\right] = 0,$$

est la même que celle qu'on trouve par les méthodes ordinaires des *maxima* & *minima*.

36. On ne fait point intégrer cette équation, on ne connoît même, que je sache, qu'une seule surface qui y satisfasse, savoir, le plan, dans le cas où le périmètre par lequel doit passer la surface est une courbe plane. Je vais donner deux surfaces autres que le plan, qui jouissent de la propriété mentionnée.

37. Une de ces surfaces se trouve en supposant que l'équation $m(1 + q^2) - 2npq + f(1 + p^2) = 0$ provienne des deux suivantes $m q^2 - 2npq + f p^2 = 0$; $m + f = 0$. On fait que la première de ces équations est celle qui appartient à toutes les surfaces engendrées par le mouvement d'une droite horizontale, comme l'a démontré M. Monge; ainsi la surface qui satisfait aux deux à la fois, est entre celles engendrées par le mouvement d'une droite horizontale, celle qui a de plus la propriété d'être de moindre étendue.

La deuxième équation donne $m = -f$ ou $f = -m$; substituant l'une & l'autre valeur dans la première équation, on obtient les suivantes: $f(p^2 - q^2) - 2npq = 0$; & $m(q^2 - p^2) - 2npq = 0$; qu'on peut mettre sous cette forme: $dq(p^2 - q^2) - 2pq dp = 0$, & $dp(q^2 - p^2) - 2pq dq = 0$, les différences dans la première étant prises, en ne faisant varier que y , & dans la seconde, en ne faisant varier que x .

Ces

Ces équations étant homogènes l'une & l'autre, s'intègrent fort simplement; complétant l'intégrale de la première par une fonction de x , celle de la deuxième par une fonction de y , on a $q X = p^2 + q^2$, & $p Y = p^2 + q^2$, ce qui donne $p = \frac{X^2 Y}{X^2 + Y^2}$; $q = \frac{X Y^2}{X^2 + Y^2}$, valeurs qui, mises l'une & l'autre dans l'équation $d z = p d x + q d y$, la font devenir $d z = \frac{X^2 Y d x + X Y^2 d y}{X^2 + Y^2}$; mais on doit avoir $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, ce qui donne, toute réduction faite, $-\frac{dX}{X^2 dx} = \frac{dY}{Y^2 dy}$; équation dans laquelle les fonctions de x n'étant point mêlées avec celles de y , il s'enfuit que chaque membre est constant: on a donc $-\frac{dX}{X^2 dx} = A$, $\frac{dY}{Y^2 dy} = A$; on tire de là $X^2 dx = -\frac{dX}{A}$; $Y^2 dy = \frac{dY}{A}$ mettant ces valeurs dans celle de $d z$, elle devient $A d z = -\frac{Y dX + X dY}{X^2 + Y^2} = d. \text{Arc. tang.} - \frac{X}{Y}$. On a de plus $-\frac{dX}{X^2} = A dx$; $\frac{dY}{Y^2} = A dy$, donc $\frac{1}{X} = A x + B$; $-\frac{1}{Y} = A y + C$, ainsi $-\frac{X}{Y} = \frac{A y + C}{A x + B}$, donc $A z = F + \text{Arc. tang.} \frac{A y + C}{A x + B}$, équation de la surface dont il s'agit.

Qu'on imagine cette surface coupée par un plan horizontal, c'est-à-dire, qu'on fasse z constant, on aura $\frac{A y + C}{A x + B}$ aussi constant; d'où il suit qu'alors la relation qu'il y a entre y & x est exprimée par une équation du premier degré; d'où il suit encore que la section faite dans cette surface, par un plan quelconque horizontal, est une ligne droite: ceci confirme ce que nous avons dit, que cette surface est de nature à être engendrée par le mouvement d'une droite horizontale.

Puisque la quantité $\frac{A y + C}{A x + B}$ est constante quand z est constant, nous pouvons supposer $\frac{A y + C}{A x + B} = Z$, Z étant fonction de z . Cela posé, considérons la ligne droite génératrice dans deux positions infiniment voisines, & cherchons le point où se

coupent les projections de ces deux positions de la ligne génératrice. Pour cela, je remarque qu'au point où se fait cette intersection, z varie sans que x ni y varient. Je transforme donc ainsi l'équation ci-dessus $Ay + C = (Ax + B)Z$, & je la différencie en ne faisant varier que Z ; il vient $0 = (Ax + B) dZ$, ce qui ne sauroit être, à moins qu'on n'ait $Ax + B = 0$: il suit de là qu'on a $Ay + C = 0$; ainsi $x = -\frac{B}{A}$, $y = -\frac{C}{A}$ sont les coordonnées du point où se coupent les deux projections.

Ces coordonnées sont constantes; donc toutes les projections des différentes positions de la ligne génératrice se coupent en un même point.

FIGURE 7. Soit donc (*fig. 7.*) pris $OE = -\frac{B}{A}$, $EA = -\frac{C}{A}$, le point A est celui où se coupent toutes les projections. Si donc l'on élève au point A l'axe vertical AF , la ligne génératrice se meut de manière à couper toujours l'axe AF .

Transportons l'origine en A ; pour cela, menons les axes Ab , Ac , les nouvelles coordonnées d'un point N de la surface seront Ap , pM : MN restant la même; soit $Ap = x'$, $pM = y'$, nous aurons évidemment AP , ou $x = x' - \frac{B}{A}$, PM ou $y = y' - \frac{C}{A}$; mettant ces valeurs de x & y , il viendra $Az = F + \text{Arc. tang. } \frac{y'}{x'}$.

Soit menée AM qui est la projection de la droite génératrice quand elle passe par N , & soit nommé u l'angle MAC ; il est clair que $\text{Arc. tang. } \frac{y'}{x'} = u$; donc $Az = F + u$, équation polaire de notre surface.

Cela posé, il est évident que les accroissemens de z sont proportionnels à ceux de u ; donc la droite génératrice s'élève le long de l'axe AF en même temps qu'elle tourne autour du même axe, de manière que son mouvement de rotation est proportionnel à son mouvement d'ascension.

Ainsi un point quelconque r de cette droite décrit une *hélice* $Grtx$, &c. qui est la même courbe que celle qui forme le filet d'une vis.

Quand la droite génératrice a fait un tour entier, elle s'est élevée d'une quantité rx , qu'on peut appeler le *pas* de l'hélice. Il est clair que z croît de cette quantité, quand l'accroissement de u est égal à la circonférence entière. Si donc on nomme P le pas, & π la circonférence, on aura $A(z + P) = Fz + u + \pi$, d'où soustrayant $Az = Fz + u$, il vient $A = \frac{\pi}{P}$; d'où il suit que que la constante A dépend du pas de l'hélice. Quant à la constante F , il est évident qu'elle dépend du point G , où l'hélice sort du plan horizontal.

Il suit de tout cela, que si l'on prend une portion quelconque de la surface que nous venons de trouver, elle est un *minimum* entre ses limites.

37. Un autre exemple de la surface de moindre étendue, est quand elle est en même temps surface de révolution. Pour trouver fort simplement de quelle nature elle est, rappelons-nous que nous avons démontré que, dans une surface de révolution, les deux rayons de Courbure sont l'un celui de la courbe génératrice au même point, l'autre la normale à cette courbe; mais la surface de moindre étendue doit avoir ses deux rayons de Courbure égaux & de signes contraires; il faut donc que la courbe génératrice tourne sa convexité vers l'axe de rotation, & que son rayon de Courbure soit par-tout égal à la normale.

Soit donc (*fig. 8.*) AD l'axe de rotation, soit CME la courbe génératrice que nous demandons. Son rayon de Courbure en un point quelconque M doit être égal à la normale MQ . Ainsi faisons $AP = x$; $PM = y$ l'élément de la courbe $= ds$, nous aurons le rayon de Courbure $RM = \frac{ds^3}{dx dy}$, la normale $MQ = \frac{y ds}{dx}$; donc à cause de $RM = MQ$, on a

S s s ij

FIGURE 8.

$\frac{d^2 y}{dx^2} = y$. Soit $dy = p dx$, nous aurons $d dy = dp dx$; ainsi notre équation devient $\frac{(1+p^2) dx}{dp} = y$, ou mettant pour dx la valeur $\frac{dy}{p}$, il vient $\frac{dy}{y} = \frac{p dp}{1+p^2}$; donc intégrant & complétant l'intégrale, on aura $A^2 y^2 = 1 + p^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}$, d'où suit l'équation $A dx = \pm \frac{A dy}{\sqrt{A^2 y^2 - 1}}$, dont l'intégrale est

$$Ax = B \pm \log. \left(Ay + \sqrt{A^2 y^2 - 1} \right).$$

Cette équation est celle de la chaînette rapportée à un axe horizontal, distant de son point le plus bas de la quantité $\frac{1}{A}$, c'est-à-dire, que la chaînette tournant autour de cet axe, engendre une surface de moindre étendue.

Si étant donnés deux cercles parallèles, & dont les centres soient sur un même axe perpendiculaire au plan de chacun, on propose de faire passer par les deux circonférences la moindre surface possible, la question se trouve résolue ici; il n'y a qu'à prendre BD égale à la distance qu'il y a entre les deux cercles BC , DE égales à leurs rayons, & déterminer les constantes A & B , de façon que la courbe que nous avons trouvée passe par les points C & E , la surface engendrée par la portion CME de la courbe sera évidemment celle qu'on demande.

Il étoit aisé de prévoir que la courbe CME devoit être la chaînette. Car cette courbe devant être entre toutes celles qui passent par les points C & E , celle qui engendre la moindre surface de révolution doit, à plus forte raison, jouir de cette propriété entre ses isopérimètres; or on fait que la chaînette est la courbe qui, entre ses isopérimètres, engendre la moindre surface de révolution: la courbe que nous cherchons devoit donc être une chaînette; mais il falloit résoudre le problème, comme nous avons fait, pour savoir particulièrement autour de quel axe une chaînette donnée devoit tourner, pour satisfaire à la question.

PROBLÈME V.

38. *Trouver l'équation générale des surfaces développables.*

SOLUTION. Une surface développable peut être regardée comme engendrée par le mouvement d'une ligne droite, dont deux positions consécutives sont dans un même plan; soient donc (fig. 9.) MN, OP, QR trois positions infiniment voisines de la droite génératrice. Il est clair que, par un point quelconque A, on peut mener sur la surface une ligne droite, savoir, OP; il y a donc un sens suivant lequel la Courbure est nulle. J'ajoute qu'il n'y en a qu'un; car s'il y avoit un autre sens $x y$, dans lequel la Courbure fût nulle, c'est-à-dire, que les trois points voisins $x A y$ fussent dans une même droite, il s'ensuivroit que, les trois droites MN, OP, QR seroient dans le même plan, qu'ainsi la surface engendrée seroit plane; donc généralement, dans toutes surfaces développables, il y a un sens unique, dans lequel la Courbure est nulle; donc un des rayons de Courbure est infini (25). Cette condition donne $V = 0$, ou $u^2 - m f = 0$, ou $\left(\frac{d d \tau}{d x d y}\right)^2 - \left(\frac{d d \tau}{d x^2}\right) \left(\frac{d d \tau}{d y^2}\right) = 0$, équation qui est précisément la même que celle que M. Monge a donnée le premier, dans un très-beau Mémoire sur les Ombres & les Pénombres, lu à l'Académie en 1775.

FIGURE 9.

39. Ceci nous donne occasion de dire un mot des surfaces engendrées de même par le mouvement d'une ligne droite; mais deux positions infiniment voisines quelconques de cette droite n'étant pas dans un même plan, surface qu'on nomme surfaces *gauches*. Pour cette espèce de surfaces, je dis qu'il y a toujours, sur un élément quelconque, deux sens, dans lesquels la Courbure est nulle; il est évident d'abord que si l'on considère l'élément qui est en A, la Courbure est nulle dans le sens OP.

Maintenant qu'on imagine, par le point A, deux plans passant, l'un par la ligne MN, l'autre par la ligne QR; ces deux

plans se coupent quelque part ; car s'ils ne se coupoient pas, les droites infiniment voisines MN , QR seroient dans un même plan, ce qui est contre la supposition. Ils ne se coupent pas suivant PO , car alors les droites OP , MN seroient dans un même plan, ainsi que les droites OP , QR , ce qui est encore contre la supposition. Ils se coupent donc suivant une ligne xy (que je fais passer par le point A , parce qu'il est commun aux deux plans) ; mais leur intersection xy coupe évidemment les droites MN , RP , quelque part en x & y . Il existe donc sur les trois droites MN , OP , QR trois points x , A , y en ligne droite ; donc la Courbure est encore nulle dans le sens xy . Or nous avons vu (22) que quand, dans un élément de surface, il y a deux sens suivant lesquels la Courbure est nulle, alors les deux rayons de Courbure sont de signes contraires ; donc : *Dans toutes surfaces gauches, les deux rayons de Courbure sont de signes contraires.*

On pourroit faire bien d'autres applications de cette Théorie ; il y a entre autres une question importante qui en dépend bien immédiatement, c'est celle des inflexions & des rebrousse-mens dans les surfaces courbes. Nous en réservons la détermination pour un autre Mémoire ; mais on peut remarquer en attendant, que les quantités U & V , qui composent presque uniquement les expressions que nous avons données pour les rayons de Courbure, appartiennent aussi aux équations des surfaces développables & de moindre étendue : d'où il suit que les propriétés de ces deux classes de surface ont, avec les résultats relatifs à la Courbure des surfaces en général, des rapports qui ne peuvent qu'être intéressans à développer.



Fig. 1.

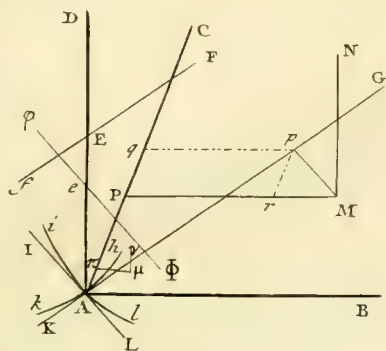


Fig. 2.

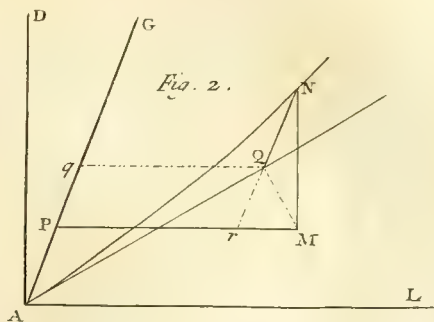


Fig. 3.

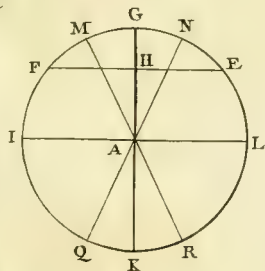


Fig. 4.

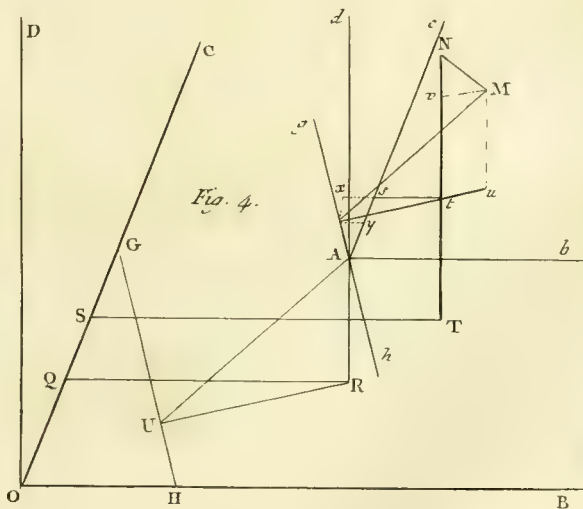
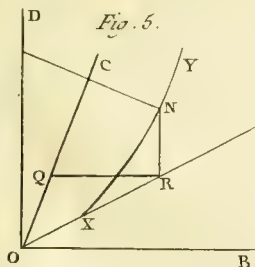
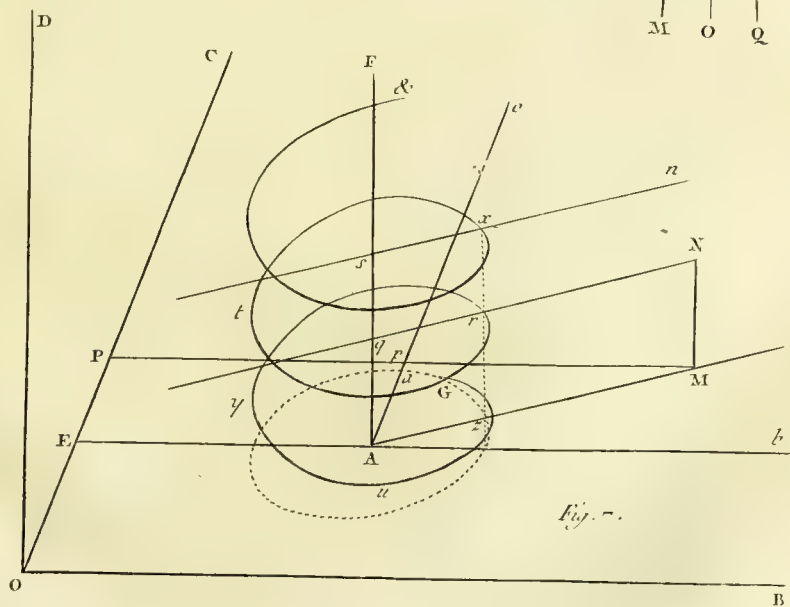
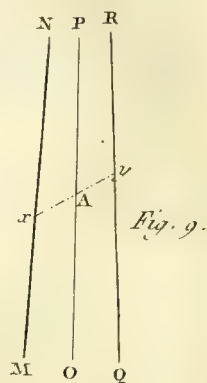
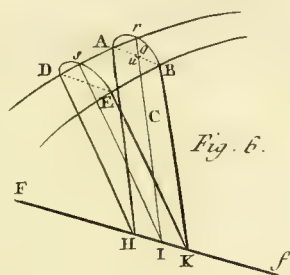
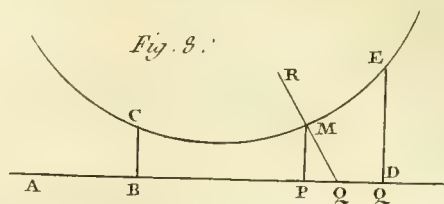
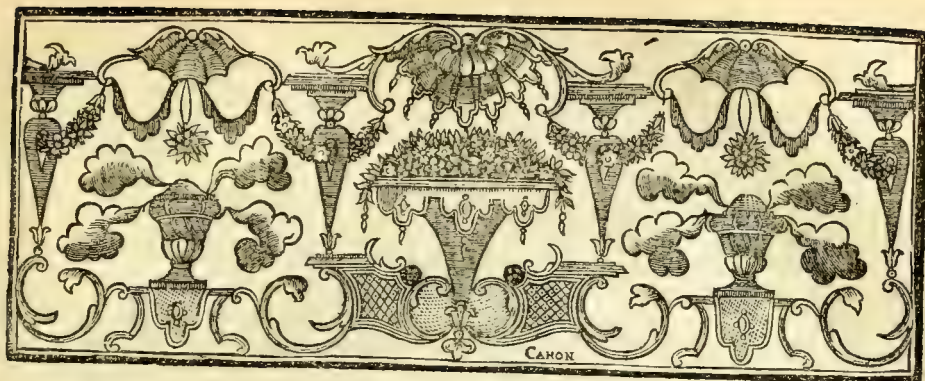


Fig. 5.









Ce Mémoire a
été présenté à l'A-
cadémie en 1771.

M É M O I R E

S U R

LES DÉVELOPPÉES,

LES RAYONS DE COURBURE,

E T

LES DIFFÉRENS GENRES D'INFLEXIONS

DES COURBES A DOUBLE COURBURE,

*Par M. MONGE, Professeur de l'École du Corps Royal
du Génie, & Membre de l'Académie.*

TOUT ce que l'on a fait jusqu'à présent sur les Développées des courbes en général, se réduit à avoir trouvé celles des courbes planes ; encore parmi le nombre infini de Développées que peut avoir une courbe plane, n'a-t-on considéré jusqu'ici que celle qui se trouve dans le même plan qu'elle : or je me propose de démontrer, dans ce Mémoire, qu'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, a une infinité de :

Développées, toutes à double courbure, à l'exception d'une seule pour chaque courbe plane, & de donner la manière de trouver les équations de telle de ces courbes qu'on voudra, étant données les équations de la développante. Tout ce qu'on connoît sur les Développées n'est donc qu'un cas particulier de l'objet de ce Mémoire.

I.

Si l'on conçoit une droite menée par le centre d'un cercle perpendiculairement à son plan, & prolongée de part & d'autre à l'infini, tout le monde fait que chacun des points de cette droite sera à égales distances de tous les points de la circonférence; que par conséquent cette circonférence sera tout aussi rigoureusement décrite, si l'on imagine qu'une seconde droite, terminée d'une part à un des points de la circonférence, & de l'autre à un point quelconque de la perpendiculaire, tourne autour de cette perpendiculaire comme axe, en faisant constamment le même angle avec elle, que si l'on eût fait tourner le rayon autour du centre & dans le plan du cercle. Cette dernière description, qui n'est qu'un cas particulier de la première, est, à la vérité, plus propre que l'autre à donner idée de l'étendue du cercle, parce qu'alors il suffit de donner le rayon pour que le cercle soit connu; tandis que par l'autre il ne suffit pas de connoître la longueur de la ligne décrivante, il faut que l'on connoisse encore ou l'angle qu'elle forme avec l'axe, ou la partie de l'axe comprise entre le pôle & le plan du cercle, ou enfin quelque chose d'équivalent, ce qui comporte nécessairement deux données. Mais tant qu'il ne sera question que de description dans l'espace & non sur un plan résistant, celle des deux méthodes qui auroit quelque avantage sur l'autre, seroit la générale; parce qu'en prenant sur l'axe deux pôles placés de part & d'autre du plan du cercle, & menant par ces deux points deux droites qui se couperoient en un point de la circonférence, & faisant enfin mouvoir le système de ces deux droites autour de l'axe de manière que leur point d'intersection fût fixe sur l'une & sur l'autre, le point décrirait rigou-

reusement

reusement la circonférence du cercle, sans qu'on eût eu besoin de connoître auparavant le plan dans lequel elle doit se trouver.

II.

Soit $KAaD$ une courbe à double courbure quelconque FIGURE 1.
tracée dans l'espace. Par un point A de cette courbe, soit mené un plan $MNOP$ perpendiculaire à la tangente en A ; par le point a infiniment proche, soit pareillement mené un plan $mnOP$ perpendiculaire à la tangente en a , ces deux plans se couperont quelque part en une droite OP qui sera l'axe du cercle, dont le petit arc Aa de la courbe peut être censé faire partie; de manière que si des points A & a on abaisse deux perpendiculaires sur cette droite, ces perpendiculaires, égales entre elles, la rencontreront en un même point G qui sera le centre de ce cercle. Tous les autres points g, g, \dots &c. de cette droite seront chacun à égales distances de tous les points de l'arc infiniment petit Aa , & pourront par conséquent en être regardés comme les pôles. Ainsi, si d'un point quelconque g de cet axe on mène deux droites aux points A & a , les droites gA & ga seront égales entre elles, & formeront avec l'axe des angles AgO & agO égaux entre eux; en sorte que,
1°. si l'on vouloit définir la courbure de la courbe au point A , il faudroit donner la longueur du rayon AG du cercle osculateur; 2°. si l'on vouloit assigner le sens de la courbure, il faudroit donner la position du centre G dans l'espace. Mais s'il s'agissoit simplement de décrire le petit arc, il seroit également suffisant ou de faire tourner la droite Ag autour de l'axe, sans altérer l'angle AgO qu'elle fait avec lui, ou de faire tourner le rayon AG perpendiculairement à cet axe.

III.

Il suit de là, que la droite OP peut être regardée comme la ligne des pôles de l'élément Aa ; que le centre G de courbure de cet élément est celui de ses pôles, dont la distance à l'élément est un *minimum*; enfin que son rayon de courbure

514 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,
est la perpendiculaire AG , abaissée de l'élément sur la ligne
des pôles.

IV.

FIGURE 2. Que l'on fasse actuellement sur tous les points de la courbe à double courbure la même opération que nous venons de faire sur un de ses élémens, c'est-à-dire, que par tous ses points consécutifs A, A', A'', A''' l'on fasse passer des plans $MNOP$, chacun perpendiculaire à la tangente de la courbe, au point dans lequel il la coupe, le premier de ces plans rencontrera le second dans une droite OP , qui sera le lieu géométrique des pôles de l'arc AA' ; le second rencontrera le troisième dans la droite $O'P'$, lieu des pôles de l'arc $A'A''$; le troisième rencontrera le quatrième dans la droite $O''P''$, lieu des pôles de l'arc $A''A'''$, & ainsi de suite. Il est évident que le système de toutes ces droites d'intersections, ou la surface courbe qu'elles forment par leur assemblage, sera le lieu géométrique des pôles de la courbe KAD ; car cette courbe n'aura point de pôles qui ne se trouvent sur cette surface, & la surface n'aura pas de point qui ne soit le pôle de quelqu'un des élémens de la courbe.

V.

Quoique la nature de cette surface courbe dépende absolument de celle de la courbe KAD , cependant toutes les surfaces engendrées de cette manière jouissent d'un caractère général, & indépendant pour chacune d'elles de la courbe particulière qui a servi à la former. Ce caractère est de pouvoir être développées sur un plan, comme les surfaces coniques & cylindriques à bases quelconques, sans duplication, & sans solution de continuité. En effet, les hedres $OPP'O'$ dont est composée la surface de la *figure 2*, sont des portions de plans infiniment étroites, infiniment longues, & qui se coupent consécutivement suivant des lignes droites. Cela posé, on peut toujours concevoir que la première hedre $OPP'O'$ tourne autour de la droite $O'P'$ comme charnière, jusqu'à ce qu'elle

parvienne dans le plan de l'hedre suivante $O'P'P''O''$; qu'ensuite leur système tourne autour de $O''P''$, & en ne faisant qu'un même plan jusqu'à ce qu'il soit dans le plan de la troisième $O''P''P'''O'''$, & ainsi de suite ; d'où l'on voit que rien n'empêche que de cette manière tous les élémens de la surface ne viennent, sans rupture, se ranger dans un même plan. Donc la surface des pôles d'une courbe à double courbure quelconque est toujours une surface développable.

VI.

THÉORÈME I.

Une courbe quelconque plane ou à double courbure, a une infinité de Développées, dont le lieu géométrique est aussi la surface des pôles de cette courbe.

DÉMONSTRATION. Du point A de la courbe par lequel passe le premier plan normal $MNOP$, soit menée dans ce plan, & suivant une direction arbitraire, une droite Ag jusqu'à ce qu'elle rencontre la section OP quelque part en un point g : par les points A' & g , soit menée, dans le second plan normal, la droite $A'g$, prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la section $O'P'$ en un point g' : soient pareillement menés $A''g'g''$, & ainsi de suite ; je dis que la courbe qui passe par tous les points $gg'g''...$ est une des Développées de la courbe KAD : car, 1°. toutes les droites Ag , $A'g'$, $A''g''...$ sont les tangentes de la courbe $gg'g''...$, puisqu'elles sont les prolongemens des élémens de cette courbe. 2°. Si l'on conçoit que la première Ag tourne autour du point g pour venir s'appliquer sur la suivante $A'g$, elle n'aura pas cessé d'être tangente à la courbe $gg'g''...$, & son extrémité A , après avoir parcouru l'arc AA' , se confondra avec l'extrémité A' de la seconde. Que l'on fasse de même tourner la seconde ligne $A'g'$ autour du point g' pour qu'elle vienne s'appliquer sur la troisième $A''g'$, elle ne cessera pas de toucher la courbe $gg'g''...$, & son extrémité A' ne sortira pas de l'arc $A'A''$, & ainsi de suite. Donc la

FIGURE 1.

courbe $gg'g'' \dots$ est telle que si l'on conçoit qu'une de ses tangentes tourne autour de cette courbe sans jamais cesser de lui être tangente, & sans avoir de mouvement dans le sens de sa longueur, un des points de cette tangente décrira la courbe KAD ; donc elle est une de ses Développées. Mais la direction de la première droite Ag étoit arbitraire, & suivant quelque autre direction qu'on l'eût menée dans le plan normal, on auroit trouvé une autre courbe $gg'g'' \dots$ qui auroit été pareillement une des Développées de la courbe KAD ; donc une courbe quelconque a une infinité de Développées toutes comprises sur la surface développable qui est le lieu de ses pôles: or cette surface renferme tous les pôles de la courbe, & est par conséquent la seule qui en contienne les Développées; donc elle est leur lieu géométrique.

VII.

Remarquons que tous les plans $MNOP$ étant tangens à la surface développable, puisque chacun d'eux est le prolongement d'un de ses élémens, la droite Ag , qui, dans tous les instans de son mouvement, se trouve dans un de ces plans, est aussi nécessairement tangente à cette surface.

VIII.

Si du point A l'on abaisse sur OP la perpendiculaire AG du point A' sur $O'P'$, la perpendiculaire $A'G'$, du point A'' sur $O''P''$, la perpendiculaire $A''G''$, & ainsi de suite, nous avons vu que les points $G, G', G'' \dots$ seront les centres de courbure des élémens correspondans de la courbe KAD ; que par conséquent la courbe qui passeroit par tous les points $G, G', G'' \dots$ seroit le lieu géométrique de ces centres de courbure. Je dis que cette courbe ne peut être une des Développées de la proposée, à moins que la proposée ne soit plane, auquel cas elle devient la seule dont on se soit occupé jusqu'à présent. En effet, lorsqu'une courbe est à double courbure, deux tangentes consécutives, quelque part qu'on les prenne, sont bien dans un même plan; mais trois tangentes prises de

fuite ne peuvent plus s'y trouver : donc trois plans consécutifs, chacun normal à la courbe, ne peuvent pas être perpendiculaires à un même plan, & par conséquent l'intersection du premier & du second ne sauroit être parallèle à l'intersection du second & du troisième. Donc, pour une courbe à double courbure, les droites OP , $O'P'$, $O''P''$ ne peuvent pas être parallèles.

Cela posé, la droite AG étant perpendiculaire à OP , la droite $A'G'$ lui fera aussi perpendiculaire, &, prolongée jusqu'en k , ne rencontrera pas $O'P'$ perpendiculairement; elle fera par conséquent distincte de la droite $A'G'$ abaissée perpendiculairement du point A' sur $O'P'$. Donc les deux droites consécutives AG & $A'G'$ ne rencontreront pas la droite OP dans le même point; mais deux droites considérées dans des plans différens, ne peuvent se rencontrer, à moins que ce ne soit sur l'intersection des deux plans dans lesquels on les considère; donc les droites AG & $A'G'$ ne se rencontrent pas, & ne sont par conséquent pas dans un même plan. Il en est de même de la fuite des droites $A'G'$, $A''G''$, $A'''G'''$ prises deux à deux consécutivement; donc toutes ces droites ne peuvent pas être les tangentes consécutives d'une même courbe. Il suit aussi de là, que si, par deux points consécutifs G & G' , l'on conçoit une droite qui sera tangente à la courbe $GG'G''$, cette droite ne passera pas par le point A' : or en tant qu'elle est sur le second plan normal, elle ne pourroit couper la courbe KAD que dans le point A' , où ce plan la coupe lui-même; donc la courbe $GG'G''$... est telle, qu'aucune de ses tangentes prolongées ne rencontre la courbe KAD ; donc elle ne peut être une de ses Développées.

Si la courbe KAD étoit plane, toutes ses droites OP ; $O'P'$, $O''P''$ seroient perpendiculaires au plan de la courbe, & par conséquent parallèles entre elles. Les droites AG , $A'G'$, $A''G''$ seroient toutes dans le plan de la courbe, & se rencontreroient consécutivement dans la courbe $GG'G''$,

518 MEMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,
dont elles feroient les tangentes, & il est évident que cette courbe
ne feroit alors autre chose que ce qu'on a appelé jusqu'à pré-
sent la Développée de la courbe K A D.

IX.

THÉOREME II.

On aura une des Développées d'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, si, par un de ses points, & suivant une direction arbitraire, on mène une tangente à la surface développable qui est le lieu de ses pôles, & si l'on plie librement sur cette surface le prolongement de cette tangente.

FIGURE 2. DÉMONSTRATION. C'est-à-dire, que la courbe $g g' g'' \dots$ est celle que formeroit sur la surface $OPP'''O''$ une droite pliée librement sur cette surface, & dirigée au premier instant suivant $A g$. Pour le démontrer, observons ce qui arrive à une droite, ou à un fil que l'on plie librement sur une surface. Ce fil peut être considéré ou comme ayant une largeur infiniment petite, c'est-à-dire, comme un ruban infiniment étroit, ou comme n'ayant aucune largeur. Soit (*fig. 3 & 4*) $OPP''O''$ deux élémens plans ou deux hedres consécutives d'une surface courbe, jointes par la droite infiniment petite $O'P'$. Soit pour le premier cas (*fig. 3.*) ABG un ruban infiniment étroit, appliqué sur un de ces élémens suivant une direction quelconque; il est clair que la partie BG ne peut pas se rapprocher de l'élément suivant pour s'appliquer sur lui, sans faire une partie de révolution autour de Bb ou de $O'P'$; & comme cette révolution doit se faire librement, ce qui comporte que ce ruban doit, dans tous ses points, toucher la surface, l'angle $P'BG$ doit rester constant; le ruban prendra donc une position BC telle que l'angle $P'BC$ sera égal à l'angle $O'BA$. Dans le second cas (*fig. 4.*), soit ABC un fil tendu sur l'arête commune $O'P'$ des deux élémens de la surface: comme ce fil n'a aucun mouvement, il doit être également tiré par ses deux extrémités, & l'on pourra prendre de part & d'autre du point B des droites égales BA ,

BC pour représenter ces tensions. L'on pourra décomposer chacune de ces deux forces en deux autres, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à $O'P'$, & en abaissant des points A & C perpendiculaires sur $O'P'$, ces quatre forces seront représentées par AD, BD, BE & CE; puisque le fil est en équilibre, le point B n'a de mouvement ni vers O' ni vers P' ; on aura donc $BD=BE$; donc on aura l'angle $EBC =$ l'angle ABD . De quelque manière donc que l'on considère la ligne que forme sur une surface courbe une droite pliée librement, elle doit faire des angles égaux de part & d'autre avec chaque arête que l'on considère sur la surface. Or la ligne $gg'g''....$ (fig. 2.) jouit de cette propriété; car on a l'angle $A'g'O' =$ l'angle $A''g'O' =$ l'angle $P'g'g''$; & ce que nous venons de dire par rapport à l'arête $O'P'$, doit aussi se dire par rapport à toute autre arête : donc la courbe $gg'g''....$ est celle que formeroit sur la surface $OPP'''O'''$ une droite pliée librement avec une direction A g au premier instant. Donc, &c. C. Q. F. D.

X.

THÉOREME III.

La courbe que forme une droite pliée librement sur une surface courbe, est la plus courte entre ses extrémités que l'on puisse mener sur cette surface.

DÉMONSTRATION. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que la ligne ABC, ou la somme des deux droites $AB+BC$, est plus courte que la somme de deux autres droites quelconques $AM+MC$, menées par les deux points A & C. Pour cela soient $AD=a$, $DE=b$, $EC=c$, & $EM=x$, on aura $MC = \sqrt{c^2+x^2}$, $AM = \sqrt{a^2+(b-x)^2}$, & par conséquent $AM+MC = \sqrt{c^2+x^2} + \sqrt{a^2+(b-x)^2}$, dont la différentielle égalée à zéro, donne $(b-x) : \sqrt{a^2+(b-x)^2} = x : \sqrt{c^2-x^2}$: ce qui exprime que, dans le cas du minimum, l'angle AMD doit être égal à l'angle EMC; & que

FIGURE 4.

réciroquement, lorsque ces angles sont égaux, la somme $AB + BC$ est un *minimum*. Donc, &c. C. Q. F. D.

XI.

On auroit pu démontrer que chaque Développée est la plus courte entre les extrémités que l'on puisse mener sur la surface développable, par une considération beaucoup plus simple : car, puisque l'on a par-tout l'angle $gg'O' = P'g'g''$, l'angle $g'g''O'' = P''g''g'''$ & ainsi de suite, il est évident que si l'on développe la surface développable sur un plan, la courbe $gg'g''...$ doit s'étendre en ligne droite; d'où il suit immédiatement qu'elle est la plus courte entre ses extrémités qui puisse exister sur la surface développable. Mais cette démonstration ne peut avoir lieu que pour les surfaces développables; d'ailleurs, ce n'est pas là la propriété des Développées qu'il importoit de connoître. Il est bien plus utile, dans la pratique, de savoir qu'ayant construit la surface développable, lieu géométrique des Développées d'une courbe quelconque à double courbure, on a mécaniquement une de ses Développées, en menant, par un point de la courbe, un fil dans une direction quelconque tangent à cette surface, & pliant ensuite librement le fil sur la surface, ce qui est simple, & suit immédiatement du Théorème II.

XII.

Une courbe plane a donc une infinité de Développées qui se trouvent toutes sur la surface du cylindre, qui a pour base celle de ces Développées qui est dans le plan de la courbe; & toutes ces Développées sont à double courbure, à l'exception seulement de celle dont on s'est occupé jusqu'à présent, & qui sert de base à la surface cylindrique.

XIII.

FIGURE 5. Réciroquement une surface cylindrique à base quelconque est le lieu des Développées d'une infinité de courbes, dont aucune ne peut être à double courbure. Soit en effet $BB'B''B'''...$ une courbe plane quelconque, & $OO'O''O'''...$ la Développée plane;

plane : par tous les points $B, B', B'' \dots$ &c. soient menés dans le plan de la courbe les rayons de Développée $BO, B'O', B''O'' \dots$ &c. qui se couperont consécutivement dans la Développée $OO'O''O''' \dots$ à laquelle ils feront tangens. Par les points $O, O', O'', O''' \dots$ &c. soient menés perpendiculairement au plan de la courbe les droites $OP, O'P', O''P'' \dots$ &c. dont l'assemblage formera une surface cylindrique qui, d'après l'article précédent, sera le lieu de l'infinité de Développées de la courbe $BB'B''B''' \dots$. Par le point B , & suivant une inclination quelconque, soit menée sur OP la droite BP : par les points B' & P , soit menée la droite $B'P$, prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre $O'P'$ quelque part en P' : de même soit menée $B''P'$, prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre $O''P''$ en P'' , & ainsi de suite ; ou, ce qui revient au même, par le point B' , & suivant une direction quelconque BP , soit menée une tangente à la surface cylindrique, & soit librement pliée cette droite sur la surface en $PP'P''P''' \dots$, l'on aura une des Développées à double courbure de la courbe plane $BB'B''B''' \dots$. Cela posé, la courbe $PP'P'' \dots$ est bien à la vérité la Développée d'une infinité d'autres développantes que de $BB'B'' \dots$; mais il est clair que toutes ces développantes doivent être comprises dans la surface courbe formée par les rayons de Développées $BP, B'P', B''P'' \dots$, & qu'on aura une de ces développantes en alongeant ou diminuant tous ces rayons d'une quantité constante Bb ; ainsi les courbes $bb'b''b''' \dots$ décrites par l'extrémité du rayon de Développée, augmenté ou diminué de la quantité Bb , ont aussi, pour une de leurs Développées, la courbe $PP'P''P''' \dots$. Or, si des points $b, b', b'', b''' \dots$ &c. on abaisse des perpendiculaires sur le plan de la courbe $BB'B''B''' \dots$, on aura autant de triangles rectangles $Bbk, B'b'k' \dots$ &c. égaux entre eux & semblables, puisque tous les rayons de Développées sont également inclinés à ce plan ; donc toutes les perpendiculaires $bk, b'k', b''k'' \dots$ seront égales : donc tous les points de chaque courbe $bb'b''b''' \dots$ seront à égales distances du plan de la première ; donc ces courbes seront planes : ainsi la courbe $PP'P''P''' \dots$ ne peut être la Développée que de courbes planes. Mais ce que

522 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,

l'on vient de dire de la courbe $PP'P''P'''$... peut s'appliquer à toute autre décrite de la même manière sur la surface cylindrique; donc une surface cylindrique à base quelconque ne peut être le lieu des Développées que de courbes planes.

XIV.

Toute courbe tracée sur la surface d'une sphère, a pour lieu de ses Développées la surface d'un cône, dont le sommet est au centre de la sphère, & dont la base dépend de la nature de la courbe; car tous les plans perpendiculaires aux élémens de la courbe le sont aussi à la surface sphérique, & passent par conséquent par le centre.

XV.

Réciproquement une courbe quelconque, dont le lieu des Développées est la surface d'un cône à base quelconque, est sphérique, & a pour centre le sommet du cône; car, pour en trouver une Développée, il est indifférent de donner telle direction qu'on voudra au rayon de Développée, pourvu qu'il soit normal, ou, ce qui revient au même, qu'il soit tangent à la surface conique: on peut donc le diriger au sommet du cône autour duquel il fera une infinité de révolutions sans s'allonger sensiblement, & le point décrivant restera toujours à la même distance de ce sommet.

XVI.

Donc une courbe, qui n'est ni plane ni sphérique, a pour lieu de ses Développées une surface développable, dont deux arêtes rectilignes consécutives se rencontrent bien quelque part, mais dont trois prises de suite ne se rencontrent pas dans un même point. La suite de ces points d'intersections forme une courbe qu'il est fort aisé de reconnoître pour ne devoir jamais être plane, parce qu'alors la surface développable, dont toutes les arêtes ne sont autre chose que les tangentes de cette courbe, seroit réduite à un plan.

XVII.

Donc, 1°. lorsque le lieu des Développées d'une courbe

à double courbure aura deux arêtes consécutives parallèles entre elles, la partie correspondante de la courbe sera plane, & réciproquement. 2°. Lorsque trois de ces arêtes consécutives se rencontreront dans le même point, la partie correspondante de la courbe sera sphérique, & son centre sera au point de rencontre des trois arêtes.

Avant que d'aller plus loin, disons quelque chose des surfaces développables en général.

XVIII.

Il suit de tout ce qui précède, que les surfaces développables sont toutes composées du système d'une infinité de droites prolongées à l'infini, & qui, toutes prises deux à deux consécutivement, sont dans un même plan. Il peut donc arriver ces trois cas, 1°. qu'elles soient toutes parallèles entre elles, & alors la surface développable est cylindrique à base quelconque: 2°. qu'elles se rencontrent toutes dans un même point; dans ce cas, la surface est celle d'un cône à base quelconque: 3°. enfin, que toutes ses droites se rencontrent deux à deux consécutivement dans une suite de points, dont le système forme une courbe à double courbure, à laquelle toutes ces droites sont tangentes, & c'est le cas général des surfaces développables. Cette courbe, pour chaque surface en particulier, est singulièrement remarquable, & jouit en général des propriétés suivantes.

1°. Cette courbe suffit pour déterminer la surface développable à laquelle elle appartient, puisque cette surface n'est autre chose que le lieu géométrique de ses tangentes.

2°. Elle est la limite de la surface développable, puisqu'aucune des droites, dont est composée la surface, ne peut passer du côté vers lequel cette courbe est concave. Ceci s'entendra mieux par un exemple. Que l'on conçoive que toutes les tangentes possibles de l'hélice d'une vis soient prolongées à l'infini, & forment, par leur système, une surface développable, cette surface aura un nombre infini de *nappes*, & chacune de ces

524 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,

nappes sera d'une étendue infinie, comme les droites dont elle est composée; mais aucune d'elles n'entrera dans le cylindre sur la surface duquel est tracée l'hélice: elles viendront donc toutes se terminer à cette courbe; qui sera par conséquent leur limite.

3°. Cette courbe est, pour la surface développable, ce qu'un point de retournement est pour une courbe ordinaire: car les tangentes d'une courbe peuvent également être prolongées dans les deux sens, chacune par rapport à son point de contact; or, leurs prolongemens, dans un sens, forment une nappe particulière; leurs prolongemens, dans l'autre sens, forment une nappe distincte de la première, tant que la courbe n'est pas plane, & néanmoins ces deux nappes passent à la fois par la courbe qui est leur limite commune. Cette courbe est donc, à proprement parler, l'*arête de rebroussement* de la surface développable. C'est aussi le nom que je lui donnerai. J'appellerai donc désormais *arête de rebroussement* d'une surface développable, la courbe touchée par toutes les droites dont cette surface est composée, ou, pour parler plus rigoureusement, la courbe constamment touchée par la droite qui, en se mouvant, engendre la surface.

Il ne s'agit plus actuellement que d'appliquer l'analyse à tout ce qui précède; & pour cela, établissons d'abord quelques déterminations géométriques qui nous seront nécessaires.

XIX.

PROBLÈME I.

Etant données, 1°. les équations d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace, & rapportées à trois plans rectangulaires, 2°. les trois coordonnées d'un point, trouver l'équation du plan mené par ce point perpendiculairement à la droite.

SOLUTION. Soient $ax + by + cz + d = 0$,

& $a'x + b'y + c'z + d' = 0$,

les équations données de la droite, & x' , y' & z' les coordonnées

LES RAYONS DE COURBURE, &c. § 25

du point donné. On aura les équations des trois projections de la droite sur les trois plans, en éliminant successivement une des trois variables x , y & z des deux équations précédentes; ainsi ces trois équations seront

$$[ab' - a'b]y - [ca' - c'a]z + ad' - a'd = 0$$

$$[ca' - c'a]x - [bc' - b'c]y + cd' - c'd = 0$$

$$[bc' - b'c]z - [ab' - a'b]x + bd' - b'd = 0;$$

& si l'on fait, pour abrégér,

$$ab' - a'b = \alpha \qquad ad' - a'd = \delta$$

$$ca' - c'a = \beta \qquad cd' - c'd = \epsilon$$

$$bc' - b'c = \gamma \qquad bd' - b'd = \zeta,$$

elles deviendront

$$\alpha y - \beta z + \delta = 0$$

$$\beta x - \gamma y + \epsilon = 0$$

$$\gamma z - \alpha x + \zeta = 0.$$

De ces trois équations, deux quelconques supposent la troisième, parce que deux projections d'une droite suffisent pour la déterminer dans l'espace; donc les six quantités α , β , γ , δ , ϵ & ζ ne sont pas indépendantes les unes des autres: elles doivent être telles que ces trois équations aient lieu à la fois; & on trouvera la relation qu'elles ont entre elles, en multipliant la première par γ , la seconde par α , la troisième par β ; & ajoutant; ce qui donne

$$\alpha \epsilon + \beta \zeta + \gamma \delta = 0;$$

équation qui est identique, & se vérifie par la substitution des valeurs de α , β , γ , δ , ϵ & ζ .

Cela posé, l'équation générale du plan est

$$A z + B y + C x + D = 0,$$

les quantités A , B , C & D étant des constantes qu'on doit déterminer d'après les conditions auxquelles doit satisfaire la position du plan. Or la première condition est que ce plan passe

526 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,

par le point dont les coordonnées sont x' , y' & z' , c'est-à-dire, que l'équation doit être telle, qu'en faisant $x = x'$, $y = y'$, elle donne $z = z'$; elle doit donc être

$$A[z - z'] + B[y - y'] + C[x - x'] = 0.$$

Quant aux coefficients A , B & C , il faut les déterminer d'après cette autre condition, que le plan soit perpendiculaire à la droite. Pour cela, imaginons, par l'origine, une parallèle à la droite donnée, & concevons que ce soit à cette parallèle que le plan doive être perpendiculaire, ce qui ne change rien à sa position. Les équations des trois projections de cette parallèle se trouveront en supprimant les termes constans de celles de la première droite, & seront par conséquent

$$\alpha y - \beta z = 0$$

$$\beta x - \gamma y = 0$$

$$\gamma z - \alpha x = 0.$$

Les *cosinus* des angles que fera cette droite avec les trois axes, seront

$$\text{pour l'axe des } x, \quad \gamma : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$\text{pour l'axe des } y, \quad \beta : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$\text{\& pour l'axe des } z, \quad \alpha : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Soit m la distance de l'origine au point où la parallèle est coupée par le plan perpendiculaire, si de ce point on mène trois droites aux points où les trois axes sont coupés par le même plan, on aura trois triangles rectangles, dont les trois hypoténuses seront

$$\frac{m}{\gamma} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad \frac{m}{\beta} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad \frac{m}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

les constantes A , B & C doivent donc être telles,

$$\text{qu'en faisant } y = 0 \text{ \& } z = 0, \text{ on ait } x = \frac{m}{\gamma} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$\text{qu'en faisant } x = 0 \text{ \& } y = 0, \text{ on ait } z = \frac{m}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$\text{\& qu'en faisant } z = 0 \text{ \& } x = 0, \text{ on ait } y = \frac{m}{\beta} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Faisant en effet ces suppositions dans l'équation du plan, on trouve $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}$. Donc le rapport des trois coefficients A , B & C est le même que celui des trois quantités α , β & γ . Donc l'équation du plan perpendiculaire est

$$\alpha [z - z'] + \beta [y - y'] + \gamma [x - x'] = 0. \quad C. Q. F. T.$$

XX.

PROBLÈME II.

Etant données les trois coordonnées d'un point, & les équations d'une droite rapportée aux mêmes plans rectangulaires; trouver l'expression de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

SOLUTION. Soient, comme dans le problème précédent x' , y' & z' , les coordonnées du point donné, &

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

les équations de la droite, de manière qu'en conservant les abréviations précédentes, les équations de ses trois projections soient.

$$ay - \beta z + d = 0$$

$$\beta x - \gamma y + \varepsilon = 0$$

$$\gamma z - \alpha x + \zeta = 0,$$

dans lesquelles l'équation de condition $\alpha \varepsilon + \beta \zeta + \gamma d = 0$ est nécessairement satisfaite.

Cela posé, si par le point donné on mène un plan perpendiculaire à la droite, ce plan la coupera dans un point qui fera le pied de la perpendiculaire demandée, en sorte que si les coordonnées de ce point sont x , y & z , la distance demandée fera

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Il ne s'agit donc plus que de trouver ces coordonnées. Mais

528 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,

l'équation du plan perpendiculaire étant par le problème précédent $\alpha(z - z') + \beta(y - y') + \gamma(x - x') = 0$, on aura les coordonnées du point d'intersection, en éliminant entre cette équation & celles des projections de la droite, ce qui donne

$$x - x' = [\alpha(\gamma z' - \alpha x' + \varepsilon) - \beta(\beta x' - \gamma y' + \zeta)] : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$y - y' = [\gamma(\beta x' - \gamma y' + \zeta) - \alpha(\alpha y' - \beta z' + \delta)] : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$z - z' = [\beta(\alpha y' - \beta z' + \delta) - \gamma(\gamma z' - \alpha x' + \varepsilon)] : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2);$$

faisons encore, pour abrégér,

$$\alpha y' - \beta z' + \delta = \lambda$$

$$\beta x' - \gamma y' + \zeta = \mu$$

$$\gamma z' - \alpha x' + \varepsilon = \nu,$$

d'où l'on tire, en multipliant la première par γ , la seconde par α , la troisième par β , & ajoutant

$$\alpha \mu + \beta \nu + \gamma \lambda = 0,$$

& les trois expressions précédentes deviendront

$$x - x' = (\alpha \nu - \beta \mu) : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$y - y' = (\gamma \mu - \alpha \lambda) : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$z - z' = (\beta \lambda - \gamma \nu) : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

par conséquent la somme des trois carrés $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ fera

$$[(\alpha \nu - \beta \mu)^2 + (\gamma \mu - \alpha \lambda)^2 + (\beta \lambda - \gamma \nu)^2] : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2.$$

Mais si l'on développe le numérateur, on verra facilement qu'il peut être mis sous cette forme:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\alpha \mu + \beta \nu + \gamma \lambda)^2,$$

dont le second terme est $= 0$ par une des équations ci-dessus; donc l'expression de la perpendiculaire demandée, fera

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \quad C. Q. F. T.$$

Appliquons actuellement l'analyse à la théorie des Développées.

XXL

PROBLÈME III.

Etant données les équations d'une courbe à double courbure, rapportées à trois plans rectangulaires, trouver celle du plan normal mené par un point déterminé de la courbe.

SOLUTION. Le plan normal étant perpendiculaire à la tangente de la courbe au point où elle est coupée par ce plan, il suit du problème premier, qu'on aura facilement l'équation demandée, lorsqu'on aura celles des projections de cette tangente; or ces projections sont elles-mêmes les tangentes aux projections de la courbe dans des points qui correspondent à la même abscisse: la question est donc réduite à trouver les équations des tangentes des projections. Soient $y = \phi x$ & $z = \psi x$ les équations des projections de la courbe, ϕ & ψ indiquant des fonctions quelconques: soit de plus x' l'abscisse du point déterminé de la courbe par lequel on doit mener le plan normal, & par conséquent $\phi x'$ & $\psi x'$ les autres coordonnées de ce point; cela posé, cherchons d'abord l'équation de la tangente à la projection sur le plan des x & y .

Cette équation doit généralement être de cette forme $y = Ax + B$, A étant la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des x ; or cet angle est le même que celui que fait avec le même axe l'élément de la projection qui correspond aux coordonnées x' & $\phi x'$; donc on aura $A = \frac{d\phi x'}{dx'} = \phi' x'$. La tangente devant de plus passer par cet élément, il faut que la constante B soit telle qu'en faisant $x = x'$, on ait $y = \phi x'$, l'équation de la tangente à la projection sur le plan des x & y fera donc:

$$y - \phi x' = (x - x') \phi' x'.$$

Par un semblable raisonnement, on trouvera que l'équation

Tome X.

Xxx

530 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,
de la tangente à la projection sur le plan des x & z , pour la
même abscisse de point de contact, est

$$z - \psi x' = (x - x') \psi' x'.$$

Ces deux équations sont celles des projections de la tangente de la courbe à double courbure; ainsi, pour appliquer ici les résultats du problème premier, on aura

$$\begin{aligned} x' &= x' & \alpha &= \psi' x' \\ y' &= \phi x' & \beta &= \phi' x' \\ z' &= \psi x' & \gamma &= 1 \end{aligned}$$

& l'équation demandée du plan normal sera

$$(A). \quad [z - \psi x'] \psi' x' + [y - \phi x'] \phi' x' + x - x' = 0.$$

C. Q. F. T.

C O R O L L A I R E.

Si, au lieu de représenter par x' , $\phi x'$ & $\psi x'$ les coordonnées du point de la courbe pour lequel on cherche le plan normal, on les exprime par x' , y' & z' , ce qui donne $\phi' x' = \frac{dy'}{dx'}$ & $\psi' x' = \frac{dz'}{dx'}$, l'équation du plan normal sera

$[z - z'] dz' + [y - y'] dy' + [x - x'] dx' = 0$,
de laquelle on chassera les quantités $y' z'$, & leurs différentielles,
par le moyen des équations données de la courbe.

XXII.

P R O B L Ê M E IV.

Etant données les équations d'une courbe à double courbure rapportée à trois plans rectangulaires, trouver celle de la surface développable qui est le lieu géométrique de toutes ses Développées.

SOLUTION. Soient, comme précédemment, $y = \phi x$ & $z = \psi x$ les équations de la courbe proposée, de manière que celle du plan normal mené par le point de la courbe qui

correspond à l'abscisse x' , soit en vertu du problème précédent

$$(A) [\zeta - \psi x'] \psi' x' + [y - \phi x'] \phi' x' + x - x' = 0.$$

Si l'on prend encore sur la courbe un point infiniment voisin du premier, & correspondant à l'abscisse $x' + dx'$, l'équation du plan normal mené par ce nouveau point, se trouvera en mettant, dans la précédente, $x' + dx'$ à la place de x' , & sera

$$(a) \left\{ [\zeta - \psi(x' + dx')] \psi'(x' + dx') + [y - \phi(x' + dx')] \phi'(x' + dx') \right\} + x - (x' + dx') = 0,$$

& si dans les deux équations (A) & (a), on fait les x , y & ζ de l'une égales respectivement aux x , y & ζ de l'autre, ces deux équations seront celles de la droite d'intersection des deux plans infiniment voisins : ou bien retranchant (A) de (a), négligeant les infiniment petits du second ordre, & divisant par dx , on aura, pour cette droite d'intersection, les deux équations suivantes.

$$(A) [\zeta - \psi x'] \psi' x' + [y - \phi x'] \phi' x' + x - x' = 0.$$

$$(B) [\zeta - \psi x'] \psi'' x' + [y - \phi x'] \phi'' x' - [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] = 0.$$

Or cette intersection se trouve tout entière (Théorème I.) sur la surface des Développées, & renferme tous les pôles de l'élément de la courbe compris entre les limites x' & $x' + dx'$; donc, pour avoir entre x , y & ζ une relation qui convienne à tous les pôles de la courbe, indépendamment de l'abscisse x' , on n'aura qu'à éliminer x' des deux équations (A) & (B), & l'équation qui résultera, sera celle de la surface demandée. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

Si, au lieu de représenter par x' , $\phi x'$ & $\psi x'$ les coordonnées de la courbe, on les exprime par x' , y' & ζ' , ce qui donne $\phi'' x' = \frac{d^2 y'}{dx'^2}$ & $\psi'' x' = \frac{d^2 \zeta'}{dx'^2}$, faisant ensuite, pour abrégé, $ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + d\zeta'^2}$ = l'élément de la courbe, les deux équations (A) & (B) deviendront

$$[\zeta - \zeta'] d\zeta' + [y - y'] dy' + [x - x'] dx' = 0.$$

$$[\zeta - \zeta'] dd\zeta' + [y - y'] dd y' - ds'^2 = 0,$$

X x x ij

532 MÉMOIRES SUR LES DÉVELOPPÉES,

desquelles on tirera l'équation de la surface développable en mettant, pour y' , z' & leurs différentielles, leurs valeurs prises dans les équations de la courbe, & éliminant ensuite x' .

XXIII.

On auroit pu déduire immédiatement l'équation (B) de l'équation (A), en remarquant qu'elle est la différentielle de celle-ci prise en regardant x' comme seule variable. Donc, pour trouver l'équation de la surface développable, qui est le lieu géométrique des Développées d'une courbe à double courbure, il faut d'abord chercher l'équation du plan normal à la courbe, qui sera nécessairement de cette forme, $Az + By + Cx + D = 0$, & dans laquelle les constantes A , B , C & D sont des fonctions connues de l'abscisse x' correspondantes au point de la courbe par lequel passe le plan normal; différencier ensuite cette équation, en ne faisant varier que x' , ce qui donnera une seconde équation qui servira à éliminer x' de celle du plan, & l'équation en x , y & z qu'on obtiendra, sera celle de la surface demandée.

XXIV.

PROBLÈME V.

Etant données les équations d'une courbe à double courbure, trouver celles de l'arête de rebroussement de la surface développable qui est le lieu géométrique de ses Développées.

SOLUTION. Les deux équations du problème précédent étant celles de l'intersection des deux plans perpendiculaires à la courbe, menés par les points qui correspondent aux abscisses x' , & $x' + dx'$, & par conséquent celles d'une des droites qui composent la surface des Développées, si l'on suppose que, dans ces deux équations, x' devienne $x' + dx'$, & que $x' + dx'$ devienne $x' + 2 dx'$, ce qui donnera

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} [z - \psi(x' + dx')] \cdot \psi'(x' + dx') + [y - \phi(x' + dx')] \cdot \phi'(x' + dx') \\ + x - (x' + dx') \end{array} \right\} = 0$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} [z - \psi(x' + 2 dx')] \cdot \psi'(x' + 2 dx') + [y - \phi(x' + 2 dx')] \cdot \phi'(x' + 2 dx') \\ + x - (x' + 2 dx') \end{array} \right\} = 0.$$

Ces deux équations seront celles d'une droite qui se trouve encore sur la surface des Développées, infiniment près de la première; & si, dans les quatre équations (A), (B), (a) & (b), on fait les x , y , z de chacune d'elles égales aux x , y , z de toutes les autres, ces quatre équations seront celles de l'intersection de ces deux droites infiniment proches. Ou bien, remarquant que les équations (B) & (a) se comportent l'une l'autre, & retranchant ensuite (a) de (b), on aura, pour le point d'intersection des deux droites consécutives, les trois équations

$$(A) [\zeta - \psi x'] \psi' x' + [y - \phi x'] \phi' x' + x - x' = 0$$

$$(B) [\zeta - \psi x'] \psi'' x' + [y - \phi x'] \phi'' x' - [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] = 0$$

$$(C) [\zeta - \psi x'] \psi''' x' + [y - \phi x'] \phi''' x' - 3[\phi' x' \phi'' x' + \psi' x' \psi'' x'] = 0.$$

Or ce point d'intersection appartient à l'arête de rebroussement; il se trouve en même temps sur les trois plans perpendiculaires à la courbe proposée, menés par les points de cette courbe qui correspondent aux abscisses x' , $x' + dx'$, $x' + 2 dx'$; sa position dépend donc de l'abscisse x' . Donc, si l'on veut avoir les équations qui conviennent à la suite des points ainsi déterminés, indépendamment de l'abscisse x' , on n'aura qu'à éliminer x' des trois équations (A), (B) & (C), & les deux équations en x , y & z qu'on obtiendra, seront celles de l'arête de rebroussement demandée.

C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

Si, au lieu de représenter par x' , $\phi x'$ & $\psi x'$ les coordonnées de la proposée, on les exprime par x' , y' & z' , ce qui donne $\phi''' x' = \frac{d^3 y'}{dx'^3} \psi''' x' = \frac{d^3 z'}{dx'^3}$, les trois équations précédentes deviendront

$$[\zeta - z'] d z' + [y - y'] d y' + [x - x'] d x' = 0$$

$$[\zeta - z'] d d z' + [y - y'] d d y' - d s'^2 = 0$$

$$[\zeta - z'] d^3 z' + [y - y'] d^3 y' - 3 d s' d d s' = 0;$$

desquelles on tirera les deux équations de l'arête de rebroussement, en mettant pour y' , z' & leurs différentielles, leurs valeurs prises dans les équations de la proposée, & éliminant ensuite x' .

On peut déduire immédiatement l'équation (C) de l'équation (B), en observant qu'elle est la différentielle de celle-ci prise en regardant x' comme seule variable, & par conséquent la différentielle seconde de (A) prise de la même manière. Donc, pour trouver les équations de l'arête de rebroussement de la surface développable, lieu géométrique des Développées d'une courbe à double courbure, il faut d'abord chercher l'équation du plan normal à la courbe qui sera de cette forme, $Az + By + Cx + D = 0$, A, B, C & D étant pour chaque plan normal des constantes, fonctions connues de l'abscisse déterminée x' qui correspond au point de la courbe par lequel passe le plan normal; différencier ensuite deux fois cette équation en regardant x' comme seule variable, & dx' comme constant, ce qui produira deux nouvelles équations; éliminer enfin de ces deux équations & de celle du plan l'indéterminée x' ; les deux équations en x, y & z qui resteront, seront celles de l'arête de rebroussement demandée.

XXVI.

Si des trois équations (A), (B) & (C) on tire les valeurs des trois variables x, y & z , on trouvera,

$$\begin{aligned} z &= \phi x' + \left\{ \begin{array}{l} \phi''' x' [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] \\ - 3 \phi'' x' [\psi' x' \psi'' x' + \phi' x' \phi'' x'] \end{array} \right\} : (\psi'' x' \phi''' x' - \psi''' x' \phi'' x') \\ y &= \phi x' \left\{ \begin{array}{l} - \psi''' x' [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] \\ + 3 \psi'' x' [\psi' x' \psi'' x' + \phi' x' \phi'' x'] \end{array} \right\} : [\psi'' x' \phi''' x' - \psi''' x' \phi'' x'] \\ z &= x' + \left\{ \begin{array}{l} [\phi' x' \psi''' x' - \phi'' x' \psi' x'] [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] \\ - 3 [\phi' x' \psi'' x' - \phi'' x' \psi' x'] [\psi' x' \psi'' x' + \phi' x' \phi'' x'] \end{array} \right\} : [\psi'' x' \phi''' x' - \psi''' x' \phi'' x'] \end{aligned}$$

ou bien, mettant y' & z' à la place de $\phi x'$ & $\psi x'$, on aura pour valeurs de ces trois variables:

$$\begin{aligned} z &= z' + \frac{d^3 y' d s'^2 - 3 d d y' d s' d d s'}{d d z' d^3 y' - d^3 z' d d y'}, \\ y &= y' + \frac{d^3 z' d s'^2 - 3 d d z' d s' d d s'}{d d z' d^3 y' - d^3 z' d d y'}, \\ z &= x' + \frac{[d y' d^3 z' - d z' d^3 y'] d s'^2 - 3 [d y' d d z' - d z' d d y'] d s' d d s'}{d d z' d^3 y' - d^3 z' d d y'}. \end{aligned}$$

Ces valeurs sont celles des coordonnées du point dans lequel se rencontrent les deux droites consécutives prises sur la surface développable, ou les trois plans consécutifs perpendiculaires à la courbe, & menés par les élémens qui correspondent aux abscisses x' , $x' + dx'$, & $x' + 2 dx'$. Ce point est à égales distances de ces trois élémens; car en tant qu'il se trouve dans l'intersection des deux premiers plans, il est à égales distances des deux premiers élémens, & en tant qu'il se trouve dans l'intersection du second & troisième plan, il est également éloigné des second & troisième élémens; donc les valeurs de x , y & z que nous venons de trouver, sont celles des coordonnées d'un point également éloigné des trois élémens consécutifs de la courbe, pris dans la partie de cette courbe qui correspond à l'abscisse x' ; or ces valeurs seront toujours réelles, tant que la branche de la proposée ne sera pas imaginaire, c'est-à-dire, tant que y' & z' , ou $\phi x'$ & $\psi x'$ seront réelles; donc, dans toute courbe à double courbure, trois élémens consécutifs sont toujours à égales distances d'un certain point, & peuvent par conséquent être regardés comme placés sur la surface d'une même sphère dont ce point est le centre. La suite de tous ces centres forme l'arête de rebroussement de la surface des Développées de cette courbe; donc cette arête est le lieu géométrique des centres de courbure sphérique de la courbe, sans être une de ses Développées, puisqu'aucune de ses tangentes ne rencontre la proposée, & qu'elles sont toutes sur la surface développable.

Il est évident que si l'on vouloit avoir le rayon de courbure sphérique d'une courbe à double courbure, pour le point de cette courbe qui correspond à l'abscisse x' , il n'y auroit qu'à substituer dans l'expression

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - \phi x')^2 + (z - \psi x')^2}$$

pour x , y & z les valeurs que nous venons de trouver.

Nous avons vu (Théorème II.) que la surface développable, lieu géométrique des Développées d'une courbe quelconque,

536 MÉMOIRE SUR LES DEVELOPPÉES,

étant construite, on auroit une de ces Développées en menant par un point de la courbe, & suivant une direction arbitraire, une tangente à cette surface, & en pliant ensuite librement cette tangente sur la surface. Nous avons déjà donné l'équation de la surface développable, il ne reste plus qu'à trouver les équations de la courbe que formeroit sur elle une droite pliée librement.

XXVII.

LEMMES.

Si un angle n est la projection sur un plan d'un angle rectiligne m , dont les côtés fassent avec le plan de projection des angles p & q , on aura toujours

$$\cos. m = \cos. n. \cos. p. \cos. q - \sin. p. \sin. q.$$

XXVIII.

PROBLEME VI.

Trouver la courbe que forme une droite, ou un fil plié librement sur une surface.

FIGURE 6. SOLUTION. Soient AH , AB & AD les trois axes rectangulaires auxquels est rapportée l'équation donnée de la surface, & A l'origine des coordonnées; soient FMS & fms deux sections infiniment proches, faites dans la surface par des plans perpendiculaires à l'axe AH , & dont les droites PF , PS , pf , ps soient les intersections avec les deux plans DAH & HAB ; soit MmL une portion de la courbe demandée, coupée par les deux plans de section en deux points infiniment proches M & m , par lesquels soient abaissées sur le plan HAB les coordonnées perpendiculaires MQ & mq ; soient GT & gt les tangentes des sections aux points M & m ; soit mené l'élément Qq de la projection & la parallèle Mn , de plus qQ' parallèle à AP , $Q'M'$ parallèle à QM , & MN parallèle

parallèle à QQ' ; soient enfin $AP = x$, $PQ = y$, & $Qm = z$.
Cela posé, il est clair que l'on aura

$$Pp = Q'q = dx$$

$$Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{ds^2 + dz^2}$$

$$QQ' = MN = dy$$

$$M'N = \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$$

$$Qq = Mn = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds \text{ \& } M'M = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$mn = dz;$$

or l'angle $Q'Qq$ est la projection de l'angle $M'Mm$, & les angles $M'MN$ & mMn sont ceux que forment les côtés $M'M$ & Mm avec le plan de projection; donc on aura (Lemme)
 $\cos. [M'Mm] = \cos. [Q'Qq] \cdot \cos. [M'MN] \cdot \cos. [mMn]$
 $+ \sin. [M'MN] \cdot \sin. [mMn]$; par conséquent nommant v l'angle $M'Mm$, l'on aura

$$\cos. v = \left(\frac{dy}{ds}\right) \cdot \frac{dy}{dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{ds^2 + dz^2}} + \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right) dy}{dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{ds^2 + dz^2}}.$$

Mais l'angle gmL devant être égal à Mmt , comme nous l'avons démontré (Théorème II), la différentielle de l'angle $M'Mm$ doit être égale à $M'Mm - Mmt$; de plus, ces deux derniers angles ne diffèrent entre eux qu'à cause de la différence d'inclinaison des tangentes GT & gt ; ou, ce qui revient au même, si ces tangentes étoient parallèles, ces angles seroient égaux, & l'on auroit $dv = 0$. Donc l'expression de $\cos. v$ ne varie qu'en vertu de la variation de l'angle $M'MN$; donc la différentielle de cette expression, prise en regardant comme constans les *sinus* & *cosinus* de l'angle $M'MN$, doit être égalée à zéro; ce qui donne, en regardant ds comme constant,

$$[ds^2 + dz^2] ddy = [dy dz - ds^2 \left(\frac{dy}{dz}\right)] ddz,$$

équation qui, si l'on met pour dz & ddz leurs valeurs prises dans l'équation de la surface, donnera en x , y & leurs différentielles l'équation de la courbe Qq de projection. *C. Q. F. T.*

538 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,

Nous avons vu que la courbe Mm étoit la plus courte que l'on pût mener sur la surface courbe entre ses extrémités, & par conséquent la même que celle pour laquelle M. Jean Bernoulli, tome IV de ses Œuvres, donne l'équation suivante :

$$[ds^2 + d\zeta^2] T ddy = [T dy d\zeta - \zeta ds^2] dd\zeta.$$

Il est facile de ramener cette équation à la nôtre, car la lettre T exprime la sous-tangente QT de la section représentée par EMS dans notre *figure*, & l'on a QT & par conséquent $T = \zeta : \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)$; d'où il suit que $\frac{\zeta}{T}$ est $= \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)$, & que notre équation coïncide avec celle que M. Bernoulli a trouvée par une méthode bien différente.

XXIX.

Ainsi, tant que la surface sera quelconque, la détermination de la ligne la plus courte entre ses extrémités que l'on puisse mener sur cette surface, ou de celle que traceroit un fil plié librement, dépend de l'intégration d'une équation aux différences secondes, qui peut être plus ou moins difficile à traiter suivant la nature de la surface, & dans laquelle l'intégration introduira deux constantes arbitraires, par le moyen desquelles on pourra faire que la courbe satisfasse à deux conditions particulières : par exemple, si l'on cherche une Développée d'une courbe, on peut déterminer ces deux constantes de manière que la Développée passe par un point de la surface, & que sa tangente en ce point passe par la développante. Mais, dans la recherche des Développées, la surface n'est pas quelconque; nous avons vu qu'elle étoit toujours développable. Cette particularité, introduite dans l'équation différentielle, la rend intégrable, du moins aux différences finies, indépendamment de la nature particulière de la surface développable. Néanmoins ce n'est pas là la marche que nous suivrons; nous allons partir d'une considération qui est encore plus simple.

XXX.

PROBLEME VII.

Etant données les équations d'une courbe à double courbure quelconque , trouver celles de telle de ses Développées qu'on voudra.

SOLUTION. Toutes les Développées d'une courbe étant sur une même surface développable , l'équation de cette surface est commune à toutes les Développées : or , nous avons donné (art. XXII.) la manière de trouver cette équation , & nous avons vu qu'elle étoit le résultat de l'élimination de la quantité x' des deux équations (A) & (B); il ne reste donc plus qu'à trouver pour chaque Développée une équation particulière qui la distingue de toutes les autres, & qui déterminè sa manière d'exister sur la surface développable. Pour cela , considérons que chaque Développée doit être telle que le prolongement de sa tangente en un point quelconque coupe la développante dans le point dont les coordonnées sont x' , $\phi x'$ & $\psi x'$; ou , ce qui revient au même , que le prolongement de la tangente de sa projection passe par la projection du point de la développante dont les coordonnées sont x' , $\phi x'$ & $\psi x'$. On aura donc , par rapport à la projection sur le plan des z & y , (D) $\frac{dz}{dy} = \frac{z - \psi x'}{y - \phi x'}$.

Si des trois équations

$$(A) [z - \psi x'] \psi' x' + [y - \phi x'] \phi' x' + x - x' = 0 ,$$

$$(B) [z - \psi x'] \psi'' x' + [y - \phi x'] \phi'' x' - [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] = 0 ;$$

$$(D) [z - \psi x'] dy = [y - \phi x'] dz ,$$

on élimine l'indéterminée x' , les deux équations qu'on obtiendra en x , y & z , & dont l'une fera aux différences premières , seront les deux équations demandées. C. Q. F. T.

XXXI.

Au lieu d'employer , comme nous avons fait , la projection sur
Y y y ij

le plan des y & z , on peut se servir de la projection sur l'un quelconque des deux autres plans, & à la place de l'équation (D), on aura, dans le cas du plan des x & y , $[y - \phi x'] dx = [x - x'] dy$, & dans le cas du plan des x & z , $[z - \psi x'] dx = [x - x'] dz$. De ces trois équations différentielles, deux quelconques comportent généralement la troisième; mais si, comme dans le cas dont il s'agit, on suppose que les deux équations (A) & (B) aient lieu en même temps qu'elles, alors de ces trois équations différentielles, une quelconque comporte les deux autres, & il suffit d'employer celle qui présentera moins de difficulté dans l'intégration.

XXXII.

L'intégration de l'équation différentielle introduira dans le calcul une constante arbitraire, qui, par les différentes valeurs dont elle sera susceptible, pourra appartenir à telle Développée qu'on voudra, & dont la détermination dépendra de la condition à laquelle la Développée devra satisfaire. Par exemple, s'il s'agit de déterminer la constante de manière que la Développée passe par un certain point donné sur la surface développable, & dont les coordonnées, dans les sens des x , des y & des z , soient respectivement a , b & c , on substituera, dans les deux équations de la Développée, après l'intégration, à la place des quantités x , y & z , les valeurs correspondantes a , b , c ; on éliminera de ces deux équations celle des trois coordonnées a , b , c qui sera perpendiculaire à la projection dont on aura fait usage, & il faudra que la constante satisfasse à l'équation résultante.

XXXIII.

S C H O L I E.

J'ai donc démontré qu'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, a une infinité de Développées toutes à double courbure, à l'exception d'une seule pour chaque courbe plane, & j'ai donné la manière de trouver les équations de toutes ces Développées, d'après celles de la développante,

ce que je m'étois d'abord proposé dans ce Mémoire ; ainsi il n'y a point de courbe que l'on ne puisse engendrer par le développement d'une infinité d'autres. Mais comme il est difficile ; dans la pratique , après avoir plié un fil sur une Développée , particulièrement si elle est à double courbure , de le développer de manière qu'à chaque instant du mouvement il soit bien exactement confondu avec la tangente de la Développée , lorsqu'on voudra construire par développement une courbe à double courbure $BB'B''B'''...$ on pourra , par un même point **FIGURE 7.** donné B de cette courbe , mener deux fils BO, BP' tangens à la surface développable , les plier ensuite librement sur cette surface , l'un en $OO'O''O'''...$ l'autre en $PP'P''P'''$; ces fils , dans leur développement , se contre-balanceront , & empêcheront que leur point de réunion cesse d'être dans la développante ; ou bien , pour faire usage des formules précédentes , on donnera à l'indéterminée a ou b deux valeurs différentes , ce qui produira deux Développées distinctes $OO'O''O'''...$ & $PP'P''P'''...$ qui jouiront de la même propriété.

XXXIV.

Il suit de là , qu'il seroit facile de faire osciller un pendule dans une courbe à double courbure quelconque , si cela étoit nécessaire , en supposant que cette courbe tourne sa convexité du côté du centre des forces qui agissent sur le pendule.

*Du rayon de courbure , & des différens genres d'inflexions
des courbes à double courbure.*

XXXV.

On appelle *point d'inflexion* , dans une courbe plane , le point où cette ligne , après avoir été concave dans un sens , cesse de l'être pour devenir concave dans l'autre sens. Il est évident que , dans ce point , la courbe perd sa courbure , & que les deux élémens consécutifs sont en ligne droite. Mais une courbe à double courbure peut perdre chacune de ses courbures

542 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,

en particulier, ou les perdre toutes deux dans le même point; c'est-à-dire, qu'il peut arriver ou que trois élémens consécutifs d'une même courbe à double courbure se trouvent dans un même plan, ou que deux de ces élémens soient en ligne droite. Il suit de là, que les courbes à double courbure peuvent avoir deux espèces d'inflexions; la première a lieu lorsque la courbe devient plane, & nous l'appellerons *simple inflexion*: la seconde, que nous appellerons *double inflexion*, a lieu lorsque la courbe devient droite dans un de ses points.

XXXVI.

PROBLÈME VIII.

Trouver la formule qui donne les points de simple inflexion des courbes à double courbure.

SOLUTION. Nous avons vu, art. XVII, que lorsqu'une courbe à double courbure a un point de simple inflexion, ou, ce qui revient au même, que lorsqu'elle devient plane, la partie correspondante de la surface développable, qui est le lieu de ses Développées, devient cylindrique, & que par conséquent les deux arêtes consécutives de cette partie de la surface sont parallèles. Il suit donc de là, que le point de rencontre de ces deux arêtes est infiniment éloigné, ou que les coordonnées de ce point sont infinies. Or nous avons donné, art. XXVI, les valeurs générales de ces coordonnées, qui sont toutes trois rendues infinies en égalant à zéro le dénominateur commun: donc la formule, pour trouver les points de simple inflexion, est:

$$\psi'' x \phi'' x - \phi'' x \psi'' x = 0,$$

$$\text{ou } ddz d^3y - dd^3y d^3z = 0,$$

& la valeur de x , tirée de l'une ou de l'autre de ces deux formules, sera celle de l'abscisse qui convient au point demandé.

C. Q. F. T.

XXXVII.

On auroit pu trouver cette formule par un raisonnement beaucoup plus simple. En effet, puisque, dans le point de

simple inflexion, la courbe à double courbure devient plane, il faut que, dans ce point, les équations de la courbe satisfassent à l'équation générale du plan : or cette équation générale est

$$z = ax + by + c.$$

Si donc on différencie trois fois cette équation à cause des trois constantes, ce qui donne

$$dz = a dx + b dy,$$

$$ddz = b dd y,$$

$$d^3z = b d^3 y,$$

& qu'on élimine a & b de ces trois équations, on trouvera $ddy d^3z - ddz d^3y = 0$, équation de condition, qui doit être satisfaite pour que trois élémens consécutifs d'une courbe à double courbure soient dans un même plan, & qui est la même que celle que nous venons de donner dans le Problème précédent.

XXXVIII.

PROBLÈME IX.

Trouver l'expression du rayon de courbure d'une courbe à double courbure quelconque.

SOLUTION. Dans tout ce qui précède, nous avons bien distingué les rayons de Développées d'une courbe à double courbure de son rayon de courbure. Nous avons vu que dans chaque point une courbe quelconque a une infinité de rayons de Développées, parce qu'elle a une infinité de Développées différentes; mais que dans chaque point elle n'avoit qu'un rayon de courbure, & qu'on trouvoit ce rayon en abaissant une perpendiculaire du point de la courbe sur l'intersection du plan normal avec le plan normal infiniment voisin.

Or nous avons donné, Problème II, l'expression de la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une droite dont on connoît les équations de projections; de plus, nous avons

§ 44 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,
trouvé, Problème IV, pour équations de l'intersection du plan
normal avec celui qui le suit immédiatement,

$$[z - \psi x'] \psi' x' + [y - \phi x'] \phi' x' + x - x' = 0,$$

$$[z - \psi x'] \psi'' x' + [y - \phi x'] \phi'' x' + [1 - (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] = 0,$$

d'où l'on tire les trois équations suivantes, qui sont celles des
trois projections de cette droite,

$$\begin{aligned} & y \phi'' x' + z \psi'' x' - [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2 + \psi x' \psi'' x' + \phi x' \phi'' x'] = 0, \\ & -x \psi'' x' + y [\psi' x' \phi'' x' - \phi' x' \psi'' x'] - \psi x' [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] \Big\} = 0, \\ & + x' \psi'' x' - \phi x' [\psi' x' \phi'' x' - \phi' x' \psi'' x'] \\ & - z [\psi' x' \phi'' x' - \phi' x' \psi'' x'] - x \phi'' x' - \phi' x' [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] \Big\} = 0. \\ & + x' \phi'' x' - \psi x' [\psi' x' \phi'' x' - \phi' x' \psi'' x'] \end{aligned}$$

Si l'on compare actuellement ces trois équations avec celle de
la droite donnée dans le Problème II, on a

$$\begin{aligned} x' &= x' & \alpha &= \phi'' x' \\ y' &= \phi x' & \beta &= -\psi'' x' \\ z' &= \psi x' & \gamma &= -[\psi' x' \phi'' x' - \phi' x' \psi'' x'] \end{aligned}$$

$$\phi = -[1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2 + \psi x' \psi'' x' + \phi x' \phi'' x'],$$

$$\epsilon = -\{\psi' x' [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] - x' \psi'' x' + \phi x' [\psi' x' \phi'' x' - \phi' x' \psi'' x']\};$$

$$\zeta = -\{\phi' x' [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] - x' \phi'' x' - \psi x' [\psi' x' \phi'' x' - \phi' x' \psi'' x']\};$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \lambda &= -[1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] \\ \mu &= -[1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] \psi x' \\ \nu &= -[1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] \phi x' \end{aligned}$$

or nous avons vu que l'expression de la perpendiculaire abaissée
du point sur la droite étoit

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Donc si l'on substitue les valeurs précédentes, on trouvera
pour expression du rayon de courbure d'une courbe à double
courbure quelconque,

$$\frac{[1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(\phi'' x')^2 + (\psi'' x')^2 + [\psi' x' \phi'' x' - \phi' x' \psi'' x']^2}}.$$

C. Q. F. T.
COROLLAIRE

COROLLAIRE.

Si au lieu de représenter par x' , $\phi x'$ & $\psi x'$ les coordonnées de la courbe, on les exprime par x , y & z , la formule précédente, qui donne la valeur du rayon de courbure, deviendra

$$\frac{[dx^2 + dy^2 + dz^2]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{dx^2 ddy^2 + dx^2 d dz^2 + [dz ddy - dy d dz]^2}}$$

XXXIX.

Nous avons aussi donné, Problème II, les expressions des coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite; si l'on substitue encore, dans ces formules, les valeurs ci-dessus, on trouvera, pour coordonnées du centre de courbure d'une courbe quelconque dans le sens des x :

$$x - [1 + (\phi'x)^2 + (\psi'x)^2] \frac{\phi'x\phi''x + \psi'x\psi''x}{(\phi''x)^2 + (\psi''x)^2 + [\psi'x\phi''x - \phi'x\psi''x]^2};$$

dans le sens des y :

$$\phi x + [1 + (\phi'x)^2 + (\psi'x)^2] \frac{\phi''x - \psi'x[\psi'x\phi''x - \phi'x\psi''x]}{(\phi''x)^2 + (\psi''x)^2 + [\psi'x\phi''x - \phi'x\psi''x]^2};$$

& dans le sens des z :

$$\psi x + [1 + (\phi'x)^2 + (\psi'x)^2] \frac{\psi''x - \phi'x[\psi'x\phi''x - \phi'x\psi''x]}{(\phi''x)^2 + (\psi''x)^2 + [\psi'x\phi''x - \phi'x\psi''x]^2}.$$

De manière qu'à l'aide de toutes ces formules, on peut non seulement connoître la courbure d'un point quelconque d'une courbe à double courbure, mais encore assigner le sens de sa courbure, puisqu'on peut connoître, dans l'espace, la position de son centre de courbure.

XL.

PROBLÈME X.

Trouver la formule qui donne les points de double inflexion des courbes à double courbure.

SOLUTION. Il suit de la définition que nous avons donnée, art. XXXV, de la double inflexion, que toutes les fois qu'elle

346 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES,

aura lieu, le rayon de courbure sera = 0 ou = ∞ ; donc la formule, pour trouver ces sortes de points, est :

$(\phi''x)^2 + (\psi''x)^2 +]\psi'x\phi''x - \phi'x\psi''x]^2 = 0$ ou = ∞ ,
ou bien

$$dx^2 ddy^2 + dx^2 ddz^2 +]d\zeta ddy - dy dd\zeta]^2 = 0 \text{ ou } = \infty.$$

C. Q. F. T.

Il est inutile de remarquer que la même formule donne aussi les points de rebroussement.

Je finirai par exposer quelques propriétés des surfaces développables, analogues à l'objet de ce Mémoire.

XLI.

THÉORÈME IV.

Toute surface développable peut être engendrée par le développement d'une autre surface développable, qu'on doit par conséquent regarder comme sa Développée, & ces deux surfaces se coupent toujours dans l'arête de rebroussement de la surface développante.

DÉMONSTRATION. Que l'on conçoive, par toutes les arêtes rectilignes d'une surface développable quelconque, des plans perpendiculaires chacun à l'élément correspondant de la surface, tous ces plans se rencontreront consécutivement deux à deux dans une ligne droite, & la suite de ces droites formera évidemment une seconde surface développable, puisque cette surface ne sera que la limite du système des plans perpendiculaires à la première. De plus, l'intersection de deux plans consécutifs quelconques passera nécessairement par le point d'intersection des deux arêtes rectilignes de la première surface par lesquelles sont menés les deux plans, puisque ce point est en même temps sur l'un & sur l'autre plan, & la droite d'intersection formera, avec ces deux arêtes rectilignes, des angles égaux ; donc, 1°. la seconde surface développable passera par

l'arête de rebroussement de la première. Je dis actuellement que la seconde surface sera la Développée de la première. Que l'on conçoive en effet un plan tangent à la seconde surface développable, ce plan, d'après notre construction, sera nécessairement perpendiculaire à la première, la coupera dans une de ses arêtes rectilignes, & cette arête rencontrera la droite de contact du plan avec la seconde surface dans un des points de l'arête de rebroussement de la première. Que ce plan tourne ensuite autour de sa droite de contact jusqu'à ce qu'il soit tangent à l'élément suivant de la seconde surface, & qu'il entraîne avec lui, dans son mouvement, sa droite d'intersection avec la première surface, il est évident que cette droite, pendant le mouvement, ne sortira pas de la surface, puisque l'angle que fait cette intersection avec la droite de contact (considérée pour un instant comme axe de rotation) ne changera pas : donc si l'on conçoit que le plan fasse tout le tour de la seconde surface sans cesser de lui être tangent, sans glisser en aucune manière sur elle, & entraîne avec lui la droite suivant laquelle il coupoit la première surface dans sa première position, de manière que cette droite soit fixe dans le plan, cette droite engendrera, dans son mouvement, la première surface. Donc la seconde surface développable est la Développée de la première. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

XLII.

COROLLAIRES.

I. Il suit de là, qu'une surface développable quelconque peut aussi être regardée comme composée d'une infinité d'éléments de surfaces coniques, consécutivement tangentes les unes aux autres, dont les sommets sont consécutivement placés sur son arête de rebroussement, & dont les axes sont les arêtes rectilignes de sa Développée.

II. Donc une surface développable peut non seulement être regardée comme la limite d'une infinité de plans dont les positions différentes sont liées entre elles par une loi, mais

348 MÉMOIRE SUR LES DÉVELOPPÉES;

encore comme celle d'une infinité de surfaces coniques dont les natures & les positions sont généralement telles que leurs sommets sont sur l'arête de rebroussement de la surface, & leurs axes sur une autre surface développable.

III. Toute surface conique à base quelconque a aussi une surface conique pour Développée; car, par le théorème, toutes les arêtes rectilignes de la Développée doivent passer par l'arête de rebroussement de la développante: or, dans le cas de la surface conique à base quelconque, l'arête de rebroussement se réduit à un point unique, qui est le sommet; donc, dans ce cas, toutes les arêtes rectilignes de la Développée doivent passer par le sommet de la développante, qui sera aussi le sommet de la Développée. Le réciproque n'a pas lieu.

IV. Une surface développable ne peut avoir qu'une Développée, & peut être la Développée d'une infinité du second ordre d'autres surfaces développables; car elle peut être la Développée d'autant de surfaces développables différentes, qu'on peut mener de droites différentes dans son plan tangent, & on peut y en mener une infinité du second ordre.

V. Que l'on conçoive une surface développable engendrée par le développement d'une autre, chaque point de la droite décrivante engendrera, par son mouvement, une courbe qui sera par-tout perpendiculaire à la droite, & qui sera dans la surface développante. Toutes ces courbes auront une seule Développée commune, qui sera l'arête de rebroussement de la surface développante; toutes les autres Développées de toutes ces courbes seront sur la même surface développée. Donc une surface développable, considérée comme développée d'une seule surface développante, est le lieu géométrique de toutes les Développées d'une infinité de courbes; or, elle peut être la Développée d'une infinité du second ordre de surfaces développables différentes: donc une surface développable quelconque est le lieu géométrique des Développées d'une infinité du troisième ordre de courbes à double courbure différentes.

XLIII.

Si toutes ces considérations étoient aussi importantes que curieuses, je donnerois les équations de la surface développée d'une surface développable quelconque, considérée comme développante; mais je me contenterai d'indiquer le procédé pour la trouver.

Si l'on cherche l'équation du plan mené par une des arêtes rectilignes d'une surface développable, proposée & perpendiculaire à cette surface, on la trouvera nécessairement de cette forme :

$$A z + B y + C x + D = 0 ;$$

dans laquelle les coefficients A , B , C & D sont des fonctions d'un certain paramètre x' constant pour chaque plan perpendiculaire, mais variable d'un plan à l'autre. Que l'on différencie cette équation en regardant x' comme seule variable; qu'on élimine ensuite x' de l'équation du plan, à l'aide de l'équation différentielle, l'équation résultante en x , y & z sera celle de la surface développée de la développante proposée.

XLIV.

THÉORÈME V.

Lorsqu'une surface développable est telle que sa Développée est une surface cylindrique à base quelconque, une portion quelconque de son aire est dans un rapport constant avec sa projection sur le plan de la base du cylindre, de manière que toutes les fois que cette projection sera carrable, la portion correspondante de l'aire de la surface le sera aussi.

DÉMONSTRATION. Nous avons vu (Théorème précédent) que deux arêtes rectilignes consécutives d'une surface développable font toujours le même angle avec l'arête rectiligne correspondante de sa Développée : donc, lorsque cette Développée est cylindrique, que par conséquent toutes ses

arêtes sont parallèles, l'angle que forme l'arête de la développante avec l'arête de la Développée est constant ; donc l'angle que forme cette arête avec le plan de la base du cylindre est aussi constant ; donc un élément quelconque de l'aire de la développante est à sa projection sur le plan, dans le rapport constant du rayon au *cosinus* de ce dernier angle ; donc une somme quelconque de ces élémens est à sa projection dans le même rapport : donc , &c. C. Q. F. D.

XLV.

COROLLAIRE.

La Développée d'une surface conique droite à base circulaire est une surface cylindrique , car cette Développée se réduit à l'axe du cône ; donc les surfaces coniques droites sont dans le cas du Théorème précédent ; donc *une portion quelconque de la surface d'un cône droit est à sa projection sur le plan de la base du cône , dans le rapport du rayon au cosinus de l'angle que fait le côté du cône avec le plan de la base.* Proposition que M. l'Abbé Bossut a démontrée le premier dans sa Géométrie , & qui n'est qu'un cas particulier du Théorème précédent.



Fig. 1.

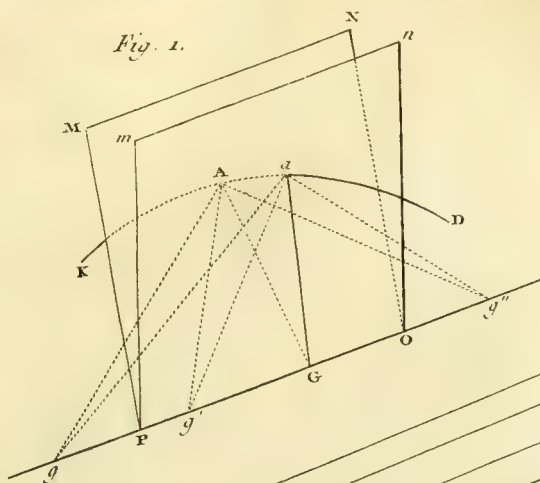


Fig. 2.

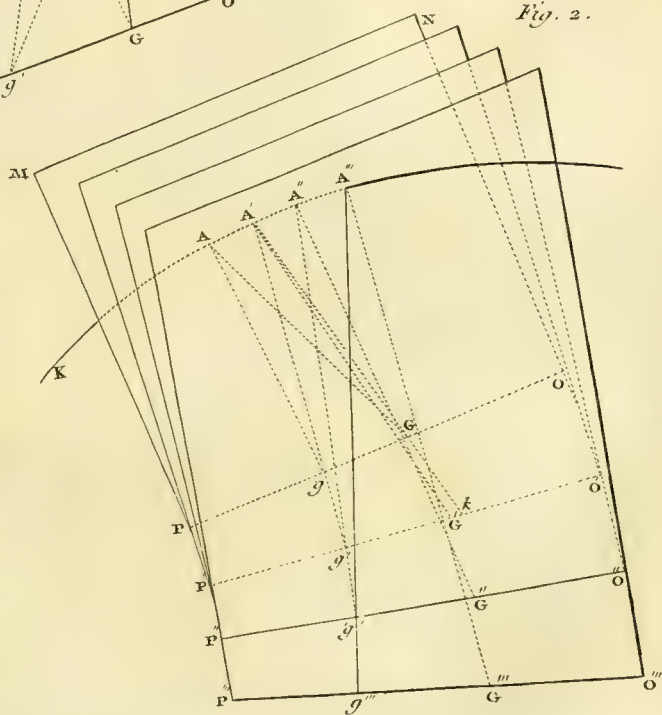


Fig. 3.

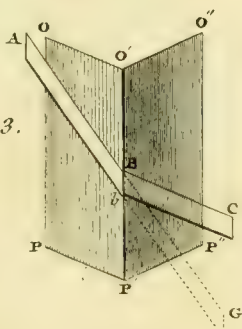


Fig. 4.

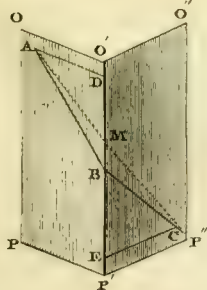
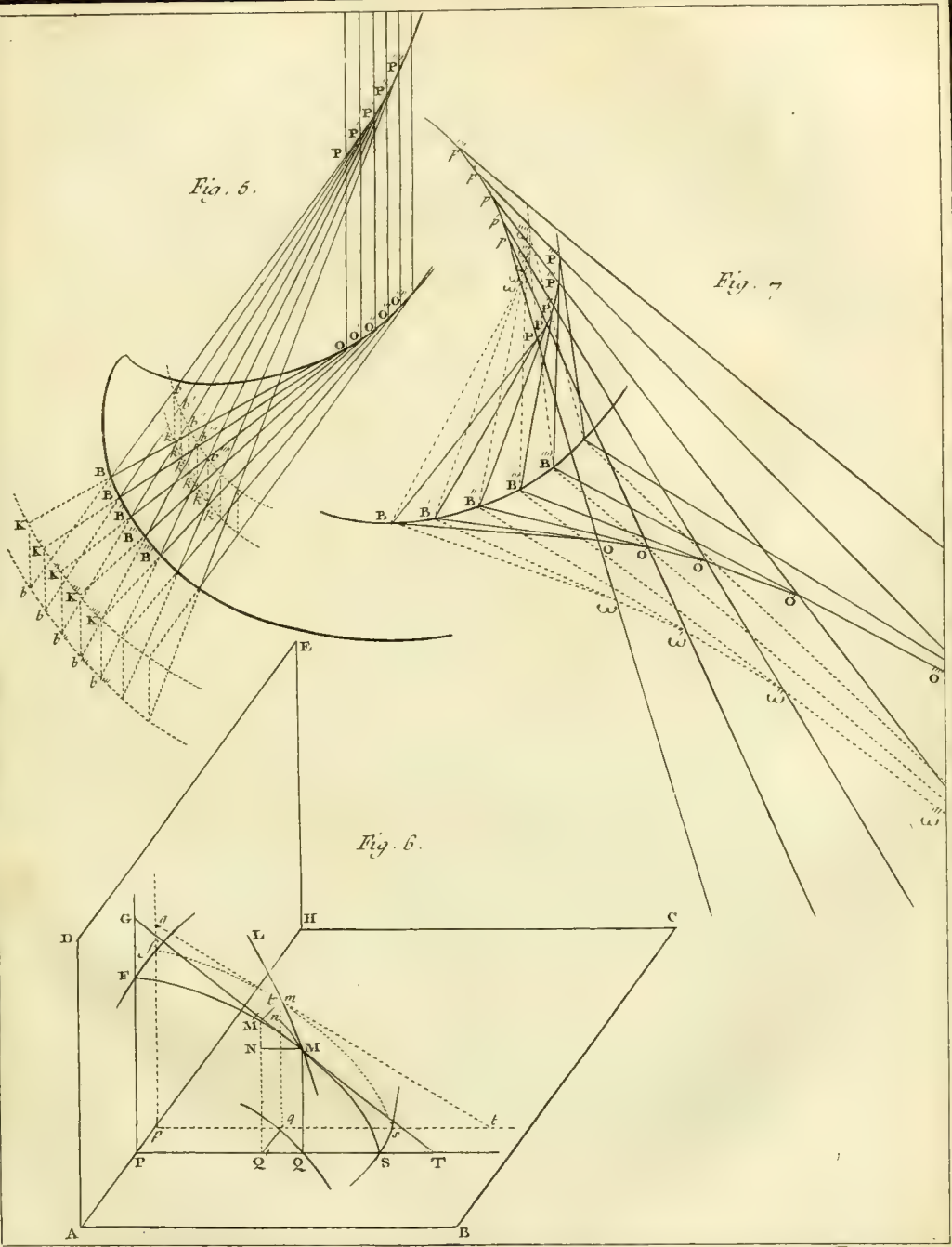




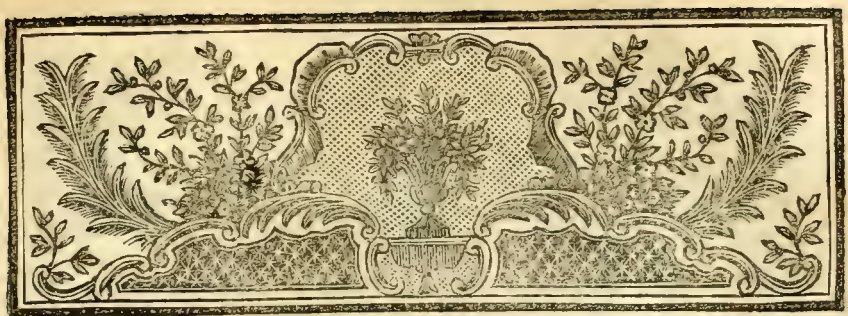
Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 6.







M É M O I R E

S U R

LA FORMATION D U S O U F R E

PAR LA VOIE HUMIDE.

PAR M. LE VEILLARD. 1778.

IL n'y a point en Chimie d'expérience plus connue que le fameux procédé de Stahl pour faire du foie de Soufre avec du charbon en poudre, & du sel contenant l'acide vitriolique, qu'on met en fusion à l'aide d'un alkali fixe. L'acide, dit cet homme célèbre, s'unit au phlogistique du charbon, & il en résulte le Soufre minéral, lequel uni à la substance alkaliné, base du sel vitriolique, ou ajoutée pour aider à sa fusion, forme du foie de Soufre, dont on le tire par le moyen d'un acide quelconque.

Glaubert, qui faisoit avant Stahl usage de ce procédé, se servoit de son sel, qu'il appeloit admirable; mais il ne prétendoit pas faire du Soufre, il croyoit seulement l'extraire des matériaux qu'il employoit.

Boile fait digérer ensemble de l'huile de térébenthine & de l'huile de vitriol ; il distille ensuite , & lorsque le mélange a pris une certaine consistance , il obtient des fleurs de Soufre.

D'autres prétendent encore qu'à la fin de la distillation de l'éther vitriolique , le résidu, traité avec précaution, donne aussi le même produit.

Stahl , & la plupart des Chimistes après lui , ont conclu de ces procédés , que le Soufre minéral n'étoit autre chose que l'acide vitriolique uni au phlogistique ou principe inflammable ; ils ont pensé que , quoique l'acide vitriolique pût se combiner avec ce principe , au moyen d'une substance quelconque qui le contient , puisque toutes donnent avec lui de l'acide sulfureux , ce produit particulier différoit du Soufre dans lequel les deux substances sont différemment & plus intimement unies ; & qu'il étoit nécessaire , pour l'obtenir , que l'une & l'autre fussent dans un état de siccité parfaite ; de sorte que le Soufre , formé par les mélanges liquides , ne se produisoit que lorsqu'on les avoit parfaitement desséchées , & que l'acide vitriolique joint aux huiles , ne donnoit que des bitumes ou substances analogues , à moins que , dans le procédé , ces huiles ne fussent réduites à l'état charbonneux : j'espère que ce Mémoire détruira quelques-unes de ces assertions.

Les eaux sulfureuses que la nature donne en assez grande abondance , charient du Soufre en quantité , sont accompagnées d'une forte odeur de foie de Soufre , & teignent , comme lui , les solutions métalliques ; mais si l'addition d'un acide augmente leur odeur , aucune cependant ne donne du lait de Soufre , ou , ce qui est la même chose , on n'obtient point de Soufre par la précipitation : on a même été long-temps sans pouvoir y démontrer cette substance ; M. Monnet , qui nous a donné l'analyse de plusieurs eaux de cette espèce , ne l'y a point trouvé , même dans celles d'Aix-la-Chapelle qui le charient , & dans les regards desquelles il se sublime en grande quantité ; il donne même à cette occasion une théorie fort ingénieuse de sa formation.

M.

M. Maquer, le P. Cotte de l'Oratoire, & moi, dans l'examen que nous avons fait séparément de la fontaine d'Anguien, nous n'en avons point trouvé dans cette eau très-sulfureuse, & dans le canal de laquelle on le recueille abondamment; cependant, depuis que cette fontaine est nettoyée, qu'on a pris la source de plus haut, l'eau puisée limpide, & qui se trouble quelque temps après, comme elle le faisoit auparavant, se charge d'une pellicule jaunâtre presque toute formée par du Soufre, & qui brûle comme lui; le dépôt qui se précipite ne paroît pas en contenir d'une manière sensible. MM. les Commissaires de la Faculté de Médecine, chargés de l'examen de cette fontaine, sont les premiers à qui cette expérience ait réussi. J'ai depuis obtenu ce produit; M. d'Eyeux a eu le même succès; & M. Roux, dont les Savans regretteront long-temps la perte, a trouvé le moyen, à l'aide du beurre d'arsenic, d'avoir pour précipité de véritable orpiment; mais personne, que je sache, n'a pu produire avec elle un lait de Soufre par le moyen d'un acide.

Tous les Chimistes qui se sont occupés de cette matière, ont cherché par quels moyens la Nature nous donnoit des eaux sulfureuses, à l'égard desquelles il faut remarquer que la plupart sont chaudes à un très-haut degré; mais que quelques-unes cependant, comme celles d'Anguien, sont froides; presque tous ces Savans ont attribué à des feux souterrains, des volcans, des décompositions de pyrites, des embrasemens de mines de charbon, la formation du foie de Soufre, sa combinaison avec l'eau, & la chaleur de cette dernière substance. A l'égard des eaux sulfureuses froides, on a pensé qu'éloignées du laboratoire où la Nature les avoit faites, & forcées de parcourir un long espace avant de paroître au jour, elles avoient eu le temps de se refroidir, & de prendre la température des lieux souterrains qui les avoient contenues en dernier lieu. Quelques-uns ont aussi soupçonné que ces eaux ayant été obligées de séjourner long-temps dans des cavités considérables, remplies de matières animales ou végétales, ou de ces deux espèces à la fois, macérées & putréfiées par un long espace de temps, le foie de

Soufre s'y étoit formé de lui-même, comme nous le voyons fréquemment dans les égoûts voisins des lieux habités. M. d'Yveux, dans son Analyse de l'Eau d'Anguien, dit qu'il est probable que son foie de Soufre provient du dépôt de matières animales & végétales putréfiées, formé par les eaux de l'étang de Montmorency : on verra tout à l'heure, que le sentiment de ces Chimistes n'est nullement dépourvu d'apparence.

Les uns & les autres ont aussi pensé que le foie de Soufre de ces eaux étoit si bien fait, que, quoiqu'il contint trop peu de Soufre pour en être précipité sensiblement par un acide, il donnoit pourtant une forte odeur de foie de Soufre, & qu'il en avoit toutes les autres propriétés.

Il est certain que nous rencontrons fréquemment dans les matières putréfiées une odeur très-distincte de foie de Soufre; les cloaques, sur-tout ceux qui reçoivent les eaux des blanchisseuses, les latrines, les ruisseaux même des rues, ne nous présentent que trop souvent des exhalaisons. M. Sage donne un procédé pour faire, à l'aide d'une eau de rivière ou séléniteuse, un véritable foie de Soufre; avec une dissolution de mercure par l'esprit de nitre, il en obtient un éthiops minéral qui donne du cinnabre par la sublimation; & je crois que la couleur noire des substances qu'on trouve immédiatement sous le pavé des rues, est due aux particules ferrugineuses détachées des roues & des fers des chevaux, & colorées par le foie de Soufre que produisent toujours les immondices des villes.

MM. Maquer & l'Abbé Nollet ont observé, dans les Mémoires de l'Académie, année 1724, que des assiettes d'argent, tirées des latrines du Château de Compiègne, s'étoient minéralisées par le Soufre au point de pouvoir l'y démontrer.

Pour moi, je vais plus loin, Messieurs; je crois que le Soufre & le foie de Soufre se forment même dans le corps des animaux, sur-tout dans l'homme. J'en juge par l'odeur très-distincte de foie de Soufre des vapeurs qui s'en exhalent, & par la teinture noire que donne constamment aux excréments l'usage des eaux martiales, même lorsque ceux qui les boient ne prennent que

des substances animales, & des végétaux qui ne peuvent donner le suc astringent qui, comme on le fait, précipite le fer de ces eaux.

Il étoit naturel de penser que des eaux pourvues de presque toutes les propriétés du foie de Soufre, contenoient aussi du Soufre; & que, quoique personne ne l'en eût encore retiré en substance, il y existoit pourtant, & qu'apparemment la petite quantité qu'elles en contenoient s'opposoit seule à ce qu'on pût l'y appercevoir d'une manière palpable.

Il y a eu environ deux ans cette automne, qu'étant dans une maison du village de Boulogne, près Saint-Cloud, on m'avertit de prendre garde, si j'allois me promener, de tomber dans un égoût fort puant qui traversoit le jardin; il étoit ordinairement couvert de gazon, mais les madriers qui le soutenoient s'étant pourris, il s'étoit fait un enfoncement, & l'eau étoit à découvert: le hasard me conduisit près de cet endroit, & l'odeur décidée de foie de Soufre me dirigea pour trouver la partie découverte; il y en avoit à peu près une toise de long sur quatre pieds de large. Je fus très-étonné d'y voir furnager des pellicules assez épaisses, & semblables à celles que charie la fontaine d'Anguien; j'allai chercher une écumoire, & j'en ramassai une quantité considérable. J'emportai une bouteille de l'eau de l'égoût, & l'ayant essayée, elle ne donna point de lait de Soufre, mais les acides développèrent son odeur; elle précipita en un beau jaune le beurre d'arsenic, teignit en noir les solutions métalliques, & donna enfin tous les indices de foie de Soufre qu'on obtient des eaux sulfureuses; cet égoût servoit à des Blanchisseuses.

Je fis sécher les pellicules que j'avois recueillies; mises sur une pelle rouge, elles brûlèrent avec une flamme bleue, & produisirent de l'acide sulfureux volatil; enfin la sublimation me donna de véritable Soufre.

D'après cette observation, il me parut démontré que le Soufre se formoit par la voie humide, & que les matériaux dont

il est composé, se trouvant dans l'eau, le savon & les substances employées par les blanchisseuses, les huiles, graisses, & autres ordures enlevées des linges qu'elles nettoyoient, ils se combinoient au bout de quelque temps, & formoient le foie de Soufre, & le Soufre que j'avois retiré en nature.

Il est bon d'observer que la conduite dont je parle est couverte dans la longueur de plus de soixante toises, depuis son entrée dans le jardin jusqu'à sa sortie; & que, quoiqu'il soit d'une assez grande capacité, & qu'il m'ait paru très-plein dans sa partie découverte, il en sort très-peu dans la rigole extérieure destinée à conduire cette eau jusqu'à un cloaque situé entre le village & la Seine, peut-être parce que les terres absorbent une partie de l'humide.

J'ai depuis visité un assez grand nombre de cloaques, au Point du Jour, à Issy, au Gros-caillou; tous m'ont donné de forts indices de foie de Soufre, mais aucun, excepté celui du Monceau, de précipité, résidu ou pellicule inflammable. Ce dernier, qui reçoit toutes les immondices du hameau du Monceau, porte à sa surface une espèce de crème d'un vert jaunâtre: j'en ai ramassé le plus qu'il m'a été possible; desséchée, elle a brûlé sur la pelle, mais presque sans flamme; & son odeur, dans laquelle on démêloit celle de l'acide sulfureux, étoit encore composée d'une autre très-fétide: elle a donné, par la sublimation, du véritable Soufre brûlant avec flamme, & donnant l'acide sulfureux, mais en très-petite quantité, beaucoup moins que les pellicules épaisses de la conduite souterraine de Boulogne; l'eau filtrée & conservée dans un flacon bouché, a donné pendant long-temps toutes les marques de foie de Soufre; le flacon débouché, elle s'est bientôt troublée; soumise à l'évaporation, elle a donné un résidu brunâtre, d'une odeur fétide, qui donne une flamme comme celle du Soufre, & l'odeur d'acide sulfureux qui se mêle avec la première.

M. Darcet, chargé par la Société de Médecine d'examiner cette eau, avoit fait une partie de ces expériences avec beaucoup d'autres; & c'est lui qui, sachant que je m'occupois depuis long-temps de ce travail, m'a fait connoître le cloaque du Monceau.

Pourquoi la conduite souterraine de Boulogne fournit-elle un beaucoup plus grande quantité de Soufre, & sur-tout pourquoi trouve-t-on si communément du foie de Soufre dans les cloaques, les latrines & les égoûts, & si rarement du Soufre d'une manière sensible? Pour quelle raison enfin d'excellens Chimistes n'en trouvent-ils pas un atôme dans beaucoup de fontaines sulfureuses, qui cependant le charient en abondance?

Les terres calcaires & les alkalis se chargent avec la plus grande facilité du principe inflammable. Plusieurs Savans prétendent, non sans fondement, que la terre calcaire est susceptible de se changer en alkali fixe en s'unissant avec lui. M. Baumé donne un procédé pour se procurer artificiellement ce sel, en combinant, par la calcination, la chaux avec le phlogistique du charbon : la plupart même de ces Savans croient que c'est de la quantité de ce principe que dépend la fixité ou la volatilité des alkalis. En calcinant l'alkali fixe avec le sang de bœuf desséché pour obtenir la liqueur propre à faire le bleu de Prusse, il se dégage presque toujours des vapeurs très-sensibles d'alkali volatil à cause de la matière animale; mais, ce qu'on ignore peut-être, cette même lessive, long-temps gardée, se change souvent en entier en alkali volatil. Enfin M. Darcy fait disparaître avec la chaux l'odeur des eaux putréfiées; & M. Sage, avec un alkali fixe.

D'après cette propriété des substances alkalines, ne peut-on pas présumer que, dans le foie de Soufre, ce minéral est dans une espèce de décomposition; que son phlogistique combiné avec les alkalis, tient moins à son acide, & peut s'évaporer seul? On fait qu'en y versant un acide, son odeur s'exhale aussi-tôt, & ne tarde pas à se dissiper en entier. D'après cette opinion, que je crois raisonnable, je pense qu'il faut distinguer deux espèces de foie de Soufre, celui qu'on obtient par des moyens très-actifs, comme l'ébullition ou la calcination, & celui qui s'est formé par une opération longue & paisible, à l'aide d'une chaleur ordinaire. Il me paroît que le premier contient un excès de Soufre qu'on peut précipiter avec un acide, & que sa subs-

tance alkaline s'empare du principe inflammable de ce Soufre surabondant, à mesure qu'elle perd le sien par l'évaporation. Ce sentiment paroîtra presque certain, si l'on se rappelle qu'en chauffant avec précaution du foie de Soufre artificiel, on le change en entier en tartre vitriolé ; l'autre foie de Soufre au contraire ne contient que le moins de Soufre possible, ce qui le rend incapable de donner un précipité par les acides.

D'un autre côté, l'odeur du foie de Soufre n'est ni celle du Soufre, ni celle de l'acide sulfureux, les terres calcaires & les alkalis fixes ne peuvent la donner ; elle paroît donc provenir de la substance inflammable elle-même qui s'échappe continuellement, & dont la perte doit entraîner celle du Soufre ; il n'est donc pas étonnant qu'on en obtienne si difficilement des eaux exposées à l'air libre. Et si l'on se rappelle que la fontaine d'Anguien, puisée plus bas que l'endroit où elle sort aujourd'hui, charioit du Soufre, mais n'en donnoit pas ; & que presque tous les égoûts découverts ne donnent que du foie de Soufre, tandis que la fontaine d'Anguien, prise aujourd'hui plus haut, apparemment à l'endroit où elle commence à recevoir le contact de l'atmosphère, en donne sensiblement ; & que la conduite souterraine de l'égoût de Boulogne en fournit abondamment (a), sans qu'on en trouve dans le cloaque où elle se rend : on soupçonnera que l'évaporation de ces eaux, dans lesquelles le foie de Soufre se forme incessamment, étant gênée, ou même réduite à rien dans les entrailles de la terre, ce foie de Soufre peut se décomposer, sans que son Soufre ou les matériaux qui le forment s'évaporent ; qu'il vient alors nager en pellicule à la surface, & que les fontaines minérales ne charient que celui qui s'est ainsi rassemblé sous terre ; au lieu qu'à l'air, elles le perdent par leurs exhalaisons, à mesure que le foie de Soufre se décompose : les expériences, subséquentes vont, je crois, donner à ce sentiment un nouveau degré de probabilité.

Vous avez sans doute déjà soupçonné, Messieurs, qu'ayant

(a) Depuis qu'on a couvert les égoûts de Paris, leur mauvaise odeur est centuplée ; je ne doute point qu'on n'y trouvât du Soufre en nature.

pris ces soins pour examiner le procédé de la Nature, j'ai dû chercher à l'imiter; effectivement, dès le commencement de l'été de 1776, j'ai fait au moins cinquante mélanges différens des matières que j'ai crues les plus capables, par leur décomposition & recomposition, de former du Soufre, & j'ai aussi varié leur exposition; j'en ai mis à l'ombre, au soleil, dans l'intérieur, & même à la cave.

Comme le nombre des possibles à cet égard est prodigieux, on sent bien que je n'ai pas prétendu le remplir, & je ne rendrai même pas compte des mélanges qui n'ont rien produit, si ce n'est de quelques-uns dont on pourroit présumer que j'aurois obtenu du succès, & qu'on croiroit peut-être que j'aurois oubliés, si je ne les rapportois pas.

Je n'entrerais dans aucun détail sur le procédé de M. Sage pour obtenir du foie de Soufre par le moyen de l'eau de Seino ou d'une eau séléniteuse; cette dernière ne réussit que par l'addition d'une matière qui contienne du phlogistique: la suite va faire voir, comme il le dit, que les eaux qui contiennent des sels avec l'acide vitriolique, sont, plus qu'aucun autre, propres à former du Soufre.

Cinq pintes d'eau de pluie & douze onces de sang de bœuf, dans un vase en plein air négligemment fermé, ont, au bout de six semaines, donné une odeur très-fétide, dans laquelle on distinguoit celle de foie de Soufre. On remarquoit sur sa surface quelques grandes taches larges & blanchâtres; la liqueur a légèrement teint en brun la dissolution d'argent par l'esprit de nitre; & précipité en jaune éclatant le beurre d'arsenic; elle n'a donné pour lors & par la suite aucun autre indice sulfureux.

Cinq pintes d'eau très-séléniteuse avec douze onces de sang de bœuf, dans les mêmes circonstances, ont produit la même chose d'une manière un peu plus marquée.

Deux pintes & demie d'eau de rivière, trois onces de savon blanc, demi-livre de terre végétale n'ont donné, dans les mêmes circonstances, que de très-foibles marques de foie de Soufre.

Deux pintes de l'eau séléniteuse, trois onces de savon noir,

demi-livre de terre végétale , placées de même à l'air libre & négligemment couvertes , ont produit la même chose.

Le même mélange avec du savon blanc , au lieu du noir , a fourni des indices de foie de Soufre un peu plus marqués.

Tous les autres mélanges pour lesquels j'avois employé des eaux de pluie , de rivière , & séléniteuses , des alkalis , des sels vitrioliques , des substances , & des grailles végétales & animales , &c. suivant les proportions & avec les circonstances que je croyois devoir le mieux réussir , n'ont produit aucun indice de foie de Soufre.

Comme l'hiver approchoit , & que je courois risque que la gelée ne me cassât une partie des vases dans lesquels étoient mes mélanges , je les fis tous porter à la cave , ne désespérant pas encore d'obtenir par leur moyen quelques produits satisfaisans ; je les ai tous fait remettre à leur place le printemps dernier. L'été ne m'a rien donné de nouveau ; mais vers la mi-Octobre quelques-uns ont commencé à sentir le foie de Soufre , & le premier Novembre je trouvai des apparences marquées de Soufre à la surface de plusieurs ; j'attendis encore jusqu'au 8 ; alors :

Un mélange de trois pintes d'eau de rivière , une once six gros d'alkali minéral , trois gros de sel de Glauber , & une once d'huile de navette , me fournirent une liqueur sentant fortement le foie de Soufre , teignant en noir les eaux martiales & les solutions métalliques , précipitant en jaune doré le beurre d'arsenic , & verdissant le sirop de violette. L'addition d'un acide n'a point occasionné de lait de Soufre ; mais la liqueur filtrée s'est légèrement troublée : il s'est formé sur la surface de petites pellicules jaunâtres en trop petite quantité pour être soumises à la sublimation , mais qui cependant , séchées avec attention , brûloient sur la pelle rouge comme du Soufre , & donnoient une odeur très-marquée d'acide sulfureux.

Deux mélanges , un de trois pintes d'eau de rivière , une once six gros d'alkali de soude , une once de sain-doux , le second , de trois pintes d'eau de pluie , deux onces deux gros d'alkali

d'alcali de soude, une once de fain-doux, & trois gros de sel de Glauber, m'ont donné les mêmes produits que le précédent.

Des feuilles & branches de tilleul, macérées dans plusieurs sceaux d'eau de pluie avec trois onces de sel de Glauber, ont donné l'odeur très-marquée de foie de Soufre, sans aucun autre indice; mais les mêmes matières végétales, macérées dans l'eau très-séléniteuse, m'ont donné du foie de Soufre aussi formé que celui des procédés que j'ai rapportés, & qui m'ont le mieux réussi, & même une plus grande apparence de Soufre à la surface.

Je n'ai point fait jeter tous ces mélanges, & le succès que j'ai obtenu de celui dont je vais rendre compte, me fait espérer qu'ils pourront me procurer du Soufre d'une manière encore plus décidée.

Trois pintes d'eau de pluie, cinq gros de sel de Glauber, quatre onces de savon noir, exposés, comme les précédens mélanges à l'air libre au commencement de l'été de 1776, & négligemment couverts, examinés le 10 Novembre dernier, m'ont donné tous les indices de foie de Soufre, excepté le lait de Soufre; la surface de la liqueur étoit en entier couverte d'une pellicule jaunâtre très-mince. Comme la terrine qui contenoit ce mélange n'étoit pas exactement couverte, je la vidai dans une autre plus petite, & je renversai dessus une beaucoup plus grande qui la fermoit assez bien; trois jours après, je retrouvai ma pellicule beaucoup plus épaisse, de sorte que je pus en recueillir une quantité, qui, desséchée, pesa seize grains: elle brûla comme le Soufre, & j'obtins d'une partie six grains par la sublimation.

Moitié de la liqueur évaporée laissa cristalliser du sel de Glauber, mais en proportion beaucoup moindre que ce qu'elle devoit contenir, s'il n'eût pas en partie souffert de décomposition; & le dernier résidu d'une saveur très-alkaline, teignant en vert le sirop de violette, fit une forte effervescence par l'addition de l'acide vitriolique.

Cette dernière expérience, Messieurs, me paroît décisive. Je

n'examine point, pour le moment, à quelle substance le Soufre est uni dans les différentes productions d'hépar dont j'ai parlé ; il me suffit d'avoir prouvé, par toutes les observations rapportées dans ce Mémoire, que le Soufre peut se former par la voie humide & froide, c'est-à-dire, avec la seule température de l'atmosphère, ou celle de l'intérieur de la terre, abstraction faite d'aucune chaleur produite par des circonstances particulières, comme volcans, pyrites enflammées, &c.

Je ne prétends assurément point comparer mon travail à celui de Stahl qui, si quelqu'un a fait du Soufre avant qu'il y pensât, a du moins eu le premier le dessein d'en faire, & si qu'il en faisoit ; mais je crois pouvoir regarder mes expériences comme le complément de la sienne : cependant, en confirmant sa théorie, vous voyez qu'elles relèvent quelques erreurs dans lesquelles on tomboit en expliquant les détails de son procédé. Beaucoup de Chimistes croyoient qu'il étoit nécessaire que l'acide vitriolique & la matière du feu fussent absolument exempts d'humidité pour s'unir & former du Soufre, & que la combinaison de cet acide avec les substances huileuses ne produisoit, à moins qu'elles ne fussent réduites en charbon, que des bitumes. Il me paroît que j'ai démontré le contraire, & donné des moyens beaucoup plus simples que ceux qu'on imaginoit, d'expliquer l'origine de plusieurs fontaines sulfureuses, de quelques amas de Soutre, & même celle d'un grand nombre de minéralisation, ce qui sera l'objet d'un autre Mémoire.

Enfin, dans une opération pour laquelle on emploie un feu très-vif, & qui produit en peu d'instans ce qu'on cherche, on ne connoît presque que le résultat : l'observateur le plus habile peut-il saisir, au milieu d'un creuset en incandescence, & dans lequel les matières sont en fusion, les différentes altérations qu'elles éprouvent, & la succession de ces changemens ? Il semble que les expériences que je viens de rapporter, moins brillantes que celles où l'on brûle beaucoup plus de charbon, mais pour lesquelles il faut une plus grande dose de patience, n'employant pas un effort de l'art si considérable & si court, donnent des moyens plus faciles de suivre la chaîne des effets.



M É M O I R E

S U R

LES ALBATROS.

P A R M. F O R S T E R.

LES premiers Navigateurs, depuis Amerigo Vespucci, ont vraisemblablement donné le nom d'*Albatros* ou d'*Alcatros* (a) à cette espèce d'oiseaux, car nous ne trouvons pas que les Anciens en aient eu la moindre connoissance. Cependant le Chevalier de *Linne* (b) appelle l'*Albatros* en latin, du nom d'un oiseau connu aux Anciens sous l'appellation de *Diomedea* (c). Si l'on considère tout ce qu'ils ont dit sur ce dernier oiseau, il paroît évidemment que c'étoit un oiseau aquatique, dont

(a) Dampier. Voy. vol. 2 (de l'édit. Angloise), l'appelle l'*Alcatrofs*. Voyez le second Journal de Halley, pag. 29, 38, 40, où ces oiseaux sont appelés *Alcatrofs* & *Alcatrofs*.

(b) *Diomedea exulans*. Linn. Syft. Nat. ed. XII, pag. 214.

(c) Aristot. de Mirabilis. Anscult. — Ovid. Metamorph. XIV, 507. — Plin. Hist. Natur. l. X, c. 44. Solin. Polyhist. c. 8. — August. de Civit. Dei, lib. XVIII, c. 16 & 18.

le plumage étoit blanc, le bec dentelé, & les yeux couleur de feu. Le Roi Juba, cité par Pline, nous enseigne que la *Diomedea* étoit le même que le *Catarractes*, qui fendoit avec force sur sa proie dans la mer, ce que les Grecs exprimoient par *Καταρρακτωύς*; & par conséquent on reconnoît très-aisément sous ces caractères le *Fou de Bassan*. Il s'ensuivroit que le nom de *Diomedea* est très-mal appliqué à l'*Albatros*; mais le rejeter, après qu'il est déjà approprié à cet oiseau, & généralement reçu, & en introduire un nouveau, ce seroit une pure altération. Pour éviter donc l'air de singularité, nous adopterons en latin le nom de *Diomedea*, comme étant consacré par l'usage des plus célèbres Ornithologistes, & nous retiendrons celui d'*Albatros* pour le françois.

Tous les Ornithologistes & Voyageurs que nous connoissons, ne parlent que d'une seule espèce d'*Albatros* (a); nous avons vu celle qui étoit connue auparavant, & en même temps nous en avons découvert deux nouvelles espèces.

Tous les oiseaux de cette classe, que nous avons vus, se trouvoient au delà de la ligne équinoxiale. Environ au degré 26 ou 27 de latitude méridionale, nous avons rencontré les premiers *Albatros* dans la mer du Sud & dans l'Océan Atlantique, & nous n'en avons vu aucun au nord de ces parages. Nous en avons observé plusieurs jusqu'au delà du cercle polaire antarctique; ce qui prouve assez, à ce que je m'imagine, que ce genre d'oiseaux est particulier à l'hémisphère austral. M. Pallas, Savant distingué & célèbre dans l'Histoire Naturelle, nous apprend qu'il y a des *Albatros* dans la mer Septentrionale qui sépare l'Amérique du Kamtcharka; mais j'ai quel-

(a) L'*Albatros*, Edward's Hist. des Oiseaux, t. 2, pl. 88. — *Plantus Albatrus*, Klein Geschichte der Vogel, p. — L'*Albatros*, Brisson Ornithologie, tom. VI, p. 126. — Osbeck. Voyage to China (édit. Angloise), tom. I, p. 109. — *Diomedea Albatrus*, Pallas Spiril. Zool. Fasc. V, p. 28. — L'*Albatros* du cap de Bonne-Espérance, planches enluminées, pl. 237. — *Albatros*, Pennant's genera of Birds, in-8°. Edinburg, 1773, p. 55.

que soupçon que ce n'est peut-être qu'une grande espèce de *Procellaire*, appelée communément par les Espagnols *Queranta-huessos*, ou même, si c'est une véritable espèce d'*Albatros*, qu'elle est différente des trois espèces dont nous donnerons l'histoire dans ce Mémoire.

La forme singulière du bec, des narines, du palais & de la langue; la figure des pieds, la longueur des ailes & l'os du *sternum* extrêmement court, constituent les principaux caractères de cette famille d'oiseaux aquatiques palmipèdes.

Le corps de l'*Albatros* est de la grandeur d'une oie; mais celui de l'espèce commune l'excède pour l'ordinaire. Il nage bien, mais cependant il aime plutôt à planer dans l'air à la surface de la mer, qu'à s'y reposer, ce qu'il ne fait que très-rarement. J'ai quelquefois suivi de mes yeux un de ces oiseaux pendant plusieurs heures, sans le voir se rabattre sur l'eau. Mais dès qu'un Goiland brun (*Larus catarractes*, Linn.) découvre un *Albatros*, il s'attache d'abord à lui, il tâche toujours de gagner le dessous, & d'attaquer son ventre à coups de bec; probablement ayant trouvé que c'est l'endroit le moins couvert, le *sternum* étant plus court dans ce genre que dans tous les autres oiseaux. L'*Albatros*, quoique plus grand, & pourvu d'un bec extrêmement fort, dont il donne de grands coups, se sent inférieur à ce combat; & après une très-courte chasse, il échappe à son ennemi, en se mettant à la nage en pleine mer, où le Goiland n'ose plus l'attaquer.

L'*Albatros* traverse des distances immenses sans prendre relâche à terre. Nous parcourûmes pendant notre voyage l'Océan, qui sépare l'Amérique méridionale de la Nouvelle Zéelande, quatre fois dans différentes latitudes; nous trouvâmes la distance de cette dernière terre jusqu'à la terre de Feu, de quinze cents lieues, sans découvrir la moindre petite île dans toute la zone tempérée australe: espace qui fourmille par-tout d'*Albatros*. Il leur faut donc faire du moins un trajet de sept cent cinquante lieues, pour arriver à une de ces terres; mais

leurs longues & fortes ailes leur donnent la facilité de faire ces longs voyages. En comparant leur vol à la marche de notre vaisseau quand nous avons un vent frais en poupe, j'ai lieu de croire qu'ils parcourent du moins douze ou quinze lieues par heure; d'où on peut conclure que le trajet de l'Océan pacifique ne leur coûteroit que cinq ou six jours en été, y compris le temps nécessaire pour se reposer & pour prendre de la nourriture; car, dans les hautes latitudes, il n'y a point de nuit pendant cette saison. Cependant, quoique leur vol soit si rapide, on ne les voit presque jamais battre des ailes, mais ils planent continuellement, se servant d'un mouvement uni, fort & rapide; & ils ont pour cet effet des ailes d'une longueur prodigieuse, car nous en trouvâmes plusieurs qui avoient au delà de dix pieds d'envergure.

La voracité de ces oiseaux est très grande, à en juger par les viandes trouvées dans leur estomac: car dès qu'ils furent blessés, ils dégorgerent une bonne quantité de ce qu'ils avoient récemment avalé, & cependant nous trouvâmes encore des poissons entiers, des restes de crabes, différens mollusques, des os considérables d'oiseaux, & une bonne provision des becs ou des os de la *Sepia Loligo* de Linné. La Nature les a donc pourvus de longues & fortes ailes, pour qu'ils pussent chercher leur nourriture dans de grands espaces, & parcourir presque un Océan entier pour assouvir leur faim. Cela est d'autant plus nécessaire, que les animaux submarins, afin de se mettre à l'abri d'un orage, se tiennent à une distance considérable sous l'eau pendant un gros vent (a): par conséquent il devient plus difficile de suppléer aux besoins des *Albatros*. Nous fûmes convaincus de la vérité de cette observation, en voyant avec quelle avidité ces oiseaux fondoient sur toutes les immondices

(a) Marfigli, dans son *Histoire physique de la Mer*, observe qu'à quinze brasses la mer n'est plus agitée, quand même il feroit un gros temps. Mais *Boyle*, de *Fundo Maris*, sect. III, veut qu'à quatre brasses, sous la surface de la mer, l'agitation, causée par un gros vent ne soit plus sensible.

jetées des vaisseaux dans la mer ; & un jour , après un gros temps , nous en attrapâmes neuf à un hameçon , y ayant attaché un morceau de peau de mouton au lieu d'appât. Et comme toute la subsistance de cet oiseau vient de la mer , dont les animaux ont la surface du corps très-glissante , l'*Albatros* a le bec extrêmement fort , & d'une configuration particulière , mais en même temps très-propre pour bien saisir les différens objets qui lui servent de nourriture. La pointe en est crochue ; elle lui sert de défense contre ses ennemis , & en même temps pour dépecer les grands objets qui se présentent pour sa subsistance. L'intérieur des mâchoires est pourvu presque dans toute sa longueur , & de chaque côté , d'un corps osseux tranchant , correspondant à une cannelure de la mâchoire opposée : au palais & aux côtés de la mâchoire inférieure , il y a d'autres élévations musculuses , mais couvertes d'une membrane épaisse , garnie de dentelures , ou de rangs de verrues , dont les pointes sont dirigées en arrière. La langue , qui est charnue , de deux tiers plus courte que le bec , & d'une figure à peu près conique , est aussi pourvue de chaque côté d'un rang de ces dentelures. On comprend aisément que ce tout ensemble sert à faciliter la capture , & la saisie de sujets submarins qui servent de nourriture à l'*Albatros* , & à empêcher qu'aucun n'en échappe.

Les narines sont faites en forme de tuyaux coniques à base ronde & ouverte ; elles sont logées dans une cannelure latérale près de la base du bec , & elles sont , par cette situation , gardées contre des accidens imprévus , qui , d'ailleurs , doivent être multipliés dans les oiseaux de proie.

Les pieds sont dénués de plumes jusqu'au delà du genou ; & par-tout couverts d'une membrane grenelée. L'*Albatros* n'a que trois doigts , qui sont joints par une membrane : le doigt extérieur a cinq phalanges ou articulations , celui du milieu en a seulement quatre , & l'intérieur n'en a que trois ; mais il est garni , dans toute sa longueur , d'une membrane latérale comme le doigt extérieur. C'est probablement pour aider l'*Albatros*.

à mieux nager, que les pieds sont grands, & qu'ils présentent une grande surface à l'eau, par l'addition de cette membrane, qui lui est aussi nécessaire pour l'aider à s'élever des eaux en l'air; car il commence toujours le vol par une course à la surface de la mer, dont il bat les eaux avec les pieds pour prendre l'essor. Lorsque l'*Albatros* se trouve à terre, sur une surface unie, il ne sauroit s'envoler; ce que nous avons observé, en ayant plusieurs sur le tillac de notre vaisseau, lesquels même ne voulurent pas essayer de s'élever en l'air. Mais lorsqu'ils se trouvent sur une hauteur, au bord d'un précipice, ils s'élancent facilement, & s'enfuient à l'aide de leurs grandes ailes, qui alors ont libre espace à se déployer.

Toutes les espèces d'*Albatros* connues n'ont que douze pennues à la queue. Nous n'avons jamais eu occasion de voir leurs nids, leurs œufs ou leurs petits; mais il est très-probable qu'ils se retirent à des îles désertes au temps de leur ponte. Dans un ilot, auprès d'une île d'environ quatre-vingts lieues de circuit, que nous trouvâmes au sud de l'Océan atlantique, au degré 54 de latitude australe, & que nous appelâmes la *Georgie méridionale*, nous observâmes du vaisseau, au milieu de Janvier 1775, un grand nombre d'*Albatros* assis parmi les touffes d'un gramin, & je ne doute point qu'ils ne fussent là sur leurs nids.

Leur voix est rauque, tremblante, & semblable au cri d'un âne. Lorsque nous en eûmes attrapé plusieurs, que nous laissâmes aller sur le tillac, ils commencèrent d'abord à se battre à coups de bec, & ils en lâchèrent quelques-uns aux pieds de nos Matelots.

Comme ils sont obligés de parcourir la mer d'un bout à l'autre, pour y chercher leur subsistance, nous les trouvâmes extrêmement curieux; car à peine avions-nous mis une chaloupe en mer, pour voir s'il y avoit des courans, ou pour essayer par le thermomètre quelle en étoit la température à une
certaine

certaine profondeur, ou même pour nous procurer des provisions fraîches dont nous étions quelquefois privés pendant quatre mois, que les *Albatros* venoient d'abord reconnoître ce que c'étoit; mais ils payoient de leur vie cette curiosité: ce qui nous donna la satisfaction de faire des observations sur toute la famille de ces oiseaux marins, dont nous fîmes quelquefois très-ample provision; & en même temps, leur ayant tiré la peau avec les plumes, nous en fîmes des fricassées & des ragoûts que nous trouvâmes toujours préférables à nos provisions salées.

Nous trouvâmes sur les *Albatros* deux différentes espèces de poux. L'une étoit longue, étroite, noire, avec quatre longs pieds, & deux qui étoient extrêmement courts; l'un des sexes avoit des cornes, & l'autre des antennes à soie, avec des articulations globuleuses. La seconde espèce étoit moindre, noirâtre, d'une figure plus arrondie, & la tête en étoit ronde, & tronquée par-derrrière.

Il y a trois différentes espèces d'*Albatros*. La commune est la plus grande; elle se trouve en grand nombre dans les mers au sud & à l'ouest du cap de Bonne-Espérance. La seconde est plus petite, & son bec, qui est noir, est marqué en dessus d'une ligne dorée; les marges de la bouche sont aussi dorées: elle se trouve dans les mêmes parages avec la commune. La troisième espèce, qui est de la même grandeur que la seconde, est remarquable par ses paupières blanches, & nous l'observâmes vers le cinquantième degré de latitude australe, en allant au sud du cap de Bonne-Espérance.

1. L'*Albatros commun* (*Diomedea Albatrus.*) est de la grandeur d'un cygne. Lorsqu'il est en repos, sa figure est plus lourde que celle des autres oiseaux aquatiques. Le plumage en général est blanc; mais les plumes de la tête, du col, du dos, de la poitrine, avec les couvertures supérieures de l'aile; & les scapulaires, ont trois ou quatre lignes transversales,

376 . MÉMOIRE SUR LES ALBATROS.

ondoyantes & noires. Les pennes de l'aile sont toutes noires ; mais les tiges en sont d'un brun jaunâtre : au milieu du dos il y a quelques scapulaires noires , & les autres vers les ailes sont blanches , avec des taches roussâtres , & des bandes transversales noires. La queue est courte & droite, ou un peu arrondie , & de la même couleur que le reste du corps. Le ventre est blanc , & n'a que par-ci par-là des bandes ondoyantes noires. L'oiseau dont il s'agit , a dix pieds trois pouces d'envergure , & quatre pieds trois pouces de longueur , depuis le bout du bec jusqu'à l'extrémité des pieds.

Le bec , qui a sept pouces de longueur , est d'une couleur de chair pâle , avec une légère teinte de bleuâtre. Les pieds sont à-peu-près de la même couleur , mais encore plus pâle. Les ongles sont blanchâtres , minces , & émoussés par le bout. L'œil est médiocre , perçant , & tout à fait noir.

Sous les plumes , le corps de ces oiseaux est revêtu d'un duvet délicat & blanc , dont les habitans de la Nouvelle Zélande font une parure estimée , en tirant la peau de l'*Albatros* , & en ôtant toutes les plumes. Ils mettent des morceaux de cette peau garnie du duvet blanc , aux grands trous qu'ils ont aux oreilles , & ils les présentent aux nouveaux-venus , en signe d'amitié.

Cette espèce d'*Albatros* a les mœurs & les habitudes que nous avons détaillées dans la section ci-dessus , où nous parlions des *Albatros* en général (a) ; nous les trouvâmes au delà du vingt sixième degré de latitude australe , dans toutes les mers du

(a) Séduit probablement par une fausse nomenclature d'*Albin* , le Chevalier de Linné (Syst. Nat. ed. t. XIII , p. 214.) place les *Albatros* entre les tropiques , dans la Zone torride où il n'y en a aucuns ; il dit aussi qu'ils font d'un vol très-haut , ce que nous n'avons jamais observé , car ils aiment à planer sur la mer à une distance médiocre au dessus de sa surface ; il ajoute , qu'il subsiste des hirondelles de mer , & d'autres poissons volans qui ne se trouvent que dans la Zone torride. C'est la fregate (*Pelecanus Aquilus*) qu'on reconnoît facilement à ces caractères , & non pas l'*Albatros*.

Sud, l'Océan atlantique, celui des Indes, & le Pacifique. Cependant ils sont moins fréquens à mesure que nous approchons du cercle polaire antarctique.

2. L'*Albatros à bec doré* (*Diomedea chrysostris*) est de la grandeur d'une oie, & sa figure est à peu près la même que celle de l'*Albatros commun* : il a six pieds & huit pouces d'envergure, & deux pieds neuf pouces de longueur, depuis le bout du bec à l'extrémité des pieds.

Il est blanc; il a la tête cendrée, & au dessus des yeux un peu noirâtre. Le dos, les ailes, & la queue qui est arrondie, sont noirs. Les plumes sont d'un noir un peu brunâtre. Les tiges des *primaires* sont jaunâtres; celles des *secondaires* sont blanches. Les yeux sont d'une couleur de noisette, & dans l'angle postérieur, on voit, sous la paupière de chaque œil, une tache blanche. Le bec est noir, mais il est marqué en haut d'une bande jaune longitudinale, qui ne s'étend pas jusqu'au bout, & les marges des mâchoires sont aussi dorées. Les pieds sont d'une couleur de cendre bleuâtre.

Au reste, cette espèce est en tout conforme en mœurs & habitudes aux autres *Albatros*, & se trouve dans les mêmes parages que la commune : cependant nous observâmes qu'il n'y en avoit que très-peu dans le voisinage du cercle polaire antarctique & dans l'Océan pacifique.

3. L'*Albatros à paupières blanches* (*Diomedea palpebrata*) est de la grandeur d'une oie. Sa figure est plus lestée que celle des deux autres *Albatros*. Il a six pieds & sept pouces d'envergure, & deux pieds sept pouces de longueur du bout du bec jusqu'à l'extrémité des pieds.

Son plumage est cendré, mais tirant sur le brun; la tête est de couleur de suie, comme les plumes des ailes & de la queue, dont celles du milieu sont les plus longues, & dont les tiges sont blanches. Les couvertures des ailes sont d'une couleur brune noirâtre.

Le bec est long de quatre pouces & noir : les pieds sont d'une couleur de cendie foncée , & les yeux d'un jaune pâle , & la paupière d'en-haut , avec la moitié de celle d'en-bas , est blanche.

Cette espèce se trouve depuis le degré quarante-septième de latitude australe jusqu'au soixante-onzième & dix minutes, où, avant nous, aucun vaisseau n'avoit jamais pénétré.



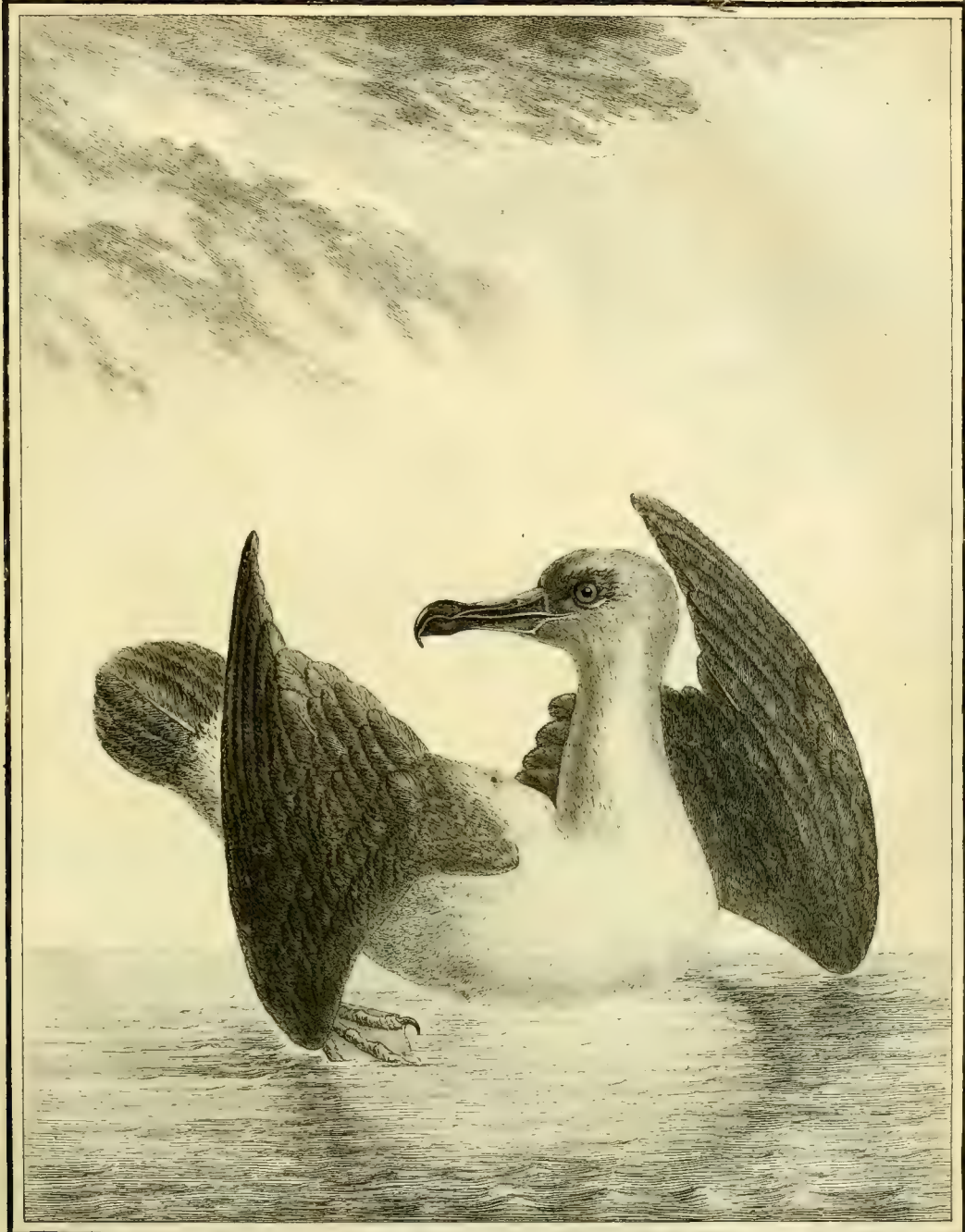


George Kremer del.

L'Albatros commun.

C^{te} Blanchard Sculp





George Foster del.

L'Albatros à bec doré

El. Haussard sculp.

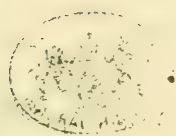


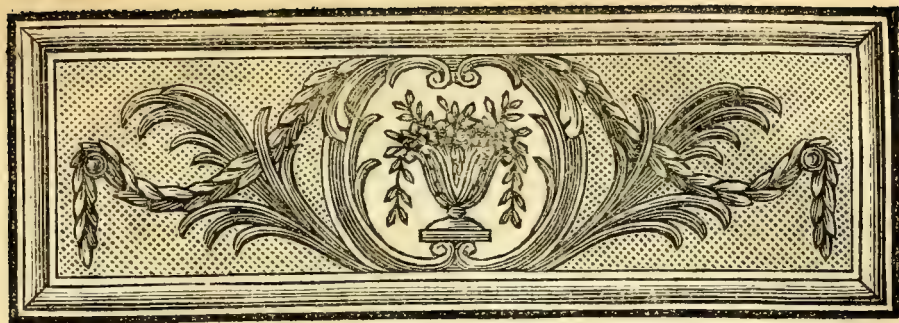


George Ender del.

L'Albatros à paupière Blanches.

Edw. Hassard Sculp.





RECHERCHES
SUR
LES INTÉGRALES
DES ÉQUATIONS
AUX DIFFÉRENCES FINIES,
ET
SUR D'AUTRES SUJETS.

PAR M. CHARLES.

LE calcul des différences finies est actuellement l'objet des recherches des plus grands Géomètres; ils ont déjà intégré des équations assez générales appartenantes à ce calcul, & découvert plusieurs théorèmes importans, qui en ont beaucoup reculé les bornes. M. le Marquis de Condorcet, sur-tout, a singulièrement perfectionné cette branche importante de l'analyse; entre autres choses, il a le premier remarqué que la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les Intégrales des équations aux différences partielles, se réduisoient généralement à l'intégration d'équations aux différences finies. Cette remarque, qui est une des plus brillantes décou-

vertes analytiques de notre siècle, peut figurer dignement à côté de celle même du calcul des différences partielles qui y a donné lieu. Cependant, malgré tous les efforts faits jusqu'ici par ces hommes de mérite, le calcul des différences finies est encore hérissé de difficultés, dont la solution coutera bien des veilles aux Géomètres.

Je suis présentement trop éloigné de ces Messieurs, pour prendre rang parmi eux; mais je peux marcher en avant, & arracher quelques ronces qui, sans les arrêter dans leurs courses, pourroient néanmoins leur donner des distractions, toujours préjudiciables au progrès des connoissances.

J'entre donc en matière. Je pourrois exposer à l'Académie synthétiquement, & d'une manière rapide, les théorèmes & les remarques qui forment le résultat de ces Recherches. Cette marche conviendrait mieux sans doute à mes Juges, accoutumés à tout entendre à demi-mot, qu'une analyse ennuyeuse qu'ils peuvent toujours suppléer; mais elle plairait moins peut-être au plus grand nombre de mes Lecteurs. Ainsi j'expliquerai tout uniment la marche analytique que j'ai suivie; par ce moyen, les résultats se présenteront naturellement, & je ne supprimerai que les pas inutiles.

DÉFINITIONS. Soit le produit de k facteurs, tels que $x(x-1) \dots (x-k+1)$, je représenterai ce produit par $[x]^k$, comme M. Vandermonde; je représenterai encore fraction $\frac{1}{1, 2, \dots, k}$ par $[0]^{-k}$;

je supposerai $\begin{matrix} \mu x \\ \mu y \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x + \mu \Delta x + [\mu]^1 [0]^{1-\Delta^2} x + \&c. \\ y + \mu \Delta x + [\mu]^1 [0]^{1-\Delta^2} y + \&c. \end{matrix} \right.$

PROBLÈME. Soit l'équation ${}^m y = d[x, y, {}^1 y, \dots, {}^{m-1} y]$, & $x + \Delta x = \lambda[x]$, on propose de la construire.

SOLUTION. Menez les lignes AV & AT (*fig. 7.*) perpendiculaires entre elles, qui feront les axes des coordonnées y & x , & la ligne AZ qui divise l'angle droit en deux parties

égales. Construisez sur l'axe AT la courbe D, DS , telle que, pour une abscisse x , l'ordonnée correspondante soit $\lambda[x]$; prenez sur AT un point quelconque A , par lequel vous mènerez l'ordonnée A, D à la courbe AS ; par le point D , menez la parallèle à AT jusqu'à ce qu'elle rencontre AZ en K . Par K , menez la perpendiculaire K, D sur K, D jusqu'à la courbe DS ; par le moyen de ce point D , vous déterminerez un point K , comme le point K l'a été par le point D ; & procédant toujours de la même manière, vous arriverez au point K qui est ici K , (la figure n'étant faite que pour le troisième degré). Par ce point, abaissez la perpendiculaire K, A sur AT , & sur la portion A, A , décrivez la génératrice quelconque B, B , pourvu cependant que l'équation se vérifie au dernier point B . Ensuite ayant pris un point P sur AT , axe des x , vous déterminerez les points $H, H \dots H$ (ici le dernier point est H) par le moyen du point P , comme les points K ont été déterminés par le moyen du point A , & vous mènerez la perpendiculaire H, P . Or comme les ordonnées P, M, P, M & P, M sont données par la génératrice, & y par la proposée, on portera cette valeur de y sur la perpendiculaire P, H de P en M , & le point M fera à la courbe cherchée. Le point P fournit aussi un point M à la gauche de la génératrice. Pour le déterminer, il faut d'abord mettre la proposée sous cette forme ${}^{m-1}y = \delta [{}^{-1}x, {}^{-1}y, y \dots {}^{m-2}y]$, d'où on tirera ${}^{-1}y$. Par le point H , on mènera H, D à la courbe DS , & par ce point D la perpendiculaire D, P , sur laquelle on prendra $P, M = y$, & le point M appartiendra à la courbe qui précède la génératrice. On détermineroit de même tant d'autres points qu'on voudroit de la courbe cherchée.

Cette construction indique une méthode d'intégration. Il faut mettre la proposée sous la forme ${}^{m+\mu}y = \delta [{}^{\mu}x, {}^{\mu}y, {}^{\mu+1}y \dots {}^{m+\mu-1}y]$, & intégrer, en

regardant μ comme la variable principale, & faisant $\Delta \mu = 1$; ensuite prendre pour constantes, des fonctions arbitraires de x , qu'on pourra déterminer par le moyen de la génératrice.

Exemple. Soit ${}^2y = 2 m^1y + n y$, on écrira
 $\mu+2y = 2 m^{\mu+1}y + n^{\mu}y$, & intégrant, on trouvera
 $\mu y = (m + \sqrt{m^2 + n})^{\mu} \psi[x] + (m - \sqrt{m^2 + n})^{\mu} \psi^1[x]$,
 les lettres ψ désignent des fonctions arbitraires.

Soit $y = \theta[x]$ l'équation de la génératrice, on aura
 $\psi[x] + \psi^1[x] = \theta[x]$, &
 $(m + \sqrt{m^2 + n}) \psi[x] + (m - \sqrt{m^2 + n}) \psi^1[x] = \theta[{}^1x]$;
 d'où on tirera les fonctions ψ & ψ^1 . Maintenant, puisque
 ${}^2x = \lambda[x]$ on a $\mu x = \lambda^{\mu}[x]$, l'exposant μ indique combien
 de fois on doit répéter le signe λ ; on tire de là $x = \lambda^{-\mu}[{}^{\mu}x]$;
 ici l'exposant $-\mu$ indique combien de fois on doit renverser
 la fonction. Substituant & désignant les coordonnées quel-
 conques par $x y$, on aura
 $y = (m + \sqrt{m^2 + n})^{\mu} \psi[\lambda^{-\mu}[x]] + (m - \sqrt{m^2 + n})^{\mu} \psi^1[\lambda^{-\mu}[x]]$
 pour l'intégrale complète de la proposée.

Il résulte de la construction, qu'on doit faire $\mu = 0$ quand
 $x =$ une valeur donnée g , & $\mu = k$ quand x est entre $\lambda^k[g]$
 & $\lambda^{k+1}[g]$, y compris $\lambda^k[g]$.

Comme la valeur de $\lambda^{-\mu}[x]$ est toujours entre g & $\lambda[g]$,
 y compris g , il suit de là que les fonctions ψ & ψ^1 doivent
 être données depuis l'abscisse g jusqu'à l'abscisse $\lambda[g]$. S'il
 arrive que ces fonctions soient discontinues, les courbes qui
 les représentent doivent être tracées. Les différentes formes
 de la fonction λ donnent lieu à différens cas, entre lesquels
 il y en a deux importans qu'il est utile de développer.

PREMIER CAS. La courbe DS est toute au dessus de la
 ligne AZ, & ne peut pas être coupée en plus d'un point par
 des

des parallèles à l'axe (*fig. 7.*). Il est évident que la génératrice $B.M.B$ étant une fois donnée, la courbe intégrale sera absolument déterminée. Dans ce cas, les fonctions ψ & ψ^1 qui entrent dans l'équation intégrale ou les courbes qui les représentent, si elles sont discontinues, sont constantes, parce qu'alors il n'y a point de valeur de x , pour laquelle on ne puisse trouver le nombre correspondant μ . Par conséquent, si l'équation intégrale devoit appartenir à un polygone, on ne pourroit pas donner un nombre d'angles de ce polygone plus grand que l'exposant de l'équation.

SECOND CAS. La courbe DS coupe AZ en plusieurs points (*fig. 8*), & ne peut pas être coupée en plus d'un point par des parallèles à l'axe. Si des intersections, B, C , &c. on mène des perpendiculaires qui rencontrent l'axe des x aux points E, F , &c., & si, sur un des intervalles compris entre deux intersections consécutives, par exemple, EF , on construit une génératrice, comme dans la figure septième, il est clair que cette génératrice ne pourra donner aucun point de la courbe intégrale hors de l'espace EF , parce que tous les points D, D, D , &c. qu'on pourra former, seront tous entre E & F , fussent-ils en nombre infini. La courbe intégrale ne sera donc déterminée que sur l'étendue EF : ainsi il faudra se donner autant de génératrices qu'il y aura d'intervalles. De plus, s'il y a des portions infinies à droite & à gauche, il faudra aussi, pour chacune de ces portions, une génératrice; de sorte que, si k est le nombre de ces intersections, $k + 1$ sera le nombre des génératrices toutes indépendantes l'une de l'autre. Dans ce cas, les fonctions ψ & ψ^1 qui entrent dans l'équation intégrale, ou les courbes qui les représentent, si elles sont discontinues, ne sont pas constantes nécessairement, parce que la quantité g à laquelle correspond $\mu = 0$, étant une fois choisie, il y aura des valeurs de x pour lesquelles le nombre correspondant μ n'existera pas. Alors on doit résoudre l'équation $x = \lambda [x]$. Soient p, q, r les valeurs de x qui en résultent, rangées suivant leur ordre de grandeur, on fera

578 RECHERCHES SUR LES INTÉGRALES

$\mu = 0$ quand $x = p$, & cette supposition servira depuis l'abscisse p jusqu'à l'abscisse q ; comme la supposition de $\mu = 0$ pour l'abscisse g seroit pour toute la courbe dans le premier cas; les fonctions ψ & ψ' seront constantes dans cet intervalle. On supposera ensuite $\mu = 0$ quand $x = q$, & cette supposition servira de q à r ; on pourra prendre alors d'autres fonctions ψ & ψ' , qui seront aussi constantes de q à r , & ainsi de suite. La raison de cela, c'est que, pour qu'une équation A , entre x & y , soit l'intégrale d'une équation B , il suffit que l'équation B se vérifie entre une certaine fonction de plusieurs y consécutifs, & de x donnés par l'équation A . Or, dans l'hypothèse présente, si on prend un de ces y entre p & q , par exemple, tous les autres antécédens & suivans seront aussi entre p & q , en situation (doit-on entendre) & non en quantité. Par conséquent, si l'équation intégrale appartenoit à un polygone, on pourroit se donner $(K + 1)n$ angles de ce polygone, K étant le nombre des intersections, & n le degré de l'équation. Mais on n'en doit pas donner plus de n dans chaque intervalle.

REMARQUE. Si la fonction $\lambda(x)$ contenoit un paramètre, dont le changement, la diminution, par exemple, rapprochât continuellement la courbe de la ligne AZ , & enfin la fit tomber totalement sur cette ligne, dans le cas de ce paramètre $= 0$, on conçoit qu'alors la ligne DS devoit être censée couper la ligne AZ au même point où elle la coupoit avant de se confondre avec elle. Donc l'équation aux différences infiniment petites, dans laquelle se change alors l'équation aux différences finies, admettra aussi $(K + 1)n$ constantes arbitraires aux mêmes conditions; ou, pour parler plus exactement, les n constantes, introduites dans l'intégration, pourront changer de valeur $K + 1$ fois. Ainsi, quand on aura à traiter une équation aux différences infiniment petites, il faudra régler le changement des constantes sur l'équation aux différences finies, dont elle est limite, si une telle équation est donnée par le problème qui a conduit à l'équation différentielle. Si elle ne l'est pas, ce qui arrive presque toujours, il faut la supposer la plus générale possible.

Par exemple, si on doit intégrer l'équation $ddy = 0$, sans que l'équation aux différences finies soit donnée, on écrira $y = G[v] + x F[v]$, v étant un nombre entier qui change par saut d'une manière quelconque. Ceci me paroît être une conclusion assez naturelle de ce qui précède. Cependant, si mon Lecteur refuse d'admettre ce résultat, & soutient l'immuabilité des constantes, je lui déclare que mon intention n'est pas d'en disputer, ni de l'excéder de discussions pointilleuses. Dans ce cas, je me contenterai de remarquer que ces Intégrales ne donnent pas les solutions générales des problèmes qui les ont fournies; ce que je vais prouver par plusieurs exemples.

EXEMPLE PREMIER. Soient tant de cercles qu'on voudra passant par A (*fig. 1.*), & ayant leur centre sur la ligne AB, on demande la courbe qui coupe tous ces cercles à angles droits. En traitant ce problème convenablement, on arrive à une équation différentielle, dont l'Intégrale est y . constante $= x^2 + y^2$, les coordonnées rectangles sont x & y : or, si on conserve à la constance l'immuabilité, on aura un cercle passant par A, & ayant son centre dans la perp. AD à AB; mais n'est-il pas évident que, si je prends les arcs AQ, RS, TV, &c. dont les prolongemens passent par A, & qui aient leurs centres sur AD, ce système d'arcs de différens cercles, qui n'est point un cercle, résoudra le problème? Donc, &c.

EXEMPLE SECOND. On propose de trouver la courbe dont la sous-tangente est double de l'abscisse. Le calcul intégral donne $y^2 = x$. const. ce qui donne une parabole si la constante est fixe. Mais les lignes AQ, RS, TV (*fig. 2.*), arcs de parabole, dont le prolongement passe par A, résolvent le problème; donc, &c.

EXEMPLE TROISIÈME. On propose de faire passer par trois points, non en ligne droite, la ligne la plus courte; l'Intégrale de l'équation $ddy = 0$ ne pourra y satisfaire, en conservant les constantes fixes.

380 RECHERCHES SUR LES INTÉGRALES

EXEMPLE QUATRIÈME. Soit l'équation $dy = dx : \sqrt{1 - x^2}$, où y exprime l'arc dont le *sin.* est x , intégrant en logarithmes imaginaires, on trouve $y\sqrt{-1} + \text{const.} = L(x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2})$. Jusqu'à présent on a toujours supposé, pour déterminer la constante, que y & x s'évanouissent en même temps; & par conséquent on a regardé l'équation $y\sqrt{-1} = L(\cos y + \sin. y\sqrt{-1})$, comme exprimant la relation générale entre l'arc & le *sinus*. Or cela n'est point exact, puisque, si l'on suppose $y = 2n\pi$, n étant entier, on trouvera $2n\pi\sqrt{-1} = 0$; & si on suppose $y = (2n+1)\pi$, on trouvera $(2n+1)\pi\sqrt{-1} = L(-1)$, ce qui ne vaut pas mieux. Il faut, pour obtenir la véritable relation entre l'arc & le *sinus*, faire la constante $= -2n\pi\sqrt{-1}$, tant que y est entre $2n\pi$ & $(2n+1)\pi$, & la faire $= L(-1) - (2n+1)\pi\sqrt{-1}$ quand y est entre $(2n+1)\pi$ & $2(n+1)\pi$; elle n'est donc pas fixe.

Ainsi, Lecteur, si vous ne convenez pas que les équations que je propose vérifient les différentielles, vous conviendrez du moins que, pour obtenir les solutions générales des problèmes, il faut rejeter les équations que vous appelez intégrales complètes, & y substituer celles que j'indique, auxquelles vous refusez cette propriété.

COROLLAIRE. Puisque la fonction $\lambda^{-\mu}[x]$ est la composante des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation intégrale précédente, il est bon de faire voir comment on pourra la déterminer dans quelque cas.

EXEMPLE PREMIER. Soit $\lambda[x] = a + px$, on aura $\lambda^{\mu+1}[x] = a + p\lambda^{\mu}[x]$ & $\frac{\lambda^{\mu+1}[x]}{p^{\mu+1}} - \frac{\lambda^{\mu}[x]}{p^{\mu}} = \frac{a}{p^{\mu+1}}$; donc en intégrant $\frac{\lambda^{\mu}[x]}{p^{\mu}} = \frac{a}{p^{\mu+1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) + \text{const.}$ faisant $\mu = 0$,

on aura $\text{const.} = x - \frac{a}{1-p}$, & par conséquent

$$\lambda^{\mu} [x] = a \frac{1-p^{\mu}}{1-p} + p^{\mu} \cdot x. \text{ Donc } \lambda^{-\mu} [x] = x - a \frac{(1-p^{\mu})}{1-p} \cdot \frac{1}{p^{\mu}}.$$

$$\text{EXEMPLE SECOND. } \lambda [x] = \frac{x^n}{n-1}. \text{ On aura } \lambda^{\mu+1} [x] = \frac{\lambda^{\mu} [x]}{a^{n-1}}.$$

Donc en prenant les logarithmes $L \lambda^{\mu+1} [x] = n L \lambda^{\mu} [x] - (n-1) L a$, divisant par $n^{\mu+1}$, intégrant & déterminant la constante, comme dans le premier exemple, on trouvera

$$L \lambda^{\mu} [x] = n^{\mu} L x + (1-n^{\mu}) L a. \text{ Donc } \lambda^{\mu} [x] = a \left(\frac{x}{a} \right)^{n^{\mu}}.$$

$$\& \lambda^{-\mu} [x] = a \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{n^{\mu}}}.$$

EXEMPLE TROISIÈME. $\lambda [x] = a h^{\frac{x}{a}}$; on trouvera $\frac{x}{a} = L^{\mu} \lambda^{\mu} \left(\frac{x}{a} \right)$, & par conséquent $\lambda^{-\mu} [x] = a L^{\mu} \frac{x}{a}$; l'exposant μ indique combien le signe du logarithme doit être répété;

Le Lecteur pourra consulter sur cette matière les Mémoires présentés à l'Académie, volumes de 1773 & 1780 ou 1781.

Si la fonction δ étoit discontinue, on conçoit qu'il seroit impossible d'obtenir d'Intégrale; il y a plus, la construction aura quelquefois de grandes difficultés à raison du procédé graphique qui fera connoître cette fonction. Je vais donner, au moyen d'un exemple fort simple, quelque idée de la route qu'on pourra suivre dans ces circonstances.

PROBLÈME. Soit l'équation aux différences finies du second degré $\phi [\Delta^2 y, \Delta y] = \theta [x, y]$, la fonction ϕ est la troisième des coordonnées d'une surface connue, dont $\Delta^2 y$ & Δy sont les premières; θ est la troisième des coordonnées d'une surface

582 RECHERCHES SUR LES INTÉGRALES

aussi connue, dont x & y sont les premières. On propose de construire la courbe intégrale $\Delta x = a$; ces surfaces ne sont pas analytiques.

SOLUTION. On prendra de la ligne indéfinie $A E$ (*fig. 4.*) une abscisse $A^1 A = 2 a$, sur laquelle on construira une génératrice $B M^1 B$ analytique ou discontinue, pourvu que l'équation se vérifie à son dernier point $^1 B$. On prendra une abscisse $A P$ moindre que a qui sera x ; on menera l'ordonnée correspondante qui sera y , & pour le point M , y & Δy seront connus. Pour connoître $\Delta^2 y$, on transportera la génératrice dans le plan des premières coordonnées de la surface θ , de manière que l'axe des y de la génératrice tombe sur l'axe des y de la surface, & l'axe des x sur l'axe des x ; par le point M , on menera la troisième coordonnée à la surface θ , qui sera connue. Par un point quelconque du plan des premières coordonnées de la surface ϕ , on menera une perpendiculaire = à la coordonnée qui vient d'être déterminée; par l'extrémité de cette perpendiculaire, on menera un plan parallèle à celui des premières coordonnées, qui coupera la surface ϕ suivant une courbe qu'on projettera orthogonalement sur le plan des premières coordonnées. Enfin, prenant la seconde coordonnée Δy , on menera l'ordonnée correspondante de la projection, qui sera $\Delta^2 y$; enfin, prenant $P^2 P = 2 a$, on menera par $^2 P$ la perpendiculaire $^2 P^2 M = y + 2 \Delta y + \Delta^2 y$, & le point $^2 M$ sera à la courbe cherchée. Pour avoir l'ordonnée $^{-1} y$, il faut donner cette forme à la proposée $\phi [^1 y - 2 y + ^{-1} y, y - ^{-1} y] = \theta (^{-1} x \ ^{-1} y)$, & il n'y aura d'inconnues que $^{-1} y$ qu'il est question de déterminer. Pour y parvenir, soient $A E$, $A G$ (*figure 5.*) deux lignes perpendiculaires entre elles, qui représenteront le plan des premières coordonnées des surfaces θ & ϕ ; $A G$ sera l'axe des x pour la surface θ , & des $\Delta^2 y$ pour la surface ϕ ; par conséquent $A E$ sera l'axe des y pour la surface θ , & des Δy pour la surface ϕ . On prendra $A G = ^1 y - y$; par le point G , on menera

la ligne GE sous 45° , qui sera coupée par une perpendiculaire RD , menée sur AG , à une distance $AD = {}^{-1}x$; on coupera la surface θ par un plan passant par RD , & perpendiculaire à EAG ; on rapportera, sur le plan de la figure, la courbe YF qui en résultera, & la ligne RD ; on coupera la surface ϕ par un plan passant par RG , & aussi perpendiculaire à EAG . On rapportera de même la courbe TV qui en résultera, & la ligne RG sur le plan de la figure. On prendra, sur la ligne RD de la première courbe, une partie RZ , & sur la ligne RG de la seconde, une portion $RL = (2^1y - 3y - 2^{-1}x - RZ) \sqrt{2}$. Par le point L , on menera l'ordonnée LV à la courbe TV , & par Z on menera ZH perpendiculaire sur RD & $= LV$; la courbe qui passera par tous les points H ainsi déterminés, coupera la ligne YF en un point F , pour lequel il faudra mener l'ordonnée IF ; portant enfin RI sur RD , de R en X , XD fera la valeur de ${}^{-1}y$.

DÉMONSTRATION. Si on mène par X la troisième coordonnée à la surface θ , cette coordonnée sera égale à IF ; ensuite, si on prend $RS = (2^1y - 3y - 2^{-1}x - RX) \sqrt{2}$, & qu'on mène par S la troisième coordonnée à la surface ϕ , cette coordonnée sera aussi égale à IF : ainsi, puisque l'ordonnée en X a la surface $\theta =$, l'ordonnée en S a la surface ϕ . La question se réduit à prouver que si du point S on abaisse la perpendiculaire SK , & si on prend ensuite $AB = {}^1y - 2y$, on aura $BK = DX$: or cela est clair, car puisque $RS = (2^1y - 3y - 2^{-1}x - RX) \sqrt{2}$, on a $DK = 2^1y - 3y - 2^{-1}x - RX$, & retranchant $DB = {}^1y - 2y - {}^{-1}x$, il reste $BK = {}^1y - y - {}^{-1}x - RX$; $DG = {}^1y - y - {}^{-1}x$; donc $DX = {}^1y - y - {}^{-1}x - RX = BK$.

Il y a une autre espèce d'équations, qui se présentent surtout dans la détermination des fonctions arbitraires, qui entrent dans les Intégrales des équations aux différences partielles; co

sont les équations qui contiennent à la fois des différences infiniment petites, & des différences finies. Je n'ai à offrir à mes Lecteurs qu'un léger essai sur cette matière ; il est contenu dans le problème suivant.

PROBLÈME. Etant donné l'équation $\Delta y = b \frac{d y}{d x}$, on propose d'en trouver l'Intégrale complete $\Delta x = a$.

SOLUTION. On a ${}^1y = y + b \frac{d y}{d x}$; donc il est permis de supposer ${}^\mu y = y + F[\mu, 1] \frac{d y}{d x} + F[\mu, 2] \frac{d^2 y}{d x^2} \dots + F[\mu, v] \frac{d^v y}{d x^v}$, $F[\mu, v]$ représentant une fonction de μ & de v qu'il est question de déterminer. Cela posé, comme on a ${}^{\mu+1}y = {}^\mu y + b \frac{d {}^\mu y}{d x}$, si on met pour ${}^\mu y$ sa valeur, on aura une expression de ${}^{\mu+1}y$, dans laquelle le coefficient de $\frac{d^v y}{d x^v}$ sera $F[\mu, v] + b F[\mu, v-1]$; il faudra faire ce coefficient $= F[\mu+1, v]$, & on aura en intégrant $F[\mu, v] = b^v [\mu]^v [0]^{-v}$. Par conséquent ${}^\mu y = y + b [\mu^1] [0]^{-1} \frac{d y}{d x} + b^2 [\mu^2] [0]^{-2} \frac{d^2 y}{d x^2} + \dots$ ce qui donne en multipliant & divisant le second membre de cette

équation par $\frac{h^{\frac{x}{b}}}{b^\mu}$, ${}^\mu y = \frac{b^\mu}{h^{\frac{x}{b}}} \frac{d^\mu \left(\frac{h^{\frac{x}{b}}}{b} y \right)}{d x^\mu}$; maintenant, prenant

x & y pour les coordonnées quelconques, on aura . . .

$y = \frac{b^\mu}{h^{\frac{x-a\mu}{b}}} \frac{d^\mu (\psi[x-a\mu])}{d x^\mu}$; quand μ fera négatif, le

signe de différentiation deviendra signe d'intégration, & on aura

aura $y = \frac{\int^{\mu} dx^{\mu} \psi[x - a^{\mu}]}{b^{\mu} h. \frac{a^{\mu} - x}{b}}$, h est le nombre dont le logarithme est 1.

REMARQUE. Il y a un problème très-connu des Géomètres; où ce calcul s'applique avec avantage; c'est celui où on demanderoit le mouvement d'un nombre indéterminé de poids fixés à distances égales sur une corde attachée en deux points; pourvu toutefois que ces corps soient peu éloignés de la ligne de jonction des points d'attache. L'équation de ce problème est ${}^x\Delta^2 z = \frac{m d d(z + {}^x\Delta z)}{d y^2}$, x & z sont les coordonnées d'un corps quelconque. Consultez le premier volume des Mémoires de Turin. J'avois dessein de donner ici l'intégrale de cette équation; mais comme le calcul en est assez long, qu'on peut le faire facilement d'après ce qui précède, & que d'ailleurs le problème qui la produit est résolu dans le Mémoire cité, par une méthode effectivement fort différente de celle que j'indique, j'aime mieux laisser à mes Lecteurs le plaisir de faire cette application.

Fragment sur les Fonctions discontinues.

Il en est des fonctions discontinues comme du hasard. Ces deux êtres, ou, pour parler plus exactement, cette manière d'être des objets & des évènements nous est relative; elle exprime seulement l'ignorance où nous sommes des véritables causes. Quand je trace une courbe sans dessein, je dis qu'elle est discontinue, ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a aucune loi de description, mais simplement qu'elle n'est pas à ma connoissance. On conçoit que cette discontinuité ne sauroit être exprimée par des formules analytiques: aussi n'est-ce pas celle dont il est ici question. Il y a une autre espèce de discontinuité, mais qui est ainsi nommée improprement; c'est quand un effet, ayant suivi une loi pendant un certain temps ou le long

586 RECHERCHES SUR LES INTÉGRALES

d'une certaine abscisse, la quitte brusquement pour en suivre une autre, comme feroit un corps qui décroît un polygone. Mon intention est de prouver par des exemples, que quand les loix particulières sont données en nombre quelconque, on peut toujours trouver la loi générale, & que l'algèbre, telle qu'elle est actuellement, suffit pour l'exprimer.

EXEMPLE. Soit.

$$z = g + kx + \left(\frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{1-x}{a}}} + \frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{x-1}{b}}} \right) \sqrt{x-a} \sqrt{b-x}$$

l'équation d'une surface, (je suppose les coordonnées perpendiculaires entre elles), a est $< b$. Si on fait $F\left(\frac{y}{a}\right) = 0$, & que, par la parallèle à l'axe des x donnée par cette équation, on fasse passer un plan perpendiculaire aux x & y , il est clair que l'intersection de ce plan avec la surface, sera une ligne droite qui commencera à l'abscisse a , & finira à l'abscisse b .

Soit l'équation d'une autre surface

$$z = g' + k'x + \left(\frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{1-x}{b}}} + \frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{x-1}{c}}} \right) \sqrt{x-b} \sqrt{c-x}$$

c est $> b$. L'intersection du plan précédemment mené avec cette surface, sera une ligne droite qui commencera à l'abscisse b , & s'arrêtera à l'abscisse c . Cette ligne fait avec la première un angle quelconque; elles se rencontreront, si $g - g' = (k' - k)b$. Si donc on multiplie ces équations entre elles, en mettant tout dans un membre, le lieu de l'équation produit sera une nouvelle surface, dont la section, par le plan déjà considéré, sera une ligne brisée, s'arrêtant de part & d'autre. Au reste, non seulement on peut exprimer un système de plusieurs lignes par une formule unique, & par conséquent regarder cette ligne comme unique; je dis de plus, qu'un système composé de surfaces, de lignes & de points, peut encore être exprimé par une formule unique.

EXEMPLE. Soit l'équation $y = X + b f \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{b}}$, π est la demi-circonférence; X ne peut pas devenir imaginaire. Le lieu de cette équation est une courbe étendue sur les abscisses négatives à l'infini, & sur les positives moindres que b , sans solution de continuité. Mais, à compter de l'abscisse b , la courbe finit, & le lieu n'est plus qu'une suite de points isolés, placés à des distances finies l'un de l'autre.

AUTRE EXEMPLE. Soit maintenant l'équation

$$z = \phi[x, y] + \left(y - X - b f \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{b}} \right) \left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{g} - 1 \right) \left(1 - \frac{x}{f} \right)} \right],$$

g est $< f$ & $f < b$, la fonction ϕ ne peut devenir imaginaire. Le lieu de cette équation est composé d'abord d'une surface courbe, compris entre deux plans perpendiculaires à la ligne des x , l'un répondant à l'abscisse g , & l'autre à l'abscisse f ; ensuite d'une courbe à double courbure, qui s'étend, isolée sur les abscisses négatives quelconques, & positives jusqu'à g , où elle entre dans la surface pour en sortir à l'abscisse f , & se continuer isolée jusqu'à l'abscisse b . Là elle s'arrête. Cette courbe a pour projection $y = X + b f \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x}{b}}$. Après l'abscisse b , l'équation ne se vérifie plus que par des points isolés, correspondant aux points isolés de la projection $y - X \&c. = 0$.

Mon Lecteur voit, par cet exemple, qu'une formule unique peut exprimer un mélange de surfaces de lignes & de points. De là il concluera les moyens de trouver cette formule, si les surfaces lignes & points étoient données.

Je terminerai cet article & ces Recherches par deux exemples, où l'on verra que des problèmes très-simples peuvent conduire à cette espèce de lignes discontinues, où la loi générale peut se décomposer en plusieurs loix particulières.

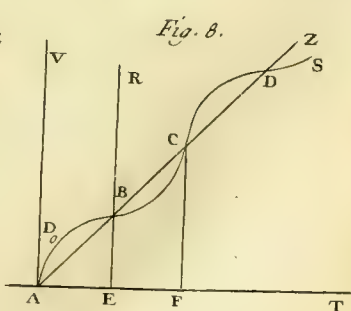
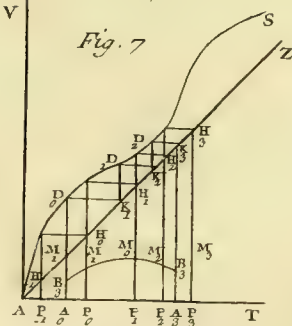
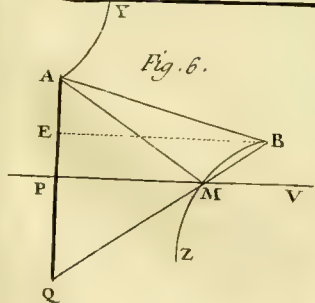
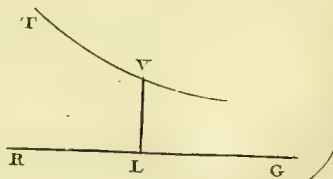
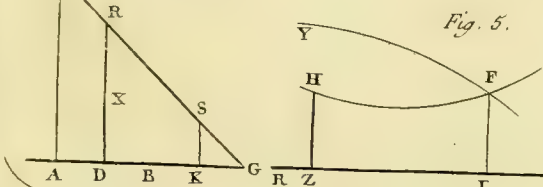
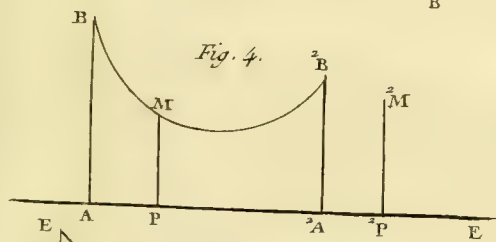
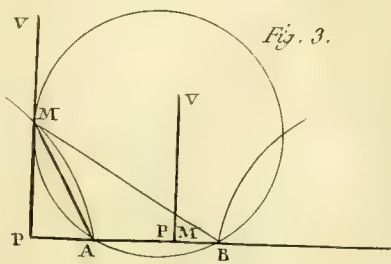
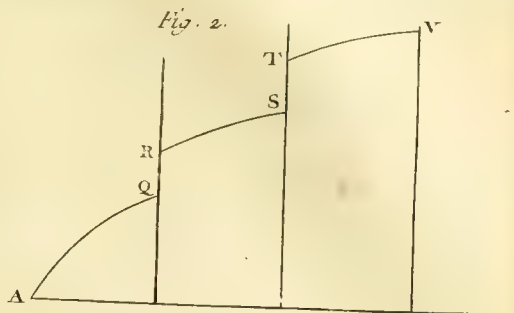
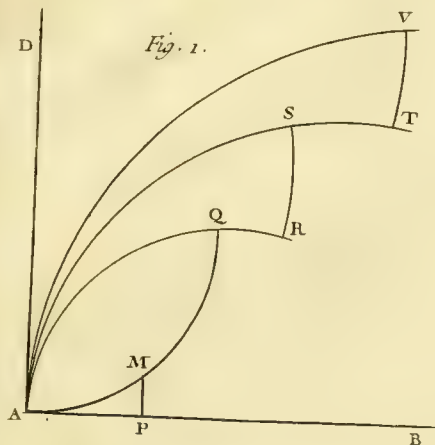
EXEMPLE PREMIER. Deux points A & B (*fig. 3.*) sont donnés avec une perpendiculaire P V sur cette ligne A B, & on propose de trouver le point M sur la perpendiculaire, tel que

Eccc ij

l'angle AMB soit le plus grand possible. Tant que la perpendiculaire tombera entre les points A & B , le point M se confondra avec le point P , puisque l'angle est alors de 180° . Ainsi, en imaginant que la perpendiculaire se meut de B en A , le lieu de tous les points M est la droite AB ; mais quand la perpendiculaire, en continuant à se mouvoir, tombe sur le prolongement de AB , il faut décrire un cercle qui passe par A & B , & touche la ligne PV ; le point de contact M , est le point cherché. Ainsi on a hors de la ligne AB , $PM^2 = AP \times PB$; le lieu de tous les points M est donc composé de l'hyperbole équilatère, qui a pour axe AB , & de cet axe même, si c'étoit le *sinus* de l'angle qui dût être un *maximum*, le lieu seroit alors composé de l'hyperbole, & du cercle qui auroit AB pour diamètre.

EXEMPLE SECOND. Soient deux points A & B (*fig. 6.*) & une ligne PV ; si on abaisse la perpendiculaire AP sur cette ligne, qu'on la prolonge d'une quantité $PQ =$ à elle-même, & qu'on mène BQ , cette dernière ligne coupera PV en un point M tel que la somme des lignes AM , & BM sera moindre que pour tout autre point de la ligne PV . Maintenant, si on imagine que cette ligne PV se meut parallèlement à elle-même, on peut demander le lieu de tous ces points M . Menons par le point B la perpendiculaire BE sur AP , on aura la proportion $2 AP - AE : EB = AP : PM$; donc $\left(AP - \frac{AE}{2} \right) \left(PM - \frac{EB}{2} \right) = \frac{AEBB}{4}$, ce qui indique une hyperbole qui a pour centre le milieu de AB , dont les asymptotes rectangles sont parallèles aux coordonnées AP & PM , & qui passe par A & B . Cependant, il est évident que tant que la ligne PV sera entre les points A & B , les points M tomberont tous sur AB . Donc le lieu complet du problème est composé des branches infinies d'hyperbole BZ & AY , & du diamètre AB .









OBSERVATIONS THERMOMÉTRIQUES,

*D'où l'on déduit le rapport des degrés des
Thermomètres exposés en différens lieux.*

PAR M. MARCORELLE.

LES Observations que renferme ce Mémoire, ne sont pas de l'espèce de celles que l'on fait pour connoître la température de l'air, le froid & le chaud de toute l'année, jusqu'à quels degrés ont été le plus grand chaud & le plus grand froid, s'ils ont été égaux chacun en leur saison, ou de combien l'un a surpassé l'autre, qu'elles sont les limites de leurs inégalités, pour avoir en un mot l'histoire physique du froid & du chaud de chaque année; elles ont pour objet de comparer les degrés des thermomètres exposés en divers lieux, & d'établir leur rapport.

Pour pouvoir faire cette comparaison, je ne négligeai rien pour que les thermomètres dont je me servois fussent semblables, & que leur construction fût telle, que la même chaleur fût monter & passer la liqueur par les mêmes degrés. Elle opéreroit indubitablement cet effet dans différens thermomètres, si le calibre de leurs tuyaux, qui contiennent la liqueur, étoit précisément le même, si leurs boules avoient des diamètres égaux, & si les tuyaux avoient toujours la même proportion avec la grosseur des boules; mais il est très-rare de trouver toutes ces choses dans les verres dont sont composés les thermomètres. Pour parer à l'inconvénient

qui résulte de l'inégalité des verres, & faire en sorte que la même chaleur fasse monter également la liqueur dans les tuyaux des thermomètres, il est nécessaire de mettre à chacun d'eux une table particulière & proportionnée au tuyau; une table où il y ait la même quantité de degrés que dans une autre, mais de degrés qui soient d'autant plus grands ou d'autant plus petits, que la même chaleur fasse monter la liqueur dans son tuyau d'une manière beaucoup plus ou beaucoup moins sensible.

Pour trouver cette proportion entre la table d'un thermomètre & le tuyau où étoit contenue la liqueur, voici la méthode que j'employai : je fis choix de plusieurs thermomètres; je les plongeai dans la glace, pour faire descendre autant qu'il étoit possible le mercure renfermé dans leurs tuyaux, & je marquai l'endroit où la liqueur de chacun de ces thermomètres étoit descendue; ensuite je plongeai leurs boules dans un même vaisseau rempli d'eau chaude, & je marquai le lieu où le mercure étoit monté dans chaque thermomètre. Ces opérations faites, je partageai l'espace que la liqueur de chacun de ces thermomètres avoit parcouru, depuis le lieu de la descente jusqu'à celui de la montée, en suivant pour les uns la méthode de Lyon, & pour les autres celle de M. de Réaumur. Au moyen de cette division proportionnelle des tables de ces différens thermomètres, la même chaleur fit toujours monter & passer la liqueur par les mêmes degrés : c'est en me servant de ces instrumens, que j'ai fait les observations dont je vais exposer les tableaux.

ARTICLE PREMIER.

Observations pour établir le rapport de la chaleur directe des rayons du Soleil, à celle qu'on éprouve à l'ombre, pendant l'été, à Toulouse.

Pour connoître ce rapport, je pris deux des thermomètres dont je viens de parler; ils étoient chargés de mercure; leurs marches étoient uniformes ou proportionnelles, & l'espace,

THERMOMÉTRIQUES. 591

entre le terme de l'eau bouillante & celui de la congélation, étoit divisé en cent parties égales ; j'en exposai un à l'air extérieur, du côté du Nord, à couvert des rayons du Soleil, & à la hauteur de dix pieds au dessus de la surface de la terre. L'exposition de l'autre étoit au midi, & à la même hauteur ; je plaçois ce dernier, à douze heures précises du matin, à un poteau isolé, de manière que la liqueur ne recevoit que les rayons directs du Soleil, & n'en recevoit aucun réfléchi par des corps voisins. J'observai, pendant plusieurs beaux jours de l'été de 1747, ces deux thermomètres, depuis midi jusqu'à environ quatre heures du soir, terme auquel le Soleil cessoit de darder ses rayons sur celui qui lui étoit exposé. J'examinai de quart-d'heure en quart-d'heure le progrès de l'ascension, de la station & de la descente du mercure ; il est tel que le détail de quelques-unes de ces observations que je vais rapporter, le fait connoître.

OBSERVATION du 8 Août 1747, par un vent de Nord.

HEURES ET MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.
	<i>D.</i>	<i>D.</i>
A midi.....	28	
A midi $\frac{1}{4}$		35
A midi $\frac{1}{2}$	28 $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{3}{4}$		37
A 1 heure.....	29	37
A 1 $\frac{1}{4}$		37 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{1}{2}$	29 $\frac{1}{2}$	37 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{3}{4}$		37 $\frac{1}{2}$
A 2.....	29	37 $\frac{1}{2}$
A 2 $\frac{1}{4}$		37
A 2 $\frac{1}{2}$	28 $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$
A 2 $\frac{3}{4}$		36 $\frac{1}{2}$
A 3.....	28	36
A 3 $\frac{1}{4}$		35
A 3 $\frac{1}{2}$		34 $\frac{1}{2}$

Le Thermomètre commença à n'être plus exposé aux rayons du Soleil vers les 4 heures.

OBSERVATION du 9 Août, par un vent de Nord.

HEURES ET MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.
	<i>D.</i>	<i>D.</i>
A midi.....	29 $\frac{1}{2}$	37
A midi $\frac{1}{4}$	30	37 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{1}{2}$	30	38
A midi $\frac{3}{4}$	30 $\frac{1}{2}$	38 $\frac{1}{2}$
A 1 heure.....	30	39
A 1 $\frac{1}{4}$	30 $\frac{1}{2}$	39
A 1 $\frac{1}{2}$	30	39
A 1 $\frac{3}{4}$	30	38
A 2.....	30	38
A 2 $\frac{1}{4}$	29 $\frac{1}{2}$	33
A 2 $\frac{1}{2}$	29	37
A 2 $\frac{3}{4}$	29	37
A 3.....	29	37
A 3 $\frac{1}{4}$		37
A 3 $\frac{1}{2}$		37
A 3 $\frac{3}{4}$		36

OBSERVATION du 10 Août, par un vent de Sud-est.

HEURES ET MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.
	<i>D.</i>	<i>D.</i>
A midi.....	31	39 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{1}{4}$	31	40
A midi $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$	40 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{3}{4}$	31	40 $\frac{1}{2}$
A 1 heure.....	32	41
A 1 $\frac{1}{4}$	32	41
A 1 $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	40 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{3}{4}$	32	40 $\frac{1}{2}$
A 2.....	32	39
A 2 $\frac{1}{4}$	32	39
A 2 $\frac{1}{2}$	32	38
A 2 $\frac{3}{4}$	32	38
A 3.....	32	37

Il résulte de ces observations : 1°. que le mercure du thermomètre exposé au Soleil, monte environ huit à neuf degrés de plus que le mercure du thermomètre exposé à l'ombre, à compter du terme de la congélation, & que le rapport de la chaleur directe des rayons du Soleil, est à celle qu'on éprouve à l'ombre, comme cinq est à quatre.

2°. Que la liqueur, soit du thermomètre exposé à l'ombre, soit du thermomètre exposé aux rayons du Soleil, parvient vers une heure & demie du soir à son plus haut degré dans la journée, & qu'elle reste fixe au même point, environ trois quarts-d'heure, & quelquefois un peu plus, sur-tout lorsque la chaleur est vive.

3°. Que la liqueur du thermomètre exposé à l'ombre, parcourt en montant un degré & demi, depuis midi jusqu'à ce qu'elle soit parvenue à sa plus grande hauteur; & que celle du thermomètre exposé aux rayons du Soleil, en parcourt, dans le même temps, de neuf à dix degrés, de façon pourtant qu'elle parcourt environ huit degrés dans le premier quart-d'heure de l'exposition du thermomètre aux rayons du Soleil, & que dans les autres suivans, qui précèdent le plus haut point de son ascension, elle n'en parcourt à peu près que deux.

4°. Que le mercure du thermomètre exposé à l'ombre, parcourt en descendant à peu près un degré ou un degré & demi, depuis le temps qu'il est parvenu à son plus haut point, jusqu'à trois heures; & que celui du thermomètre exposé aux rayons du Soleil, en parcourt environ trois degrés, depuis le même terme de sa plus grande ascension, jusqu'à près de quatre heures, temps auquel il cesse d'être exposé aux rayons du Soleil.

Suivant de semblables observations, faites à Montpellier avec un thermomètre à esprit de vin, gradué selon la méthode de M. de Réaumur, le rapport de la chaleur directe des rayons du Soleil, à celle qu'on éprouve à l'ombre dans cette Ville, est comme un est à deux : ce rapport est bien différent

de celui observé à Toulouse, qui est comme cinq est à quatre.

Cette différence est trop grande, pour qu'elle puisse être occasionnée par la température de l'air des différens climats, qui ne sont pas fort éloignés les uns des autres; elle ne peut l'être non plus par l'inégalité des thermomètres, quoique l'esprit de vin se dilate plus ou moins, eu égard à ce qu'il est plus ou moins bien rectifié, & qu'à raison de cette dilatation plus ou moins grande, il arrive souvent qu'il monte sans mesure dans les grandes chaleurs, & qu'il ne monte guère dans celles qui sont moindres; elle ne pourroit pas faire cependant cette dilatation, que la liqueur d'un thermomètre parcourût dans le même temps le double du degré marqué par un autre.

Cette différence doit donc être attribuée à une autre cause; quelle est-elle? Tout induit à penser que c'est la différente exposition des thermomètres. En effet, selon qu'ils sont différemment exposés à l'air, ils reçoivent différentes impressions, & la liqueur parcourt des chemins différens dans le même temps; elle monte plus ou moins vite, selon que la chaleur du Soleil agit sur elle avec plus ou moins de force. Il n'est pas douteux qu'elle n'agisse plus vivement sur un thermomètre exposé au midi, & placé, par exemple, à l'angle de deux murs, que sur un thermomètre exposé de même au Soleil, mais à l'air libre & à couvert de toute réverbération. Le Soleil n'agit sur celui-ci que directement, au lieu qu'il agit sur l'autre par son action directe & par une action réfléchie. Ce thermomètre est comme s'il étoit placé au foyer d'un miroir ardent, où toute l'action étant réunie, elle s'y exerce plus sensiblement: de là donc, que la liqueur du thermomètre exposé au Soleil, est montée à Montpellier à une hauteur double de celle qu'un pareil thermomètre marquoit à l'ombre. On peut conjecturer, avec quelque fondement, que le premier étoit placé à un mur ou à quelque angle, & que le Soleil agissoit sur lui, & par les rayons qu'il lui envoyoit directement, & par ceux qui

THERMOMÉTRIQUES. 595

étoient réfléchis par des corps voisins : des expériences répétées vérifient ces conjectures.

Dans le temps que je faisois les observations que j'ai rapportées, avec deux thermomètres, dont l'un étoit exposé au nord & à l'ombre, & l'autre étoit placé perpendiculairement à un poteau isolé, & exposé seulement aux rayons directs du Soleil, j'en eus un troisième, pareil aux autres, que je mis fort près de ce dernier, & à la même hauteur de dix pieds au dessus de la terre ; je l'exposai également à l'impression des rayons directs du Soleil ; mais il étoit placé de façon qu'il pouvoit recevoir de plus des rayons du Soleil réfléchis par les corps voisins. La liqueur de ce troisième thermomètre monta à une hauteur à peu près double de celle que marquoit le thermomètre qui étoit à l'ombre. Voici le détail de quelques-unes de ces observations, qui fortifie en même temps le résultat des premières.

OBSERVATION du 14 Août 1747, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, à la réverbération.
	D.	D.	D.
A midi.....	30	37	55
A midi $\frac{1}{4}$	30 $\frac{1}{2}$	37 $\frac{1}{2}$	60
A midi $\frac{1}{2}$	31	38	61 $\frac{1}{2}$
A 1 heure.....	31	38	62
A 1 $\frac{1}{4}$	31 $\frac{1}{2}$	39	62 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$	39	62 $\frac{1}{2}$
A 2.....	31 $\frac{1}{2}$	39	62 $\frac{1}{2}$
A 2 $\frac{1}{4}$	31	38 $\frac{1}{2}$	62
A 2 $\frac{1}{2}$	31	38 $\frac{1}{2}$	61 $\frac{1}{2}$
A 3.....	30 $\frac{1}{2}$	37 $\frac{1}{2}$	60
A 3 $\frac{1}{4}$		37	59
A 3 $\frac{1}{2}$		36	à 3 h $\frac{1}{2}$ le Soleil ne donnoit que foiblement sur le Thermomètre.
A 3.....		35	

OBSERVATION du 15 Août, par un vent de Nord-ouest.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, à la réverbération.
	<i>D.</i>	<i>D.</i>	<i>D.</i>
A midi.....	30	37 $\frac{1}{2}$	57 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{1}{4}$	30 $\frac{1}{2}$	38 $\frac{1}{2}$	62
A midi $\frac{1}{2}$	31	38 $\frac{1}{2}$	62
A 1 heure.....	31	38 $\frac{1}{2}$	64
A 1 $\frac{1}{4}$	31 $\frac{1}{2}$	39	65
A 1 $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$	40	65
A 2.....	31 $\frac{1}{2}$	40	64 $\frac{1}{2}$
A 2 $\frac{1}{4}$	30 $\frac{1}{2}$	39 $\frac{1}{2}$	63 $\frac{1}{2}$
A 2 $\frac{1}{2}$	30	39 $\frac{1}{2}$	63 $\frac{1}{2}$
A 3.....	30	38 $\frac{1}{2}$	61
A 3 $\frac{1}{4}$		38	61
A 3 $\frac{1}{2}$		37	60

OBSERVATION du 16 Août, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, à la réverbération.
	<i>D.</i>	<i>D.</i>	<i>D.</i>
A midi.....	32	40	57
A midi $\frac{1}{4}$	32	41	64 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	65
A 1 heure.....	32 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	66 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{1}{4}$	32 $\frac{1}{2}$	42	66 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	42 $\frac{1}{2}$	66 $\frac{1}{2}$
A 2.....	33 $\frac{1}{2}$	42 $\frac{1}{2}$	66 $\frac{1}{2}$
A 2 $\frac{1}{4}$	33	42 $\frac{1}{2}$	65
A 2 $\frac{1}{2}$	33	42	65
A 3.....	33	42	63 $\frac{1}{2}$
A 3 $\frac{1}{4}$		41 $\frac{1}{2}$	63
A 3 $\frac{1}{2}$		41	61
A 4.....		40 $\frac{1}{2}$	61

On voit par ces observations, que le 14 Août, par un vent de Nord-ouest, le thermomètre à l'ombre marquoit, à une heure & demie du soir, 31 degrés $\frac{1}{2}$; celui qui étoit à un poteau isolé, 39 degrés, & le thermomètre exposé à la réverbération, 62 degrés $\frac{1}{2}$, qui est le double du degré que marquoit le thermomètre à l'ombre, un demi degré de moins seulement. Le 15 du même mois, par un vent du Nord-ouest, le thermomètre à l'ombre étoit, à une heure & demie du soir, à 31 degrés $\frac{1}{2}$; celui du poteau à 40 degrés, & le thermomètre de la réverbération à 65 degrés, qui est double du degré marqué par le thermomètre à l'ombre, & 2 degrés de plus. Le 16 Août, par un vent de Nord, le thermomètre à l'ombre marquoit, vers une heure & demie du soir, 32 degrés $\frac{1}{2}$; celui qui étoit exposé au poteau marquoit 42 degrés $\frac{1}{2}$, & le thermomètre placé à la réverbération, 66 degrés $\frac{1}{2}$, qui est le double du degré marqué par le thermomètre à l'ombre, moins un demi degré seulement.

Il paroît, suivant ces observations, que c'est à l'action des rayons directs du Soleil, & à celle des rayons réfléchis par les corps voisins, que l'on doit attribuer le double du chemin qu'a parcouru à Montpellier la liqueur du thermomètre exposé au Soleil, sur celle du thermomètre exposé à l'ombre; mais alors dans ce cas, & avec des observations de cette espèce, l'on ne sauroit estimer la chaleur directe du Soleil, parce qu'elle se trouve mêlée & confondue avec la chaleur réfléchie. On pourroit d'autant moins faire cette estimation, que la chaleur réfléchie est beaucoup plus grande que la chaleur directe. Le célèbre M. de Mairan, qui avoit pour moi l'amitié la plus tendre, & dont la mémoire me fera toujours chère, avoit fait une expérience qui en fournit une preuve; il trouva avec des miroirs plans, dont la lumière réfléchissoit sur des thermomètres, que la montée du mercure, à chaque nouvelle réflexion, ou la nouvelle chaleur communiquée au thermomètre, qui n'alloit guère qu'à deux, trois ou quatre degrés de plus par un simple miroir, étoit toujours proportionnelle au nombre des

miroirs qui l'avoient produite, double ou triple; c'est-à-dire, que si un seul miroir fait monter la liqueur de trois degrés, deux miroirs réunis la font monter de six, & trois miroirs de neuf degrés. Des faits dont nous sommes tous les jours les témoins, viennent à l'appui de cette preuve; il gèle sur le sommet des hautes montagnes, exposé au Soleil, dans le temps qu'il fait une chaleur très-grande dans la plaine, & plus grande encore dans les vallons. La grêle se forme en l'air par la gelée des gouttes de pluie, quoiqu'elles soient exposées aux rayons du Soleil, tandis qu'il fait un grand chaud au dessous; il est donc certain que la chaleur du Soleil réfléchie, est plus grande que la chaleur directe, & que l'on ne sauroit estimer celle-ci sans la séparer entièrement de l'autre. Cette raison m'a déterminé à placer, lors de mes observations, le thermomètre exposé au Soleil à un poteau isolé & à couvert de toute sorte de réverbération; & ce n'est, je pense, qu'en employant ce moyen que l'on peut parvenir à connoître la chaleur directe des rayons du Soleil pendant l'été. Les variations & les changemens qui arrivent dans la température de l'air pendant les autres saisons de l'année, sont si fréquentes, que l'on ne sauroit alors estimer régulièrement la chaleur directe des rayons du Soleil. Elle est beaucoup plus grande, principalement en hiver, par rapport à celle qu'on éprouve à l'ombre.

ARTICLE DEUXIÈME.

Observations faites pour connoître la diminution de la chaleur du Soleil, pendant les éclipses de cet Astre.

CET article renferme les observations que j'ai faites pour connoître les différens degrés de chaleur du Soleil pendant ses éclipses des 25 Juillet 1748, & 8 Janvier 1750; je rapporterai les unes après les autres, & je donnerai à leur suite les résultats. Je commence par celles qui sont relatives à la première de ces éclipses.

THERMOMÉTRIQUES. 599

Pour remplir l'objet que j'avois en vue, je plaçai, le 25 Juillet 1748, jour de l'éclipse du Soleil, ainsi que les jours précédens & les jours suivans, à un poteau exposé en plein air, & à la surface de ce poteau, qui étoit éclairé des rayons du Soleil, depuis les sept heures & demie du matin, jusqu'à trois heures & demie du soir, un thermomètre chargé de mercure, & gradué de façon que l'espace entre le terme de l'eau bouillante & celui de la congélation, étoit divisé en cent parties égales. J'observai de quart-d'heure en quart-d'heure ce thermomètre; on verra les progrès de l'ascension & de l'abaissement de la liqueur dans les tableaux suivans :

OBSERVATION du 22 Juillet 1748, par un vent de Sud.		
HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
<i>D.</i>		
A 8 heures.....	25 serein.
A 9	35	
A 9 $\frac{1}{2}$	35 $\frac{1}{2}$	
A 9 $\frac{3}{4}$	36	
A 10	36 $\frac{1}{2}$	
A 10 $\frac{1}{4}$	36 $\frac{1}{2}$	
A 10 $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$	
A 10 $\frac{3}{4}$	36 $\frac{1}{2}$	
A 11	37	
A 11 $\frac{1}{4}$	37	
A 11 $\frac{1}{2}$	37 couvert.
A 11 $\frac{3}{4}$	37 $\frac{1}{4}$	
A midi.....	37	
A midi $\frac{1}{4}$	37 $\frac{1}{4}$	
A midi $\frac{1}{2}$	37 $\frac{1}{2}$ serein.
A midi $\frac{3}{4}$	37 $\frac{3}{4}$	
A 1 heure.....	38	
A 2	38	
A 3	37	

OBSERVATION du 23 Juillet, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
<i>D.</i>		
A 8 heures.....	26 ferein.
A 9	27 couvert.
A 9	27	
A 9	27	
A 9	27	
A 10	27 couvert.
A 10	27	
A 10	27 $\frac{1}{2}$	
A 10	28	
A 11	31 $\frac{1}{2}$ ferein.
A 11	31 $\frac{1}{2}$	
A 11	31 $\frac{1}{2}$	
A 11	31 $\frac{1}{2}$	
A midi.....	31 $\frac{1}{2}$ couvert.
A midi $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$	
A midi $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$	
A midi $\frac{1}{4}$	31 $\frac{1}{2}$	
A 1 heure	31 couvert.
A 2	30 $\frac{1}{2}$	
A 3	26 $\frac{1}{2}$	

OBSERVATION du 24 Juillet, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
<i>D.</i>		
A 8 heures.....	24 couvert.
A 9	28 $\frac{1}{2}$ nuages.
A 9	28 $\frac{1}{2}$ couvert.
A 9	30 nuages.
A 10	35 couvert.
A 10	35	
A 10	35	
A 10	35 $\frac{1}{2}$	
A 11	36 ferein.
A 11	36	
A 11	36	
A 11	36	
A midi.....	36 $\frac{1}{2}$ nuages.
A midi $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$	
A midi $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$	
A midi $\frac{1}{4}$	37	
A 1 heure	38 ferein.
A 2	37 $\frac{1}{2}$ nuages.
A 3	33 $\frac{1}{2}$	

OBSERVATION du 25 Juillet, jour de l'éclipse, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
<i>D.</i>		
A 8 heures.....	24 sercin.
A 9	32 $\frac{1}{2}$	
A 9	34	
A 9	33	
A 10	30 $\frac{1}{2}$	
A 10	30 $\frac{1}{2}$	
A 10	30 $\frac{1}{2}$	
A 10	30	
A 11	30	
A 11	30	
A 11	32 $\frac{1}{2}$	couvert. { Le vent a changé & s'est tourné au Sud.
A 11	34	
A midi.....	35	
A midi $\frac{1}{4}$	35	
A midi $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	
A midi $\frac{3}{4}$	37 $\frac{1}{2}$	
A 1 heure.....	36	
A 2	37 $\frac{1}{2}$ sercin.
A 3	36	

OBSERVATION du 26 Juillet, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
<i>D.</i>		
A 8 heures.....	24 couvert.
A 9	23	
A 9	23 $\frac{1}{2}$	
A 9	24	
A 10	25 $\frac{1}{2}$	
A 10	25 $\frac{1}{2}$	
A 10	25 $\frac{1}{2}$	
A 10	25 $\frac{1}{2}$	
A 11	26	
A 11	26	
A 11	26 couvert.
A 11	26	
A midi.....	26	
A midi $\frac{1}{4}$	26	
A midi $\frac{1}{2}$	26	
A midi $\frac{3}{4}$	26	
A 1 heure.....	26	
A 2	27	
A 3	26	

OBSERVATION du 27 Juillet, par un vent d'Est.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
<i>D.</i>		
A 8 heures.....	24 couvert.
A 9	26	couvert. { Le vent a changé & s'est tourné au Sud.
A 9 $\frac{1}{4}$	26	} couvert.
A 9 $\frac{1}{2}$	26	
A 10	25	couvert. { Le vent a changé & s'est tourné au Nord.
A 10 $\frac{1}{4}$	25	} couvert.
A 10 $\frac{1}{2}$	24	
A 10 $\frac{3}{4}$	23	
A 11	22 $\frac{1}{4}$	
A 11 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	} pluie.
A 11 $\frac{3}{4}$	22	
A 11 $\frac{1}{2}$	21	
A midi.....	19	
A midi $\frac{1}{4}$	19	
A midi $\frac{1}{2}$	19	} couvert.
A midi $\frac{3}{4}$	19	
A 1 heure.....	19 $\frac{1}{2}$	
A 2	21	
A 3	22 $\frac{1}{2}$	

OBSERVATION du 28 Juillet, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
A 8 heures.....	20	} couvert.
A 9	19	
A 9 $\frac{1}{4}$	19	
A 9 $\frac{1}{2}$	20	
A 10	25	
A 10 $\frac{1}{4}$	24	
A 10 $\frac{1}{2}$	23	
A 10 $\frac{3}{4}$	23	
A 11	22 $\frac{1}{4}$	
A 11 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	
A 11 $\frac{3}{4}$	22 $\frac{1}{4}$	} { Le vent a changé & s'est tourné à l'Est.
A 11 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	
A midi.....	22 $\frac{1}{4}$	
A midi $\frac{1}{4}$	22 $\frac{1}{4}$	
A midi $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	
A midi $\frac{3}{4}$	22 $\frac{3}{4}$	
A 1 heure.....	22	
A 2	18	
A 3	18	

L'inspection de ces tableaux fait voir que les variations de la chaleur, le 25, ont suivi le progrès de l'éclipse, & qu'à onze heures, temps à peu près de la plus grande phase, & où la diminution de la chaleur a été la plus forte, le thermomètre a été d'environ sept degrés plus bas que les 22 & 24 à la même heure, qui sont les seuls jours voisins de l'éclipse où le Ciel a été serein ; de sorte que la seule occultation de trois quarts du Soleil, diminue la chaleur de cet astre, par rapport à nous, de sept degrés. Il est inutile de comparer les degrés où le mercure du thermomètre est parvenu les autres jours, à la même heure, parce que le Ciel a toujours demeuré couvert, & que le temps étoit considérablement refroidi depuis l'éclipse.

L'on présenta au Soleil, au milieu de l'éclipse, un verre ardent de cinq pouces de diamètre ; les rayons réunis au foyer demeurèrent huit secondes à faire fumer du bois, & à la fin de l'éclipse, il ne fallut que trois secondes à ce même verre pour faire fumer le même bois.

J'observai aussi quelques variations dans le baromètre ; le mercure étoit, le 25 Juillet, au commencement de l'éclipse, à vingt-sept pouces sept lignes & demie ; au milieu, à vingt-sept pouces six lignes & demie ; & à la fin, à vingt-sept pouces six lignes : le vent qui étoit au Nord, changea & se tourna au Sud.

Tels sont les résultats des observations faites pour déterminer la diminution de la chaleur du Soleil, pendant son éclipse du 25 Juillet 1748. Je vais rapporter présentement ceux des observations faites pour connoître la diminution de la chaleur de cet astre, pendant l'éclipse du 8 Janvier 1750 : celle-là est arrivée au milieu de l'été, celle-ci au milieu de l'hiver.

Pour parvenir à l'éclaircissement de ce fait, je me suis servi de deux thermomètres ; l'un étoit chargé de mercure, & l'autre d'esprit de vin ; l'espace du premier, entre le terme de la congélation & celui de l'eau bouillante, étoit divisé en cent

parties égales; l'échelle du second étoit suivant les principes de M. de Réaumur.

J'exposai ces deux thermomètres au haut d'une tour; je les plaçai en dehors & à la face de cette tour, qui étoit éclairée des rayons du Soleil depuis son lever jusqu'à onze heures du matin; les variations & les changemens qui arrivent dans la température de l'air pendant l'hiver, & le grand froid qu'il faisoit au commencement de l'hiver, me firent craindre que je ne pourrois pas faire les observations que j'avois en vue. Le 5, le thermomètre à mercure étoit à 9 degrés au dessous du terme de la congélation, & celui à l'esprit de vin à 8 degrés $\frac{1}{2}$ au dessous du même terme; le 6, le temps s'étant adouci & fixé au beau, je commençai ces observations; je les continuai le 7, le 8, jour de l'éclipse, & les 9 & 10 qui furent les jours qui suivirent celui de l'éclipse; j'observai régulièrement, de quart-d'heure en quart-d'heure, les thermomètres: on verra le progrès de l'ascension & de l'abaissement des liqueurs dans les tables suivantes.

OBSERVATION du 6 Janvier 1750, par un vent d'Est-Sud-Est.			
HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	É T A T du C I E L.
	D.	D.	
A 7 heures $\frac{1}{4}$	— 2	— 2 sercin.
A 7	— 1	— 2	
A 8	× 1	× 0 $\frac{1}{2}$	
A 8	× 2 $\frac{1}{2}$	× 1	
A 8	× 3 $\frac{1}{2}$	× 2	
A 8	× 4	× 3	
A 9	× 5	× 4	
A 9	× 5	× 4 $\frac{1}{2}$	
A 9	× 6	× 5	
A 9	× 6 $\frac{1}{2}$	× 5 $\frac{1}{2}$	
A 10	× 7	× 6	
A 10	× 7 $\frac{1}{2}$	× 6 $\frac{1}{2}$	
A 10	× 7 $\frac{1}{2}$	× 6 $\frac{1}{2}$	
A 10	× 7 $\frac{1}{2}$	× 6 $\frac{1}{2}$	
A 11	× 8	× 7	

THERMOMÉTRIQUES. 605

OBSERVATION du 7 Janvier, par un vent d'Est-Sud-Est.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	É T A T du C I E L.
	<i>D.</i>	<i>D.</i>	
A 7 heures $\frac{1}{2}$ X 2 X 1	} serain.
A 7 $\frac{3}{4}$ X 2 X 1	
A 8 $\frac{1}{2}$ X 4 X 2	
A 8 $\frac{3}{4}$ X 7 $\frac{1}{2}$ X 6	
A 8 $\frac{1}{2}$ X 9 X 7	
A 8 $\frac{3}{4}$ X 10 $\frac{1}{2}$ X 9	
A 9 $\frac{1}{2}$ X 11 X 9	
A 9 $\frac{3}{4}$ X 11 X 9	
A 9 $\frac{1}{2}$ X 11 $\frac{1}{2}$ X 9 $\frac{1}{2}$	
A 10 $\frac{1}{2}$ X 12 X 10	
A 10 $\frac{3}{4}$ X 12 X 10	
A 10 $\frac{1}{2}$ X 12 $\frac{1}{2}$ X 10 $\frac{1}{2}$	
A 10 $\frac{3}{4}$ X 12 $\frac{1}{2}$ X 10 $\frac{1}{2}$	
A 11 X 12 $\frac{1}{2}$ X 10 $\frac{1}{2}$	

*OBSERVATION du 8 Janvier, jour de l'éclipse du Soleil,
par un vent d'Est-Sud-Est.*

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	É T A T du C I E L.
	<i>D.</i>	<i>D.</i>	
A 7 heures $\frac{1}{2}$ X 2 X 1	} serain. nuage.
A 7 $\frac{3}{4}$ X 2 X 1	
A 8 $\frac{1}{2}$ X 3 X 2	
A 8 $\frac{3}{4}$ X 5 $\frac{1}{2}$ X 4 $\frac{1}{2}$	
A 8 $\frac{1}{2}$ X 6 $\frac{1}{2}$ X 5	} serain.
A 8 $\frac{3}{4}$ X 6 X 5	
A 9 X 6 X 5	
A 9 $\frac{1}{4}$ X 6 $\frac{1}{2}$ X 5 $\frac{1}{2}$	
A 9 $\frac{1}{2}$ X 7 X 6	
A 9 $\frac{3}{4}$ X 9 $\frac{1}{2}$ X 8	
A 10 $\frac{1}{2}$ X 11 X 9 $\frac{1}{2}$	
A 10 $\frac{3}{4}$ X 11 X 10	
A 10 $\frac{1}{2}$ X 11 $\frac{1}{2}$ X 10	
A 10 $\frac{3}{4}$ X 11 $\frac{1}{2}$ X 10 $\frac{1}{2}$	
A 11 X 12 X 10 $\frac{1}{2}$	

OBSERVATION du 9 Janvier, par un vent d'Est-Sud-Est.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	É T A T du C I E L.
	D.	D.	
A 7 heures $\frac{1}{2}$X 4X $2\frac{1}{2}$ brouillards.
A 7 $\frac{3}{4}$X 4X $2\frac{1}{2}$	
A 8 $\frac{1}{2}$X 4X $2\frac{1}{2}$	
A 8 $\frac{3}{4}$X 4X $2\frac{1}{2}$	
A 8 $\frac{1}{2}$X 4X $2\frac{1}{2}$	
A 8 $\frac{3}{4}$X $4\frac{1}{2}$X $2\frac{1}{2}$	
A 9 $\frac{1}{2}$X 5X 3	
A 9 $\frac{3}{4}$X $5\frac{1}{2}$X $3\frac{1}{2}$	
A 9 $\frac{1}{2}$X 6X 4	
A 9 $\frac{3}{4}$X 6X 4	
A 10 $\frac{1}{2}$X 6X $4\frac{1}{2}$	
A 10 $\frac{3}{4}$X 7X 5	
A 10 $\frac{1}{2}$X 7X 5	
A 11 $\frac{1}{2}$X 8X 6	

OBSERVATION du 10 Janvier, par un vent d'Est-Sud-Est.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	É T A T du C I E L.
	D.	D.	
A 7 heures $\frac{1}{2}$X 4X 3 couvert.
A 7 $\frac{3}{4}$X 4X 3	
A 8 $\frac{1}{2}$X 4X 3	
A 8 $\frac{3}{4}$X $4\frac{1}{2}$X $3\frac{1}{2}$	
A 8 $\frac{1}{2}$X 5X $3\frac{1}{2}$	
A 8 $\frac{3}{4}$X 5X $3\frac{1}{2}$	
A 9 $\frac{1}{2}$X $5\frac{1}{2}$X $3\frac{1}{2}$	
A 9 $\frac{3}{4}$X 5X 4	
A 9 $\frac{1}{2}$X 6X 4	
A 9 $\frac{3}{4}$X 6X 4	
A 10 $\frac{1}{2}$X $6\frac{1}{2}$X $4\frac{1}{2}$	
A 10 $\frac{3}{4}$X 7X 5	
A 10 $\frac{1}{2}$X 8X 6	
A 10 $\frac{3}{4}$X 8X 6	
A 11 $\frac{1}{2}$X $8\frac{1}{2}$X 6	

Les variations de la chaleur, le 8, ont suivi les progrès de l'éclipse, & vers les neuf heures du matin qu'arriva à peu près le milieu de l'éclipse, la diminution de la chaleur fut la plus forte.

Cette plus forte diminution de la chaleur, causée par l'occlusion de près des trois quarts du disque du Soleil, fut de 5 degrés suivant le thermomètre à mercure, & de 4 degrés suivant le thermomètre à l'esprit de vin. Le 8, à neuf heures du matin, la liqueur du premier ne parvint qu'au sixième degré, & celle du second au cinquième; tandis que le 7, à la même heure, qui est le jour le plus voisin de celui de l'éclipse qu'on puisse lui comparer, le mercure étoit monté à 11 degrés, & l'esprit de vin à 9 degrés. Il paroît que cette différence n'a été occasionnée que par l'éclipse, & qu'elle ne provient pas de la température de l'air, puisque les deux jours dont on compare les observations, étoient également sereins, & que la liqueur des thermomètres se trouva, avant & après l'éclipse, aux mêmes degrés.

L'observation du 13 sert encore à le prouver : ce jour-là, qui étoit serein à neuf heures du matin, le mercure étoit à 11 degrés $\frac{1}{2}$, l'esprit de vin à 10 degrés. Il est à remarquer que le 9, par un temps de brouillards & calme, la liqueur du thermomètre parvint, vers les neuf heures du matin, environ aux mêmes degrés qu'elle étoit parvenue le jour de l'éclipse.

La hauteur du mercure, dans le baromètre, a été, le 6 Janvier, à vingt-sept pouces onze lignes; les 7, 8 & 9, à vingt-sept pouces huit lignes & demie, & le 10, à vingt-sept pouces onze lignes & demie : le vent d'Est-Sud-Est souffla pendant ces jours.

ARTICLE TROISIÈME.

Observations pour établir le rapport des degrés du thermomètre exposé à l'air intérieur de différentes grottes, aux degrés du thermomètre exposé à l'air extérieur.

MALGRÉ les grands progrès qu'a faits la Physique, elle n'a pas pu parvenir encore à détruire, dans le pays des grottes, une de ses anciennes chimères, la fameuse antipéristase. C'est à la prétendue chaleur des caves en hiver, & à leur froideur en été, qu'elle doit en partie sa naissance; trompés par leurs sensations, les habitans du pays des grottes continuent à croire qu'elles sont, ainsi que les caves, froides en été & chaudes en hiver, & ils soutiennent cette opinion avec d'autant plus de confiance, qu'elles leur paroissent telles; mais elles peuvent le leur paroître & pourtant ne l'être pas. Les grottes, quoique chaudes en hiver & froides en été, par rapport à nous, sont en effet plus froides en hiver qu'en été; la raison de cette contradiction apparente, est que les changemens alternatifs du froid & du chaud, n'étant ni aussi prompts ni aussi considérables dans les creux de la terre, que sur sa surface & dans l'atmosphère, ils sont plus chauds en hiver & plus froids en été que l'air extérieur; mais ils sont réellement plus chauds en été qu'en hiver, s'il y a dans leurs degrés de chaleur & de froideur quelque différence sensible en ces deux saisons.

Juger de la température des grottes & la comparer à celle de l'atmosphère, par le ministère des sens, c'est s'exposer à l'erreur, parce que le plus souvent ils en font des rapports infidèles. Le meilleur juge en cette matière, celui qui juge du chaud & du froid plus sainement que nos organes, est sans contredit le thermomètre; c'est cet instrument à l'esprit de vin, gradué selon la méthode de M. de Réaumur, que j'ai employé pour connoître la température de l'air de quelques grottes des Provinces méridionales de la France, dont j'ai
donné

THERMOMÉTRIQUES. 609

donné la description dans d'autres Mémoires ; & pour établir le rapport de cette température à celle de l'air extérieur ; j'expose ici le tableau des observations faites à ce sujet.

N O M S des G R O T T E S.	J O U R S , M O I S & A N N É E S.	T H E R M O M È T R E S dans L E S G R O T T E S.	T H E R M O M . à L ' A I R L I B R E.
		<i>D.</i>	<i>D.</i>
Roquefort en Rouergue.....	28 Septembre 1752.	Caves supérieures, 7 Caves inférieures, 5 14
	9 Octobre.. 1753.	Caves supérieures, 6 Caves inférieures, 4 $\frac{1}{2}$ 11
Lombrive en Foix.....	10 Septembre 1765.	Grottes supérieures, 12 Grottes inférieures, 9 21
Bedeilhac en Foix.....	12 Mai..... 1765. 8 20
Saint-Dominique en Languedoc.	15 Mars..... 1753. 6 11
	8 Février... 1767. 4 10
Minier des Isles en Rouffillon..	12 Août.... 1767. 14 29
	20 Août.... 1767. 18 25
	9 Septembre 1767. 16 21
Sournia en Languedoc.....	17 Janvier .. 1769. 4 8
	21 Février.. 1769. 3 12
	17 Juin.... 1769. 11 24
	28 Août.... 1769. 15 28
Senones en Rouergue.....	10 Novembre 1754. 10 13
	19 Décembre 1754. 6 10
	11 Février... 1755. 3 $\frac{1}{2}$ 11 $\frac{1}{2}$
	14 Mai..... 1755. 8 19 $\frac{1}{2}$
Corte-Rouge en Rouergue...	25 Avril.... 1753. 8 18
Labalme en Dauphiné.....	12 Juillet... 1753. 11 23
 10 18
M O Y E N S.....	<i>D.</i> 8 $\frac{11}{15}$	<i>D.</i> 17 $\frac{7}{10}$

Ces observations font voir que la liqueur du thermomètre exposé dans les grottes , éprouve des variations comme celle du thermomètre exposé à l'air libre ; il est vrai que ces

Tome X.

H h h h

variations ne sont pas aussi promptes ni aussi considérables, parce que les changemens de la température de l'air, dans les grottes, n'y sont pas, à beaucoup près, si grands; mais tels qu'ils sont, ils suffisent pour faire hausser ou baisser la liqueur du thermomètre qui y est exposé; lorsque celle du thermomètre exposé à l'air libre hausse ou baisse, pour la faire monter en été & descendre en hiver, comme dans les autres lieux, plus ou moins, selon que la communication entre l'air intérieur & l'air extérieur est plus ou moins grande.

Les mêmes observations font voir que les plus grandes élévations de la liqueur du thermomètre dans les grottes, ont été pendant les mois d'Août & Septembre, & les plus grands abaissemens pendant les mois de Janvier & Février; d'où l'on pourroit inférer, que le plus grand chaud des grottes est à la fin de l'été, & le plus grand froid à la fin de l'hiver. Il est d'autant plus naturel de le penser, que les grottes ne s'échauffent & ne se refroidissent que lentement, à cause du peu de communication qu'il y a entre l'air intérieur & l'air extérieur. Si cette idée étoit vraie, la température moyenne de l'air, dans les grottes, seroit aux mois de Juin & de Novembre, parce que le chaud n'y a pas pénétré au mois de Juin, & que le froid n'y a pas pénétré non plus au mois de Novembre. Les observations du thermomètre dans les grottes, que j'ai rapportées, semblent favoriser cette opinion.

Le plus ou moins de communication de l'air intérieur des grottes, avec l'air extérieur, fait qu'elles sont plus ou moins chaudes, plus ou moins froides, selon que les grottes offrent plus ou moins d'ouvertures & d'issues à leur extérieur, & qu'elles sont plus ou moins profondes. Il est certain que plus les grottes seront profondes, & plus les changemens du chaud & du froid y seront moindres. On peut même conjecturer qu'ils deviendront nuls à une certaine profondeur. Les caves de l'Observatoire, où le thermomètre de M. Amontons se soutient toujours au cinquante-quatrième degré, & celles des maisons,

dans les Provinces méridionales, qui sont un peu profondes; assez fermées, & dans lesquelles il règne en tout temps la même température de l'air, en fournissent la preuve.

D'après les observations exposées dans le tableau ci-dessus la température moyenne de l'air des grottes est de 8 degrés $\frac{11}{17}$ de degré, & celle de l'atmosphère de 17 degrés $\frac{7}{20}$ de degré; le rapport de ces moyens est comme celui de 9 degrés $\frac{91}{100}$, à 19 $\frac{91}{100}$, ou, pour le réduire à de plus petits termes, comme 1 est à peu près à 2. Il suit de là, que la chaleur de l'air extérieur est presque double de celle de l'air intérieur.

Mais pour fixer ce rapport d'une manière plus précise, il faut avoir plus d'observations que nous n'en avons; il est même nécessaire d'en avoir de plusieurs années, des différentes saisons, & des grottes des divers pays de la terre, parce que l'état de l'atmosphère éprouve chaque année différens changemens, & qu'il est diversement modifié dans chaque pays, dans chaque grotte. Quand on en aura une ample provision, on établira par leur comparaison le rapport qu'ont ensemble la constitution de l'air intérieur des grottes, & celle de l'air extérieur; si les grottes sont toujours plus chaudes ou plus froides que l'air du même nombre de degrés, ou de combien elles le sont plus en différens temps; quelles sont les limites de leurs inégalités, & quels effets peuvent produire les plus grands excès. Ces connoissances ne peuvent pas manquer d'être d'une grande utilité, sur-tout à ceux destinés aux travaux des mines, des carrières, des caves, des puits, enfin des lieux souterrains, d'où trop souvent il s'élève des vapeurs malignes qui leur sont si funestes. Elles serviront à déterminer le degré de communication entre l'air intérieur & l'air extérieur qu'il sera nécessaire d'établir pour dissiper ces vapeurs meurtrières, & empêcher leurs pernicieux effets.

J'ai fait encore des observations, pour connoître le rapport des degrés du thermomètre exposé à l'air, à ceux du thermomètre

H h h h ij

placé à différentes profondeurs de différentes terres, de terres grasses, de terres sablonneuses, des terres argileuses, des terres salées. Comme je me propose de les répéter, de les multiplier, & de les étendre à d'autres terres d'une qualité différente, je n'en rendrai compte que lorsque j'en aurai une certaine provision; alors un plus grand nombre de ces observations fournira un plus grand nombre de rapports, & assurera davantage les résultats.





PREMIER MÉMOIRE
SUR
L'IMPRESSION EN LETTRES,
SUIVI
DE LA DESCRIPTION
D'UNE NOUVELLE PRESSE.

Par M. ANISSON le fils.

Lu à l'ACADÉMIE, le 3 Mars 1783.

L'ART de l'Imprimerie, sans lequel toutes les productions de l'esprit humain périssent, cet Art le plus utile de tous, est encore au berceau : la vérité de cette proposition perce tous les jours à travers les efforts de notre Nation & des Étrangers. Quel qu'en soit l'Auteur, je n'en admire pas moins la profondeur de son génie : il en falloit sans doute bien plus pour créer cet Art, que pour le perfectionner. Mais pourquoi,

au milieu du progrès de tous les autres , celui-ci seul resteroit-il en arrière ? Craignons d'être plus long-temps coupables en différant de suivre les traces qui ne nous sont encore qu'indiquées ; & puisque ma Patrie ne peut disputer à d'autres le titre incertain d'avoir donné naissance à cet Art ingénieux , qu'elle ne puisse du moins partager celui de l'avoir , la première , porté au plus haut point de perfection. Je sens tout le fardeau de cette obligation ; mais la faveur qui m'est accordée aujourd'hui me donne le courage de l'entreprendre. Je mettrai sous les yeux de l'Académie le Journal exact de mes opérations ; elle voudra bien m'aider dans mes travaux , rectifier mes erreurs , éclaircir mes doutes , favoriser mes expériences , & me permettre d'en soumettre le résultat à ses lumières.

Examinons donc tout ce qui peut contribuer à la plus grande perfection typographique d'un Livre , telle qu'on la peut concevoir & désirer , & suivons tous les différens degrés de son exécution.

LA MAIN-D'ŒUVRE LA PLUS PARFAITE DU TYPOGRAPHE. Sous cette dénomination technique & générale , sont comprises *la forme des lettres , la taille & la trempe des poinçons , la frappe des matrices , leur justification pour la ligne & l'approche , la construction du moule , la précision minutieuse à le remettre ; la fonte des caractères , leur apprêtage ; LA COMPOSITION , L'IMPOSITION , LA CORRECTION ; LE PAPIER , son apprêt avant & après être imprimé ; L'ENCRE , & enfin L'IMPRESSION.*

Tous ces différens articles contribuent ensemble & séparément à la perfection de l'Art , & peuvent former chacun la matière d'un Mémoire particulier ; mais celui que je me propose de traiter ici , est *l'impression* envisagée relativement à l'opération de la Presse.

Cet instrument , dont la première invention fait tant d'honneur à son Auteur , est vicieux presque en tous points ;

voilà ce que je me propose de démontrer. Croiroit-on que la Presse de nos jours est encore celle des premiers temps de l'Imprimerie ? Je ne chercherai pas à rappeler la description de cette Presse si amplement & si vaguement décrite ailleurs. Lorsque j'ai voulu y puiser les premières notions d'un Art que j'ai depuis si fort approfondi, je m'attendois à y voir développées les vûes de l'Inventeur, qui n'y sont pas même pressenties ; j'y ai cherché en vain l'analyse des causes & des effets ; je n'y ai trouvé qu'une description purement mécanique, & tout autre que celle qu'on devoit attendre d'un Dictionnaire raisonné des Sciences & des Arts. Je ne parlerai donc de la Presse ancienne, que lorsque je serai obligé de comparer les rapports de ses parties avec celles de la mienne, pour rendre raison de la différence des résultats, tant du côté de la perfection, que de la promptitude de l'exécution ; effets l'une & l'autre de la construction de la Presse que je vais décrire, & qui est diamétralement opposée à l'ancienne dans les choses essentielles.

Produire l'impression qui approche le plus de l'empreinte du poinçon enfumé.

Voilà le problème qui a dû faire l'objet des recherches de tous ceux qui ont approfondi l'Art de l'Imprimerie ; non résolu par un chef-d'œuvre, fruit pénible & peu utile de soins laborieux & du temps. La gloire n'en doit-elle pas plutôt appartenir à celui qui, réunissant ces mêmes soins, a su trouver dans le mécanisme de l'instrument, le moyen de perfectionner la main-d'œuvre, & d'en multiplier les résultats au point de les mettre à la portée de tout le monde ?

La solution du problème énoncé ci-dessus dépend de la réunion d'une infinité d'objets différens, qui concouroient en vain à la perfection générale, sans la Presse qui peut seule la produire & l'achever. Aussi je me suis attaché principalement à rendre son action & ses mouvemens le plus indépendans qu'il m'a été possible, du maniement déréglé des Ouvriers auxquels elle est confiée.

La Presse qui fait depuis longues années l'objet de mes recherches & de mes travaux, imprime en un seul coup. On verra ci-après les différens avantages qui en résultent, ainsi que les motifs qui ont obligé jusqu'à présent à partager son opération. Mais quoique ce genre de construction, qui auroit dû être celui de la Presse, dès sa première invention, soit déjà commun à d'autres pour lesquelles il a été adopté avec succès : celle-ci en diffère principalement par les moyens faciles & précis dont on se sert pour régler la pression ; par le parallélisme exact des pièces qui y concourent ; par l'invariabilité absolue de la platine ; par la justesse de toutes ses pièces, dont le mouvement est si doux, qu'il ne produit aucun bruit ; & enfin par sa base assez solide, pour n'avoir besoin d'être soutenue par aucun étauçon. La Presse ordinaire ne peut imprimer le papier dit *carré*, & le *grand raisin*, qui est la grandeur au dessus, qu'en deux fois ; la mienne imprime le *carré*, le *grand raisin*, & le *grand Jésus* en un seul coup, avec deux fois moins de force ; de là naît une expédition plus prompte du double, & la peine pour l'Ouvrier deux fois moindre.

L'opération de la Presse d'Imprimeur en lettres consiste à transporter sous une platine la forme ou châssis, ainsi que la feuille de papier, & à donner à celle-ci une empreinte égale des caractères composés & disposés en pages. Mais la hauteur des lettres ou caractères, ou, en termes de l'Art, ce que nous appellerons dorénavant la *hauteur en papier*, étant ou devant être toujours supposée uniforme, il falloit établir un parallélisme parfait entre les pièces qui concourent à la pression que reçoivent ces caractères. Or il n'est que trop prouvé que c'est par cette base fondamentale que pèche la Presse ordinaire ; il est aisé d'en juger par l'inspection de celle qui passe pour la plus parfaite, par le vacillement sensible de la platine, & enfin par les *hausses* inévitables & inévitables sur le tympan & sur la trisquette. Ce terme est le terme sacré de l'Art de l'Imprimeur, c'est ce qui constitue son mérite. Tout Pressier qui fait bien
mettre

mettre des hausses est habile Ouvrier, & c'est à peu près à cela que se réduit l'apprentissage d'un Art dans lequel on peut apprendre tous les jours. Mettre des hausses & des supports, n'est donc autre chose que de rétablir d'une manière toujours imparfaite, & à grande perte de temps, le parallélisme entre les pièces comprimantes & comprimées; & s'il y a des Ouvriers qui y réussissent, il y auroit cependant de l'injustice à leur refuser quelque mérite.

D'après ces données, il y avoit deux grandes difficultés à vaincre; conserver toujours un parallélisme parfait, & parer aux inconvéniens du jeu que peuvent acquérir des pièces qui se frottent & se compriment six mille fois par jour.

Je me suis efforcé, & je crois avoir réussi à donner à celles-ci la solidité & l'invariabilité que je pouvois désirer; j'en ai trouvé les moyens dans la dureté des matières, dans leur combinaison, dans la justesse & la perfection des pièces, dans leur bonne proportion.

L'objet de ce Mémoire étant de mettre sous les yeux de l'Académie les maux résultans des parties vicieuses de la Presse, avec la comparaison des moyens que j'ai employés pour y remédier, je pense que ce seroit abuser de l'indulgence & des momens précieux qu'elle veut bien m'accorder, que de détailler ici la description de l'un & l'autre instrument. Je crois pouvoir y suppléer en parlant seulement des pièces principales, de l'influence qu'elles ont sur la perfection de l'exécution, & de la différence de leur construction dans l'une & l'autre Presse.

Le *Sommier*, l'*Écrou*, la *Vis*, la *Platine*, le *Marbre*, sont les pièces essentielles de la Presse; ce sont cependant ces pièces dont la construction & les opérations tendent toutes à des résultats vicieux.

Dans la Presse ordinaire, la vis qui presse sur la platine, & celle-ci, qui y est attachée, font une révolution de dix lignes.

Cette grande résolution y est nécessitée & opérée par l'effet du barreau que l'Ouvrier est obligé d'aller chercher contre la jumelle, où il doit s'en retourner, pour que le coffre puisse s'échapper de dessous la platine, & que le tympan & la frisure puissent se développer. Or l'Ouvrier, en amenant à lui le barreau, décrit un arc d'environ cent degrés, ce qui par conséquent fait descendre, de dix lignes, la platine, sur laquelle la vis appuie; mais la platine n'est éloignée de dessus la forme, avant l'impression, que de quatorze lignes; & les garnitures du tympan ayant une épaisseur que la pression peut diminuer, mais jamais anéantir, il faut donc que l'excédent de la descente de la vis, nécessitée par la course du barreau, sur l'espace compris entre la platine & la forme, abstraction faite de l'épaisseur irréductible des étoffes, se distribue quelque part, ce qui se fait par la liberté qu'on a dû laisser au sommier ou écrou de la vis de remonter; mais cette liberté a dû être restreinte, sans quoi tout l'effort se seroit porté du côté où la résistance auroit été nulle, & la platine n'auroit pas descendu suffisamment pour imprimer. Pour cet effet, il a fallu contrarier l'ascension du sommier des deux côtés, par des corps élastiques, de la combinaison desquels avec la résistance des garnitures du tympan, il est par conséquent visible que dépend le plus ou le moins de foulage ou d'impression, que la platine exerce sur la forme. Mais ces corps élastiques le sont inégalement; ce sont des morceaux de feuilles de carton ou de chapeau, plus ou moins denses & épais, & qui ne peuvent recevoir ou rendre une résistance égale, que par l'effet du hasard. Premier vice donc de parallélisme dans le sommier, qui faisant incliner la vis, la fait appuyer inégalement sur la platine, change par conséquent le parallélisme de celle-ci, & fait souvent casser ou égrener le pivot. De plus, la tige d'en bas de la vis, qui presse par un pivot très-pointu sur le soi-disant centre de la platine, est fort longue; cette platine, autrefois attachée & maintenue par des cordes, ne l'est encore que par des chaînes ou des crampons; aussi éprouve-t-elle, dans les Presses les mieux faites, une variation sensible au tact & même à l'œil,

& d'autant plus forte que nous avons vu ci-dessus que sa course ou révolution étoit fort étendue, & nécessitée par celle du barreau. Deuxième vice qui, procurant à la platine un mouvement rétrograde & multiplié, produit souvent des lettres doubles & frisées.

Dans ma Presse, j'ai évité ces deux inconvéniens, & voici les moyens dont je me suis servi. J'avois pour donnée indispensable l'arc que doit décrire le barreau, depuis la jumelle d'où il part, pour arriver au point de force de l'Ouvrier, & s'en retourner à la jumelle après la pression; mais cet arc, comme on l'a vu ci-dessus, faisant faire à la vis & à la platine une course fort étendue, j'avois en même temps une autre donnée absolument opposée, c'étoit de restreindre & de déterminer, à peu de chose près, la descente de la platine, à l'étendue nécessaire pour presser suffisamment. Pour y parvenir, j'ai imaginé une vis avec deux pas, l'un en haut & l'autre en bas, inclinés de manière que lorsque la vis descend de dix lignes, la platine qui y est attachée ne descende néanmoins que d'un peu plus de trois lignes; alors toute la descente que j'ai fixée à ma platine, tourne à ma volonté, au profit de la pression; d'autant plus que la platine n'est éloignée de la lettre, avant la pression, que de l'espace nécessaire pour y introduire le matbre, chargé de sa forme recouverte du tympan & de sa frisquette. Dans cette hypothèse, le sommier est immobile; car la mobilité du sommier n'ayant été imaginée que pour faire évanouir l'excédent du foulage ou de la pression, que la grande révolution de la vis & de la platine produisent dans la Presse ordinaire, où elles montent & descendent de dix lignes; cette mobilité ne peut avoir lieu ici, où la révolution de la platine est déterminée au degré juste & nécessaire pour opérer une pression suffisante. Pour fixer le sommier, on introduit dans les mortaises des jumelles, des femelles de bois qui portent sur les tenons du sommier, & sont eux-mêmes comprimés par la vis d'en-haut. Je me suis cependant réservé la faculté de pouvoir rendre le sommier mobile, ce

qui peut être nécessaire dans des ouvrages qui exigent plus ou moins de pression; mais pour remédier à l'irrégularité de densité des corps qu'on est obligé d'employer, j'ai imaginé deux grosses vis qui, traversant les jumelles par le bout d'en-haut; compriment à volonté ces mêmes corps, en graduant leur densité & résistance à volonté: ainsi le sommier conserve toujours le parallélisme le plus exact; & pour rendre les frottemens plus doux, ses mortaises, ainsi que les arrasemens des jumelles, sont armées de plaques de cuivre & d'acier.

S O M M I E R
ou
É C R O U
d'en-haut.

J'ai brisé aussi en deux parties le sommier d'en-haut où est contenu l'érou; ces deux parties s'assemblent, se lient & se resserrent par huit gros boulons, pour être assuré qu'il ne travaillera pas continuellement comme les autres qui finissent souvent par se gerfer, se fendre & s'éclater. C'est ainsi que je crois avoir paré aux inconvéniens qui peuvent résulter du travail du bois, & du jeu qu'occasionnent les frottemens réitérés.

É C R O U
d'en-bas.

L'érou des pas de la vis d'en-bas est terminé par une base de huit pouces & demi en carré, aux quatre coins de laquelle est attachée, par de fortes vis, la platine. J'ai donc une pression opérée par une surface d'un demi-pied carré, au lieu d'un seul point, & il est aisé de juger laquelle doit avoir la préférence. Cet érou offre extérieurement quatre faces carrées, sur lesquelles il est assujetti par une moise de bois, armée d'une bête d'acier, sur laquelle s'opèrent les frottemens; cette moise est brisée en deux & susceptible d'être ressermée par quatre gros boulons à érou, à mesure que les frottemens procureroient du jeu; elle butte des deux côtés contre les jumelles, par deux mentonnets dans un sens, & y est assujettie dans l'autre par deux clefs. Par ce moyen, j'ai procuré à ma platine une invariabilité absolue, & son parallélisme, avec celui du sommier, supposés parfaits, ne peuvent plus changer.

Il ne suffisoit pas de proscrire les hausses dont on a vu ci-dessus l'usage & les inconvéniens; il falloit encore bannir

les supports, autre pratique non moins vicieuse. Elle a toujours pour base le parallélisme imparfait des pièces comprimées & comprimantes ; mais même , en supposant ces parties aussi parfaitement parallèles qu'on le peut désirer , les supports ont encore pour objet de diminuer le foulage excessif des lettres isolées , & de remédier au porte-à-faux de la platine ; telles sont les bordures des pages , les *folio* , *signatures* , *réclames* , *titres courans* , &c. Ce point de difficulté est la pierre de touche qui sert à juger du talent de l'Ouvrier ; c'est cette grande difficulté qui jusqu'ici n'a été vaincue , exclusivement à tous autres , que par le seul & célèbre Artiste de *Birmingham* ; les autres , ceux mêmes qui tout récemment se sont distingués par leurs efforts dans l'Art de l'Imprimerie , ont tous échoué à cet écueil. Les caractères ont sur les garnitures qui les contiennent , une saillie suffisante , pour que l'encre dont on les empreint n'en touche que l'œil ; cette saillie , d'environ deux lignes , a lieu dans les bordures des pages , dans les *alinea* , & dans tous les endroits où il y a des blancs. Jusqu'ici on n'est parvenu à remédier qu'à quelques-uns de ces défauts les plus apparens , & l'on en a cherché les moyens dans des supports que l'on a appliqués à la frisure , aux endroits qui correspondent aux vides : on en voit souvent des traces trop apparentes dans le bas des pages.

Le moyen que j'ai employé est bien simple , & j'en ai obtenu le succès le plus complet ; ma frisure porte , à peu de chose près , l'épaisseur du vide que produit la saillie des caractères , & j'ai eu soin de rendre cette saillie uniforme , en réduisant à une hauteur égale , les garnitures , espaces & quadrats employés pour les blancs. Par ce moyen , tout ce qui est vide est rempli pendant la pression , & ce qui est plus élevé est soutenu assez modérément pour donner lieu à tout le foulage que l'on peut désirer. LA FRISURE.

Le coffre des Presses ordinaires n'est autre chose qu'un *marbre* de pierre encastré dans un cadre de bois ; à ce coffre sont adaptés huit , quelquefois dix crampons de cuivre , qui. LE COFFRE.

par leurs degrés différens de dureté, par leur épaisseur différente, ou n'ont jamais porté également, ou cessent bientôt de frotter à mesure qu'ils s'usent; ces crampons glissent sur deux tringles de fer poli, en dos d'âne; le tout roule assez légèrement, ce que l'on ne peut attribuer qu'à la légèreté du coffre, dont les matières & la construction, en foulageant l'Ouvrier, tournent au détriment de l'ouvrage. Mon coffre est composé d'un marbre de cuivre de dix lignes d'épaisseur, enchâssé dans un châssis de fer de vingt-six lignes de large. Au châssis sont adaptées trois bandes de cuivre recroui, dans lesquelles sont évidées trois portées pointues de neuf lignes de long, ce qui fait neuf points de frottement disposés en cône évidé, & qui glissent dans trois barres d'acier, qui ont la même forme en creux; mais de manière que les frottemens ne s'opèrent que dans le fond & nullement sur les parties latérales. Les tringles d'acier sont enchâssées & portées dans de fortes traverses de bois de toute leur longueur, qui sont elles-mêmes unies par une autre traverse, en sens contraire, & soutenues au centre & à une extrémité, par de fortes colonnes, & de l'autre bout sur la plate-forme.

FAUX TYMPAN.

Les tympans sont ordinairement revêtus d'un parchemin collé, & servent à toute sorte d'ouvrages, jusqu'à ce que la vétusté les fasse supprimer; mais cette pratique est vicieuse, en ce que les pages & les lettres y font bientôt une telle impression, qu'on est obligé, lorsque l'on change de forme, d'en faire disparaître ce que les Ouvriers appellent le foulage. Pour y parvenir, on l'humecte jusqu'à ce qu'il redevienne uni; aussi conserve-t-il long-temps une fraîcheur excessive qu'il communique au papier, & il lui fait recevoir une teinte trop forte, disproportionnée avec celle de la veille; autre cause d'inégalité dans la teinte. Pour y remédier, j'ai imaginé un cadre d'une épaisseur égale à une finquette mince; je le recouvre d'un velin, & je le rends adhérent au cadre du tympan, par les mêmes boulons & vis qui lui sont nécessaires, & qui les traversent tous deux. Lorsque le foulage est trop fort, il est

facile d'en changer, en ayant multiplié le nombre, ainsi que celui des friséquettes.

Il ne me reste plus à parler que du grand tympan, qui *GRAND TYMPAN.* ne diffère des autres que par sa charnière d'une seule pièce, prolongée d'un bout à l'autre dans la longueur de vingt-trois pouces. Tous les charnons en ont été pris dans la masse, & forés comme un canon de fusil; par ce moyen, le tympan n'éprouve aucune espèce de variation. Il est facile de s'en convaincre par l'expérience d'une même feuille, tirée plusieurs fois de suite impunément; tandis que sur les autres Presses, la même feuille ne peut pas être imprimée une seconde fois sans doubler. Une telle expérience prouve tellement la justesse de l'instrument, que pour en obtenir le succès, il faut que neuf à dix mille lettres se trouvent rigoureusement recouvrir chacune son empreinte. Cette expérience, que je me propose de faire sous les yeux des Commissaires que l'Académie voudra bien nommer, est un défi que je ne crains pas de proposer à toutes les Presses d'Imprimerie qui existent en ce moment.

La charnière décrite précédemment est assujettie au coffre *LA CHARNIÈRE.* par cinq boulons, à l'aide desquels je me suis ménagé la possibilité de la remonter ou de la descendre de deux lignes, n'ayant pas été certain que la situation où elle est fixée dans les autres Presses fût la meilleure. Dans celles-ci, les charnières du tympan sont engagées dans les cornières du coffre, ou même en font tellement partie, qu'elles entraînent leur destruction si on veut y changer quelque chose.

Je finirai en mettant sous les yeux de l'Académie les premiers essais de cet instrument, exécutés sur ce même papier vélin de France, qui lui a été présenté il y a quelque temps par le sieur Réveillon, & dont on doit la seule & première invention à ses soins & à son intelligence. J'espère qu'elle voudra bien les accueillir avec indulgence, en faveur des efforts que j'ai faits pour mériter son suffrage. Le succès de cet

essai, qui a presque entièrement répondu à mon attente, me laisse encore, entre autres, à désirer la perfection de l'encre; sa composition étant bien moins du ressort de la partie des Sciences à laquelle je me suis appliqué, je supplie l'Académie de vouloir bien venir à mon secours pour cet objet, en recommandant à ceux de ses Membres qui s'occupent de la Chimie, la recherche d'une encre dont je donnerai les conditions, telle enfin que je la désire, & telle que l'ont employée autrefois les Aldes, les Badius, les Étiennes, & plus récemment les Foulis de Glasgow.

Telle est la Presse dont je m'occupe depuis si long-temps; & dont je ne dois le succès qu'à beaucoup de travaux, d'erreurs & de dépenses. Si la description que je viens d'en présenter à l'Académie a pu l'intéresser, je désire qu'elle veuille bien nommer des Commissaires, qui, après l'avoir examinée, puissent lui en rendre compte. Son suffrage ne contribuera certainement pas peu à déterminer à ordonner d'en construire de pareilles; alors les seules Presses du Louvre cesseront de *gémir*; cette expression figurée de notre langue, deviendra bientôt aussi caduque que l'objet qui lui a donné naissance; & je m'applaudis d'avance que la confiance dont le Roi & le Ministre m'honorent, me mette à portée d'en consacrer les premiers travaux à propager & perpétuer plus dignement les véritables monumens des Sciences.



*EXTRAIT DU RAPPORT fait à l'Académie
Royale des Sciences, le 17 Mai 1783.*

M. le Président de Saron, M. le Duc de la Rochefoucauld, & MM. de Fouchy, le Roy, l'Abbé Rochon & Desmarest, nommés par l'Académie Royale des Sciences, pour examiner la nouvelle Presse qui lui a été présentée par M. Anisson le fils, Directeur de l'Imprimerie Royale, ont jugé que cet instrument mérite ses éloges & son approbation, comme contribuant par des moyens nouveaux & ingénieux, à perfectionner l'Imprimerie.

Ces moyens sont :

1.^o Le système suivi dans la construction du sommier & de l'écrou qu'il porte. Par cette construction, la vis de la nouvelle Presse peut prendre & conserver une situation verticale, constamment la même pendant sa révolution.

2.^o La vis qui, au lieu de se terminer en pointe par la partie inférieure, y porte des pas à trois filets, qui jouent dans un écrou fixé à la platine.

3.^o La moise qui, s'opposant à tout déplacement latéral de la platine, dirige & maintient son mouvement dans la ligne verticale.

4.^o Et c'est ici un des points de réforme qui paroît le plus important aux Commissaires, les vis & les supports, élastiques ou durs, qui assujettissent le sommier, en règlent les effets à volonté, & par conséquent conservent toujours très-exactement son parallélisme, lorsqu'il descend & qu'il remonte.

5.^o (Sans s'arrêter aux avantages qui peuvent naître, soit de la forme ou de la matière du marbre & de son châssis, soit de la manière dont ils roulent), la stabilité du plan sur lequel pose le coffre au moment de la pression, & dont l'assiette est invariable sous l'effort de la platine.

6.^o La disposition particulière du tympan, par laquelle on s'est ménagé la facilité d'en faire disparaître le foulage sans aucune perte de temps.

7.^o Celle de la frisure qui remplit l'espace des garnitures de la forme, de manière que la feuille de papier qu'on imprime soit soutenue également par-tout.

En exposant dans le plus grand détail ces différens moyens, les Commissaires en font continuellement la comparaison avec ceux qui les remplacent dans les anciennes Presses; il montrent tous les défauts de ces derniers, ainsi que l'impossibilité d'obtenir, en s'en servant, une impression parfaite. Ils terminent cette comparaison par celle des résultats que leur ont donnés quelques essais faits avec l'un & l'autre instrument. Si l'on réimprime avec les Presses ordinaires, une feuille qu'on vient d'imprimer, sans la détacher du tympan, les lettres sont doublées. Avec la nouvelle Presse, on a réimprimé la même feuille jusqu'à cinq & six fois, sans que les lettres aient doublé. Il faut remarquer qu'à chaque fois qu'on a réitéré l'impression, on a fait aller & venir le coffre; on a déployé & reployé le tympan & la frisure, pour examiner l'effet de chaque coup de Presse; enfin on a encre. On a fait plus encore: pour s'assurer que la platine pressoit également dans toutes ses parties, & conservoit son parallélisme malgré le porte-à-faux que cause l'incomplet des pages de la forme, on a placé sur le marbre successivement à différens points, des paquets de composition, qui ne renfermoient que l'étendue d'une page; & on les a placés de manière qu'ils répondissent à différens angles de la platine; or dans toutes les positions qu'elles ont occupées sur le marbre, l'impression de ces pages s'est également bien faite, tant le parallélisme de la platine avec le marbre est invariablement maintenu.

Les Commissaires apprécient enfin l'avantage de la nouvelle Presse sur l'ancienne, quant à la célérité du travail: il en résulte qu'il est certain que la manœuvre se trouve abrégée de moitié dans la nouvelle Presse.

Je soussigné certifie le présent Extrait du rapport, conforme à l'original & au jugement de l'Académie. A Paris, le vingt-un Octobre mil sept cent quatre-vingt-trois.

Signé LE M.^{QUIS} DE CONDORCET, Secrétaire perpétuel.

AVERTISSEMENT.

LES expériences faites en présence des Commissaires nommés par l'Académie Royale des Sciences, & consignées dans le rapport qui lui en a été fait le 17 Mai 1783, ont prouvé que cette Presse est plus expéditive d'un quart que les autres, en rendant en même-temps la main-d'œuvre moins pénible, & qu'elle procure à ses ouvrages un degré de perfection, indépendant du talent des Ouvriers.

D'après ces considérations, le Gouvernement s'est déterminé à faire publier une Description exacte & détaillée de cette machine, dont le succès étoit déjà assuré, par les expériences réitérées depuis plusieurs années à l'Imprimerie Royale; pour en faciliter la construction aux gens de l'Art, & leur faire trouver dans la simplification des procédés, les moyens d'en mettre les résultats à la portée de tout le monde.

Pour donner une Description exacte de toutes ses parties, on a cru devoir la rendre comparative & contradictoire avec celle de l'ancienne Presse, dans tous les points où elles peuvent différer entre elles; & rendre compte à mesure, de la différence des moyens & des résultats.





DESCRIPTION

O U

TABEAU COMPARATIF DES DIFFÉRENTES PIÈCES DE LA NOUVELLE PRESSE, AVEC CELLES DES ANCIENNES.

NOUVELLE PRESSE.

LE CHAPITEAU, indépendamment de la grace qu'il procure à la Presse en la couronnant, sert encore à lier & assembler les jumelles.

LES JUMELLES, d'une construction beaucoup plus forte, sont unies dans leur longueur par de fortes vis aux pièces *SS*, *FF*, *HH*, *NN*, *OO*. Les mortoises qui reçoivent les tenons du sommier sont armées en cuivre, & leurs surfaces extérieures, sur lesquelles doivent frotter les mentonnets du sommier pendant sa course, sont aussi armées de plaques de cuivre; celles-ci sont liées aux premières par des boulons ou vis à têtes fraizées & perdues; & de là il résulte que le sommier, dont toutes les parties correspondantes sont garnies d'acier, opère, sur & dedans les ju-

ANCIENNES PRESSES.

LE CHAPITEAU, dans presque toutes les Presses, ou n'existe pas, ou n'est qu'une planche clouée sur le haut de chaque jumelle, & ne sert que d'objet de décoration.

LES JUMELLES sont deux pièces de bois souvent mal écarries, qui n'ont d'autre union que celle que peuvent leur procurer deux seules traverses, qui n'y tenant que par leurs tenons, les emmanchent plus ou moins solidement; aussi sont-elles fortement ébrançonnées au plafond par des tringles de fer. Les mortoises qui reçoivent le sommier étant simplement formées & entaillées dans l'épaisseur, on voit fréquemment les bois se renfler ou se retirer, contraindre le sommier d'un côté & de l'autre, ou lui procurer beaucoup de jeu: il est aisé de comprendre les effets vicieux qui doivent

NOUVELLE PRESSE.

melles, un frottement fort doux, & qui ne peut jamais être contrarié par le gonflement des bois, auquel on a paré par ces mêmes précautions.

Elles sont assemblées par en-bas dans des patins de 3 pieds de long sur 1 pied de large, & 6 pouces d'épaisseur : ces patins sont unis l'un à l'autre par deux traverses. Cet assemblage est encore fortifié par deux boulons qui lient ensemble les jumelles, les patins, & les traverses de devant & de derrière. Les Jumelles sont ainsi assises sur une base de près de $8\frac{1}{2}$ pieds carrés, ce qui, joint à la masse des autres parties de la Presse, dispense de tout étauçon.

LES DEUX VIS DE PRESSION DES JUMELLES. Ces pièces sont ici d'une invention absolument nouvelle ; elles ont 1 pied de long, & 18 lignes de diamètre : elles traversent le bout des jumelles pour entrer dans leur écrou, & descendre jusque sur les garnitures du sommier. Leur usage est de conserver toujours le parallélisme de cette pièce, en comprimant ses garnitures, qui étant des corps plus ou moins élastiques, offrent une résistance inégale de chaque côté ; de façon que pour charger également le sommier, il n'y a qu'à faire descendre ou remonter les vis : c'est ainsi que l'on remédie à l'irrégularité inévitable des étoffes, avec lesquelles on est obligé de contraindre l'ascension du sommier, comme on le verra ci-après.

L'ENCRIER est taillé dans la masse d'un bloc de marbre noir de 18 pouces de long sur 17 pouces de large, & de

ANCIENNES PRESSES.

en résulter, puisque c'est dans ce même sommier ainsi contraint & qui ne peut plus être parallèle à la platine, que passe la vis ; celle-ci cesse d'être verticale, & c'est le principe de tous les vices que l'impression peut éprouver.

Les jumelles les plus solides sont assemblées dans des patins de 21 pouces de long sur 6 pouces de large & 3 pouces $\frac{1}{2}$ d'épaisseur, destitués de traverses qui les unissent : elles présentent une masse si chancelante, qu'on est obligé de les assujétir par bas au plancher, & de les étayer au plafond par des étauçons multipliés & par des barres de fer.

L'ENCRIER est une assemblage de quatre planches de chêne, sur lesquelles l'encre se broye avec un broyeur de

NOUVELLE PRESSE.

6 pouces d'épaisseur; son broyon est de la même matière. Cette pièce a sur les autres, l'avantage qu'on peut y broyer l'encre beaucoup plus parfaitement sans craindre le mélange d'aucun corps étranger; elle est recouverte d'un couvercle en carton, qui l'enveloppe en entier, sans cependant en suspendre l'usage.

LE SOMMIER, partagé en deux dans sa longueur, reçoit l'écrou, qui porte en-dessous deux oreilles pour servir à déterminer son aplomb dans le sommier: deux boulons traversent ces deux oreilles, le sommier, & une autre plaque de cuivre qui le recouvre & sur laquelle on les serre à mesure que le bois se comprime. Les deux parties du sommier sont réunies ensemble par huit fort boulons, qui portent chacun leur rondelle de cuivre; les quatre du milieu servent à ferrer & maintenir l'écrou; ceux des extrémités compriment les mentonnets contre les jumelles, & contribuent à rendre le sommier fixe à volonté: ses tenons sont armés en dedans & en dehors de plaques d'acier, liées entre elles par des boulons à têtes fraisées & perdues; & pour s'assurer davantage de la justesse des frottemens, on a, pendant un long espace de temps, rodé & usé à l'éméri cette pièce, sur toutes les parties qui éprouvent le contact des jumelles.

En partageant le sommier en deux parties, on est parvenu à obvier aux inconvéniens que peut produire, en se déjetant, une pièce de bois aussi forte,

ANCIENNES PRESSES.

bois. Il s'en faut de beaucoup que l'objet utile qui devoit résulter de cette opération, soit rempli: l'encre, loin de se broyer, pénètre bientôt les pores du bois, & en détache des parcelles que les balles enlèvent & que les caractères ne tardent pas à recevoir. La plupart des encriers, ou ne sont couverts en aucun temps, ou ont des couvercles dont la construction ne permet pas l'usage pendant le travail.

LE SOMMIER est une pièce de bois d'un seul morceau, qui renferme l'écrou de la vis; elle entre de chaque côté dans les entailles des jumelles, & est le plus ordinairement maintenue sur chaque partie latérale par des mentonnets pris dans la masse: cette pièce est destinée, à chaque coup de pression, à remonter & descendre le long des jumelles. Pour opérer la pression, & pour régler ce qu'on appelle le coup de l'Ouvrier, c'est-à-dire, déterminer l'arc qu'il doit décrire en amenant à lui le barreau, il a fallu contraindre l'ascension du sommier par des garnitures de feutres, cartons ou autres corps élastiques; mais, comme on l'a vu précédemment, ces corps plus ou moins denses & épais, ne peuvent recevoir ou produire une résistance égale que par l'effet du hasard: le sommier est donc très-éloigné de conserver le parallélisme parfait qu'il ne devoit jamais perdre, & qui suppose que les tenons en aient, lors de sa construction, été proportionnés avec justesse aux mortaises des jumelles, ce qui arrive très-rarement: le renflement des bois de part ou d'autre, le contraint bientôt d'un côté;

NOUVELLE PRESSE.

& qui finit presque toujours par se gercer, se fendre & s'éclater.

L'ÉCROU D'EN-HAUT est une masse de cuivre de laiton suffisamment rendu durci, dans laquelle on a taraudé les pas d'en-haut de la vis : ces pas sont très-exactement les mêmes que ceux de la vis, sur laquelle ils ont été taraudés, par le moyen d'un tarau ou fausse vis qui avoit été elle-même coupée sur le tour d'après ceux de la vis. Il en est résulté que l'intérieur de cet écrou offre des pas vifs, nets & sans soufflure. Lorsque la vis y est introduite, elle n'y a de jeu que ce qui est nécessaire pour y faire sa révolution : par ce moyen on a obtenu encore plus de justesse qu'avec un écrou fondu sur la vis, & on a évité les parties vitrifiées de la fonte, qui la détruisent souvent elle-même en peu de temps.

L'inclinaison des pas de cet écrou est à peu - près la même qu'aux écrous ordinaires ; il seroit facile d'arriver au

ANCIENNES PRESSES.

il acquiert du jeu d'un autre ; au point ; que l'on voit des sommiers remonter & descendre sensiblement de travers en plusieurs temps. Le plus souvent, les Ouvriers qui n'ont d'autre moyen de le charger ou de le comprimer, que de diminuer d'un côté les garnitures, ou d'en introduire avec peine de nouvelles de l'autre, laissent le sommier dans cet état de délabrement, ou tâchent d'y remédier par des cales qu'ils introduisent avec force dans les entailles. Le sommier est donc très-éloigné d'être parallèle à la platine : la vis n'est plus verticale, la pression s'opère inégalement, & il ne faut attribuer qu'à cela l'égrènement du pivot de la vis.

L'ÉCROU est une portion de matière aigre, mêlée souvent de potin, fondue sur la vis, & qui en est dévêtée à grands coups de masse ; de là, il résulte qu'étant impossible de lui restituer la même rondeur que le dévêtissement lui a nécessairement ôtée, la vis cesse de toucher dans tous les points les pas de l'écrou, elle y acquiert des mouvemens irréguliers, elle use inégalement l'écrou ; & celui-ci, qui retient toujours de la fonte des parties vitrifiées, mange lui-même les pas de la vis : cet écrou est le plus souvent placé dans le sommier avec trop peu de précaution ; pour en assurer la situation verticale ; alors la vis cesse elle-même d'être perpendiculaire au sommier, la pression devient inégale, le pivot casse, & il en résulte les ravages que l'on verra ci-après.

NOUVELLE PRESSE.

ANCIENNES PRESSES.

même but , par une inclinaison plus ou moins grande des pas d'en-haut de la vis ; mais son rapport avec celle des pas de l'écrou d'en-bas n'est pas indifférent ; & c'est , comme on le verra dans la description suivante , leur combinaison qui fait descendre & monter plus ou moins la platine. Un des soins les plus indispensables à prendre, dans la construction d'une Presse , & sur-tout de celle-ci , est de placer l'écrou dans son sommier sur une ligne qui lui soit parfaitement perpendiculaire ; & on s'en est assuré ici par tous les moyens possibles.

LA VIS est une pièce d'acier , cylindrique , de la même longueur que les autres , dont la tête est renforcée d'un quart ; le haut porte quatre filets carrés , inclinés dans la proportion ordinaire , pris dans la masse , taillés sur le tour , & divisés avec tant de justesse , que la vis peut entrer dans son écrou par tous les pas indifféremment : cette portion de la vis fait dans son écrou un peu plus d'un quart de révolution , & cette révolution est commune à toutes les Presses comme à la nouvelle ; elle est nécessaire & opérée par l'effet du barreau que l'Ouvrier est obligé d'aller chercher contre la jumelle , où il doit s'en retourner pour que le coffre puisse s'échapper de dessous la platine , & que le tympan & la frisquette puissent se développer : or l'Ouvrier , en amenant à lui le barreau , décrit un arc d'environ cent degrés ; & à raison de la description nécessaire de ce grand arc , la platine , obligée de suivre l'écrou d'en-bas auquel elle est attachée , subit , d'après cette hypothèse , une descente de

Tome X.

LA VIS est un morceau de fer forgé ; de la longueur de 22 pouces , dont les pas à quatre filets carrés , de 4 pouces de hauteur , sont ordinairement brasés , c'est-à-dire rapportés sur le corps de la vis ; le bas est terminé en un pivot pointu , souvent d'une seule pièce , quelquefois tronqué vers son extrémité & se démontant à clavette , pour que son renouvellement qui arrive souvent , par les raisons détaillées ci-dessus , n'entraîne pas celui de toute la vis , & n'expose pas l'Ouvrier à l'entière suspension de son travail : c'est ce point , qui n'a pas une demi-ligne d'étendue , qui est destiné à comprimer dans son centre une surface d'environ 17 pouces de long sur 12 pouces de large. A la tête de la vis est quelquefois adaptée par un collet qui l'entoure , une traverse de fer portant à chaque extrémité un T , par les branches duquel passent les crampons , chaînes ou cordes qui servent à maintenir la platine dans sa descente , & à la remonter après la pression. C'est uniquement en ce point ,

L 111

NOUVELLE PRESSE.

quatorze lignes, *première donnée*. Mais on avoit aussi une *autre donnée* diamétralement opposée; c'étoit de restreindre à une bien moindre étendue, & de déterminer, à peu de chose près, la descente de la platine à celle nécessaire pour presser suffisamment. Car moins la course de la platine peut avoir d'étendue, moins elle doit éprouver de variation. Sans ce motif, il eût été encore possible de laisser à la platine toute la révolution que l'inclinaison des pas de vis eût pu lui donner. On auroit aisément trouvé le moyen, comme dans les autres Presses, de remédier au trop de foulage par la plus grande élasticité du sommier, où se seroit perdu l'excédent de la descente de la platine. Celle-ci n'étant éloignée de dessus la forme, avant la pression, que de quatorze lignes, les garnitures du tympan ont une épaisseur que la pression peut diminuer, mais ne peut jamais anéantir: il faut donc que l'excédent de la descente de la vis, opérée par la course du barreau, sur l'espace compris entre la platine & la forme, eu égard à l'épaisseur irréductible des étoffes, se distribue quelque part; ce qui se fait par la liberté limitée qu'on laisse au sommier de remonter.

Pour accorder des données aussi opposées, on a imaginé de construire une vis qui eût, dans sa partie inférieure, des pas comme en haut, inclinés de manière que lorsque la vis descend de dix lignes, la platine ne descende que d'un peu plus de trois lignes; alors toute la descente fixée à la platine, tourne à volonté, à très-peu de chose près, au profit de la pression. Il résulte donc de l'inclinaison des pas d'en-bas, combinée avec

ANCIENNES PRESSES.

dans l'attache de la platine, qu'a varié jusqu'à présent la construction de la Presse; mais tous ces moyens peuvent être regardés comme vicieux, aucun ne tendant à descendre la platine sans variation & à la remonter de même.

NOUVELLE PRESSE.

ANCIENNES PRESSES.

l'inclinaison de ceux d'en-haut, que les deux tiers de la descente produite par la révolution des pas d'en-haut sont détruits par ceux d'en-bas; & c'est-là ce qui a le plus long-temps contrarié les efforts de l'Inventeur de cette Presse.

La pression s'opère par les pas d'en-bas de la vis sur ceux de l'écrou, & c'est, comme on le verra dans la description de l'article suivant, le seul principe de la Presse à un coup.

Chaque bout de la vis porte un pivot de 15 lignes de long, l'un desquels entre par en-haut dans la plaque de cuivre qui surmonte le sommier, & l'autre est engagé dans une chambre pratiquée au centre de la platine, & n'est pas assez long pour toucher au fond lorsque la vis est au bout de sa révolution.

L'ÉCROU D'EN-BAS. Cet écrou est un morceau de cuivre de la même espèce que celui d'en-haut, & dont les pas ont été taraudés par le même procédé; sa forme extérieure présente quatre faces exactement carrées & polies; il est terminé par une base de huit pouces six lignes en carré; aux quatre coins de laquelle la platine est attachée par de fortes vis: on a donc une pression produite par une surface de plus d'un demi-pied carré au lieu d'un seul point. La pression s'opérant par les pas de la vis, celle-ci entraîne avec elle en descendant & ramène en montant son écrou d'en-bas, & par conséquent la platine qui y est attachée: pendant cette révolution, qui est déterminée à quatre lignes & demie & n'excède jamais trois lignes, les quatre faces extérieures de l'écrou

qui suit ce mouvement, touchent dans tous leurs points celles de la boîte d'acier renfermée dans la moise. Ces frottemens & contacts ont été préparés & disposés en même temps que ceux du sommier, par de l'émeri fin, de la ponce pilée, & enfin du rouge d'Angleterre.

Il est absolument nécessaire que la surface de dessous de l'écrou qui porte sur la platine, offre un plan exactement parallèle à celui de la platine sur laquelle il pose.

LA MOISE est une tablette de bois de l'épaisseur de 2 pouces 7 lignes, & placée à 2 pouces $\frac{1}{2}$ au-dessus de la platine; cette tablette, brisée en deux parties, se réunit en une par le moyen de quatre boulons; dans son milieu est pratiquée une ouverture pour le passage de l'écrou d'en-bas, & cette ouverture est une boîte d'acier de la même épaisseur que la moise; cette boîte est de même brisée en deux, d'angle en angle: chaque partie porte des deux côtés une oreille ou prolongement, que traverse de chaque côté un des quatre boulons: toutes ses surfaces disposées carrément avec le plus grand soin, ont été, comme on l'a vu ci-dessus, rodées & usées contre celles de l'écrou. Cette tablette, qui porte le nom de *moise* lorsqu'elle réunit sa boîte d'acier, contribue uniquement à assurer l'invariabilité de la platine; chaque bout embrasse les jumelles par un fort mentonnet, & ses deux parties sont forcées & contraintes en en-bas, dans les mortoises des jumelles, par une double clé de bois; il est donc impossible que cette pièce, ainsi assujettie

LA MOISE ou TABLETTE est une planche quelquefois d'une seule pièce; ordinairement divisée en deux parties qui se joignent ensemble; elle est attachée aux jumelles par deux mortoises en queue d'aronde: son usage paroît être destiné à maintenir la position verticale de la vis dans la boîte qui traverse cette pièce; mais cet objet est manqué, & la construction même de la Presse s'oppose à ce qu'il soit rempli.

NOUVELLE PRESSE.

dans les deux sens opposés, laisse à l'écrou d'autre mouvement que celui qui se fait dans le sens vertical : c'est-là la propriété essentielle de cette pièce importante, qui assure la situation perpendiculaire de la vis, & donne en même-temps à la platine une invariabilité inconnue jusqu'à présent.

LA PLATINE, de cuivre fondu, porte 23 pouces de long sur 19 pouces de large ; elle présente quatre faces disposées en talus ; la surface de dessus est la même que la base de l'écrou, & est exactement recouverte par cette pièce : son épaisseur, au centre, est de 19 lignes, & sur les extrémités de 9 lignes $\frac{1}{2}$. On a vu ci-dessus quelle étoit sa révolution, qu'elle ne faisoit que celle qui est nécessaire pour opérer une pression suffisante, & seulement aux dépens des garnitures du tympan : son invariabilité absolue est un des plus grands points de difficulté vaincue, que la construction de cet instrument puisse présenter.

LE MARBRE est une plate-forme de cuivre dur, de l'épaisseur de 9 lignes, portant 18 pouces de large sur 22 pouces $\frac{1}{2}$ de long ; il est enchâssé dans un châssis de fer avec lequel il a été corroyé de manière que leurs deux surfaces, parfaitement dressées & unies, n'en font qu'une. On a pratiqué, à moitié de son épaisseur, une feuillure de 4 lignes de large, sur laquelle il porte dans le châssis, ce qui l'empêche de tasser

ANCIENNES PRESSES.

LA PLATINE étoit anciennement en bois, mais maintenant l'usage paroît avoir prévalu de la faire de cuivre ; sa dimension la plus ordinaire est de 17 pouces de long sur 12 de large : son épaisseur est communément de deux pouces, son centre est déterminé par une grenouillère ou morceau de fer trempé, incrusté dans sa masse, & sur laquelle le pivot de la vis descend & opère la pression. La manière dont elle est attachée à la vis a quelquefois varié : il y a toujours aux quatre coins de cette pièce un fort crampon, où passoient autrefois des cordes qui alloient se rattacher au bas de la boîte qui enferme la vis ; maintenant ce sont des anneaux en S, dont l'un passe dans les crampons de la platine, & les autres traversent la tablette.

LE MARBRE est quelquefois une planche épaisse, mais le plus ordinairement une dalle de pierre de l'épaisseur de 2 pouces $\frac{1}{2}$, portant sur un fond de bois, & encadrée dans son châssis aussi en bois : cette pierre, qui n'est jamais d'une épaisseur parfaitement égale, est calée dans son coffre, avec du son, pour en remplir, autant qu'il est possible, les porte-à-faux ; mais si l'on parvient à établir pour quelque temps cette pièce

NOUVELLE PRESSE.

au dessous de la surface du châssis, & de céder sous l'effort de la pression.

Le sommier étant supposé de niveau, la vis perpendiculaire, la platine aussi de niveau & immobile, la pression seroit encore infidelle, si la base sur laquelle elle s'opère pouvoit céder à ses efforts, & si elle ne présentait pas une surface unie & un plan parallèle aux autres pièces.

ANCIENNES PRESSES.

de niveau, l'effort de la pression le lui fait bientôt perdre, les corps qui ont été introduits dessous se tassent promptement; le marbre, quelque épais qu'il soit, casse, & souvent on le laisse subsister dans cet état. Quelque dure que soit cette pierre, quelque fin que soit son grain, l'eau qui la mine, les coups de marteau qu'elle reçoit, le poids des châssis que l'on y pose toujours sans précaution sur les angles, ont bientôt tellement dégradé sa surface, que les caractères qui y sont posés, se prêtent eux-mêmes à son irrégularité; alors les supports, les hausses, remèdes nécessaires mais aussi vicieux que le mal, sont la ressource de l'Ouvrier.

On a cherché quelquefois à éviter un de ces inconvéniens, en appliquant sur un marbre de bois une feuille de cuivre, qui n'ayant pas assez d'épaisseur, & portant elle-même sur une base infidelle, n'a pas produit de meilleurs effets.

LE CHÂSSIS, COFFRE & TRAIN, est composé d'un châssis de fer de 2 pouces de large, à fleur duquel est le marbre, & qui ne forme avec celui-ci qu'une seule & même surface. Aux quatre coins sont adaptées comme aux autres les quatre cornières: & sur la partie de derrière, dans le prolongement de toute la largeur du châssis, est appliquée la moitié de la charnière du grand tympan, qui y est attachée par cinq boulons: les trous ovales qui y sont pratiqués, laissent la liberté à l'Ouvrier de la remonter ou descendre de 3 lignes. On a ménagé dans l'épaisseur de l'intérieur de ce châssis, une feuillure de même profondeur que

LE CHÂSSIS ou COFFRE & TRAIN, est un cadre de bois auquel est adapté un fond dans lequel est encaissé le marbre; les quatre coins sont armés de quatre cornières ou cantonnières en fer qui y sont attachées par des vis, & dont l'usage est d'assujettir avec des coins de bois la forme qui contient les caractères; c'est-là le *coffre* proprement dit: il porte par derrière un prolongement sur lequel est monté le chevalet qui supporte le tympan. Au dessous du coffre sont adaptés huit, quelquefois dix crampons de cuivre, disposés sur deux lignes parallèles, qui servent à le faire glisser sur deux tringles de fer poli en dos d'âne. Les crampons,

NOUVELLE PRESSE.

celle du marbre, pour le recevoir. Cette pièce, ainsi construite, peut prendre le nom de *coffre*, puisqu'elle en fait les fonctions; elle ne porte point avec elle le chevalet du tympan, qui est attaché à demeure sur le train, comme on le verra ci-après.

On a adapté au châssis trois bandes de cuivre récroûti; chacune desquelles est évidée dans toute sa longueur, à la réserve de trois parties angulaires de neuf lignes de long; ce qui fait neuf points de frottement, qui glissent dans trois barres d'acier qui ont la même forme en creux, mais de manière que les frottemens ne s'opèrent que dans le fond & nullement sur les parties latérales. Aux deux bouts du châssis, devant & derrière, on a ajouté un cylindre à encliquetage, dont l'usage est de tendre les cordes qui mènent & ramènent le train, & de régler la position de la manivelle. Le châssis, ainsi garni du marbre, des tringles & du rouleau, prend le nom de *train* de la Presse.

LE GRAND TYMPAN est composé d'un châssis de bois, comme les tympan ordinaires, mais non recouvert de parchemin; sa traverse d'en-bas, nécessairement étroite, au lieu d'être en bois, est de cuivre pour lui donner plus de solidité, & dessus est appliquée l'autre partie de la charnière, qui y est liée par cinq boulons qui les traversent toutes deux: la charnière porte à chaque bout deux oreilles de huit pouces de long, qui s'appliquent à fleur du châssis, & y sont aussi liées chacune par trois autres boulons à oreilles. Sur ce châssis de bois on applique un cadre de fer ou même

ANCIENNES PRESSES.

d'une épaisseur & d'un degré de dureté toujours différens, ne portent presque jamais ensemble sur les tringles, ou bien cessent bientôt d'y frotter à mesure qu'ils s'usent. Le coffre, ainsi chargé de son marbre, muni de son chevalet & garni de ses crampons, retient le nom de *train*; il glisse assez légèrement sur son berceau, ce que l'on ne peut attribuer qu'à l'extrême légèreté du coffre, dont la matière & la construction, en soulageant l'Ouvrier, tournent au détriment de l'ouvrage. Les deux cornières de derrière portent une des parties des deux couplets ou charnières du tympan, & ne forment avec chaque couplet qu'une seule & même pièce; en sorte que la hauteur sur l'œil de la lettre, prise au derrière du tympan, une fois déterminée, ne peut plus changer à la volonté de l'Ouvrier, & ces couplets entraînent souvent la destruction des cornières & même du châssis, si elles se cassent ou qu'on veuille y changer quelque chose.

LE GRAND TYMPAN est un châssis de bois qui porte à sa traverse d'en-bas les deux autres parties de couplets ou charnières, qui se réunissent aux premières par une grosse goupille ou boulon: sa traverse d'en-haut est une bande de fer où est attachée une des parties des couplets de la friskette. Ce cadre, revêtu d'une peau de parchemin, sert à recevoir en dehors la feuille de papier qui va être imprimée; & en dedans on introduit des étoffes pour garantir l'œil de la dureté du foulage, & qui sont maintenues en leur place par le *petit tympan*.

NOUVELLE PRESSE.

d'acier , de l'épaisseur d'une frisquette , & dont les quatre traverses , qui ont 16 lignes de large , sont percées tout au tour de quinze trous , pour recevoir autant de boulons qui passent au travers du châssis de bois , & l'y rendent adhérent de manière à ne leur faire faire ensemble qu'un seul & même corps : pour ne pas trop multiplier les boulons , ceux qui attachent la charnière , & ceux des pointures , sont partie des quinze boulons qui attachent le cadre dans tout son pourtour. Ce cadre , collé en vélin le plus beau & le plus uni , de la même manière qu'une frisquette , a été imaginé pour remédier aux inconvéniens qui résultent des autres tympons : il est aussi multiplié pour chaque Presse que le nombre des frisquettes , & lorsque le foulage , trop fort ou différent , peut causer quelque dommage à l'impression , on substitue un autre cadre ou *faux-tympan* à l'ancien.

LE PETIT TYMPAN est un châssis de fer absolument pareil aux autres , & qui n'en diffère qu'en ce qu'il entre , par six queues d'aronde , dans le châssis du grand tympan , & qu'étant assujetti par autant d'estoquiaux disposés dans tout son pourtour , il comprime aussi les étoffes plus également.

ANCIENNES PRESSES.

Le tympan , ainsi couvert de parchemin , reste revêtu de la même peau jusqu'à ce que la vétusté la fasse supprimer ; mais cette pratique est vicieuse , en ce que ce même tympan servant pour des ouvrages de toutes sortes de formats , les pages & les lettres y sont bientôt une telle impression , que l'on est obligé de temps en temps , & sur-tout à chaque changement de forme , pour en faire disparaître ce que les Ouvriers appellent le *foulage* , de l'humecter jusqu'à ce que le parchemin redeviennne uni ; mais le parchemin à qui il faut faire contracter une très-forte humidité , la retient longtemps , & la communiquant de même au papier , lui fait recevoir une teinte d'encre trop forte , & disproportionnée à celle de la veille où le tympan étoit sec. C'est une des principales causes de l'inégalité dans la teinte des feuilles.

LE PETIT TYMPAN est un petit châssis de fer , recouvert d'un côté d'une feuille de parchemin , & destiné à comprimer les étoffes renfermées dans l'épaisseur du cadre du grand tympan , pour que le coffre puisse rouler & dérouler sous la platine , sans craindre de les déranger. Cette compression se fait sur la largeur en trois points seulement , dont deux en-devant sous la tringle de fer du grand tympan , & un sous l'estoquiau sur la partie opposée du petit tympan ; aussi il résulte de là que les étoffes n'étant pas comprimées dans leur largeur , boursofflent & produisent nécessairement dans cette partie une épaisseur différente.

NOUVELLE PRESSE.

LA FRISQUETTE est un cadre de quatre bandes d'acier, d'une épaisseur parfaitement égale, & ayant les mêmes longueur & largeur que le grand tympan; les deux parties de ses couplets sont faites avec tant de justesse, qu'elle n'éprouve pas le moindre vacillement: elle est collée comme les autres avec deux feuilles de papier, entre lesquelles on a introduit un carton mince qui lui donne l'épaisseur de ses bandes, pour que cette épaisseur, combinée avec la hauteur des garnitures de la forme, remplisse, à peu de chose près, le vide que produit la saillie des caractères. On a eu soin de rendre cette saillie uniforme, en réduisant à une hauteur égale les garnitures, espaces & cadrats employés pour les blancs; par ce moyen, tout ce qui est vide est rempli pendant la pression, & ce qui est plus élevé, est soutenu assez mollement pour donner lieu à tout le foulage qu'on peut désirer.

Le nombre des frisquettes est assez multiplié pour pouvoir en changer à chaque ouvrage & même à chaque forme, lorsqu'elle diffère trop de la précédente.

LA CHARNIÈRE, de 23 pouces de long sur 15 lignes de diamètre, est absolument cylindrique: cette pièce, toute d'acier, occupe toute la largeur du coffre & du tympan; elle a été forcée dans la masse comme un canon de fusil, & tous les charnons, au nombre de 19, en ont été divisés avec le plus grand soin: la partie d'en-haut porte de chaque côté un retour d'équerre de 8 pouces de long, par lequel elle est attachée au cadre du tympan & à sa traverse de cuivre,

Tome X.

ANCIENNES PRESSES.

LA FRISQUETTE est un cadre de quatre bandes de fer, de la largeur du grand tympan, & d'une grandeur indéterminée, portant à la bande d'en-bas l'autre partie de ses couplets, qui s'assemble avec celle qui est attachée à la pièce précédente: cette frisquette, d'une épaisseur peu exacte, est collée de plusieurs papiers, & ne sert qu'à couvrir la feuille de papier en se repliant sur le tympan; elle ne laisse que l'ouverture des pages de la forme qu'on veut imprimer, pour garantir de l'encre les marges du papier blanc: le vice de cette pièce consiste dans le jeu qu'elle a dans ses couplets, qui la fait vaciller sur la feuille de papier, fait friser celle-ci sur la forme; & dans la négligence des Ouvriers qui ne la renouvellent pas assez, & se contentent, en changeant de formats ou d'ouvrages, de recoller du papier par-dessus, ce qui produit encore sous la platine une pression inégale.

LA CHARNIÈRE OU LES COUPLETS DU TYMPAN, sont deux parties de charnières composées ordinairement chacune de cinq charnons, d'environ 15 lignes de diamètre: les deux d'en-haut sont attachées au grand tympan; celles d'en-bas, disposées en équerre, sont tellement engagées sous les cornières ou cantonnières du coffre, que non seulement il est impossible d'en changer la hauteur une fois déterminée, mais qu'elles entraînent la destruction

M m m

NOUVELLE PRESSE.

auxquels elle est unie par onze boulons à oreilles. La partie d'en-bas, appliquée sur la traverse de derrière du châssis du coffre, y est maintenue par cinq boulons à têtes larges, qui, en assurant son invariabilité, lui laisse la possibilité de remonter ou descendre à volonté de trois lignes.

L'expérience réitérée plusieurs fois, en présence de l'Académie Royale des Sciences, d'une même feuille tirée cinq à six fois de suite, & portée depuis à vingt-cinq fois, prouve d'une manière non équivoque la solidité & la précision de cette pièce.

LE CHEVALET DU TYMPAN est une traverse de fer soutenue par deux colonnes de pareille matière, & qui portent à plomb sur les deux colonnes du berceau : cette pièce sert, comme dans les autres Presses, à supporter le tympan développé ; elle fait partie du berceau, & ne suit pas le mouvement du train.

LE BERCEAU consiste en trois fortes barres carrées d'acier, de 11 lignes, & évidées en V de la longueur de 4 pieds $\frac{1}{2}$ dans la moitié de leur épaisseur ; ces barres portent sur le sommier d'en-bas & la plaque de cuivre qui le recouvre ; elles y sont assujetties par de fortes vis : l'autre moitié est encastrée dans trois traverses, & les démasseure de 2 lignes. Ces trois traverses sont elles-mêmes emmanchées d'un bout à doubles queues dans le sommier d'en-bas, & de l'autre, dans la traverse que supportent les colonnes : les trois barres d'acier sont aussi attachées par des vis sur cette même

ANCIENNES PRESSES.

des cornières & même du coffre lorsqu'il faut les réparer : leurs charnons sont souvent disposés avec si peu de justesse, que le tympan, en s'abaissant sur la forme, & en se relevant, éprouve un vacillement sensible, & auquel il faut attribuer en grande partie le papillotage & quelquefois le doublage des caractères sur le papier.

LE CHEVALET DU TYMPAN est une traverse de bois qui assemble deux montans portés sur le coffre de la Presse. Cette pièce sert à supporter le tympan lorsqu'il est développé, & elle marche avec le train auquel elle est attachée.

LE BERCEAU n'est autre chose qu'un plancher très-mince & étroit, emmanché d'un bout dans le sommier d'en-bas, porté de l'autre sur un pied extrêmement léger & placé à l'aplomb du chevalet du tympan : sur ce plancher sont posées deux & quelquefois trois barres de fer poli, taillées en dos d'âne, & attachées à chaque bout du plancher par une vis. La construction de cette pièce nuit & s'oppose même à la perfection de l'impression, puisqu'en supposant, comme on le verra ci-après, le sommier d'en-bas mobile, quoique parallèle dans sa longueur à la platine, le berceau cède sous

NOUVELLE PRESSE.

traverse. Il n'y a donc pendant la pression aucune cession, puisque le berceau est soutenu des deux bouts & au milieu en trois points immobiles. Cette pièce une fois supposée parallèle, ne peut donc pas cesser de l'être.

LE SOMMIER D'EN-BAS est une plate-forme de bois, portant deux pieds de long sur 2 pieds 9 pouces 4 lignes d'épaisseur, emmanchée solidement à queue dans chaque jumelle : cette pièce, exactement parallèle à la platine, est recouverte d'une plaque de cuivre de 4 lignes d'épaisseur, & présentant une surface parfaitement unie; elle est attachée au sommier d'en-bas par des boulons & vis distribués dans toute son étendue, & sa surface est plus grande même que le coffre lorsqu'il la recouvre.

C'est sur cette base solide, sur laquelle est établi le berceau, que s'opère la pression, pendant laquelle il n'y a aucune espèce de cession, les trois coulisses d'acier étant assujetties sur le sommier, par d'autres vis taraudées dans la plaque de cuivre.

LE CONTRE - SOMMIER est une pièce de bois de bout de la longueur du sommier d'en-bas, & de la largeur de 5 pouces; cette pièce placée au centre de la pression, est destinée à en supporter l'effort: elle soutient le sommier d'en-bas, & porte elle-même sur la plate-forme.

LA PLATE-FORME est une forte pièce de bois de la même dimension que le sommier d'en-bas, & de l'épaisseur de 4 pou-

ANCIENNES PRESSES.

la pression par son extrémité qui porte sur le sommier, & il ne cède pas de l'autre, qui est supportée sur un pied de bois de bout, comme on l'a vu ci-dessus: le berceau, pendant la pression; cesse donc d'être parallèle à la platine.

LE SOMMIER D'EN-BAS est une pièce de bois encore moins forte que le sommier d'en-haut, sur laquelle porte le berceau; cette pièce est engagée dans les jumelles par ses tenons, & loin d'offrir une résistance absolue à la pression, elle cède d'une manière sensible à chaque coup de barreau; il semble même qu'on ait voulu en faciliter la cession, en garnissant le dessous de ses tenons de quelques corps élastiques, comme au sommier d'en-haut; mais cette construction ne peut que tourner au grand détriment de l'impression: en vain s'assureroit-on par tous les moyens possibles du parallélisme des pièces supérieures avec la forme, la pression se fera toujours inégalement, si la base sur laquelle elle s'opère ne leur est pas parallèle; or, la cession de cette pièce détruit toute idée de parallélisme.

ces 7 lignes ; elle s'assemble de même à queue dans chaque jumelle , elle sert à supporter le contre-sommier , & elle est elle-même soutenue par la pièce ci-après.

LE CONTRE-FORT est une grosse pièce de bois de bout , de la hauteur de 9 pouces 8 lignes , placée au centre de la pièce précédente , & portant sur le plancher. Son usage , relativement à la plate-forme , est le même que celui du contre-sommier. Cette pièce , ainsi que la plate-forme , le contre-sommier & le sommier , sont disposées de manière qu'elles ont un centre commun à celui de la platine , & par leur contre-fil alternatif , elles offrent à la pression une résistance absolue & d'autant plus indépendante de l'effet du bois , qu'elles sont toutes liées par un fort boulon qui les traverse.

VIS DE NIVEAU. Ces vis , au nombre de six , sont placées aux quatre coins des patins des jumelles , & aux deux bouts de celui du berceau : elles ont 1 pouce 10 lignes de diamètre ; leur pas , presque horizontal & de la profondeur de 1 ligne $\frac{1}{2}$, forme dans le bois un écrou naturel ; l'effort se fait sur une forte plaque de cuivre , dans laquelle le bout de la vis , réduit en un pivot de 8 lignes , entre librement.

L'usage de ces vis , dont la tête est percée de quatre trous pour pouvoir y introduire un levier , est de niveler la Presse , & de rétablir avec facilité le défaut de justesse que le mouvement du plancher sur lequel elle est assise peut lui procurer.

EXPLICATION DES FIGURES.

- I, II, III, V..... *A*..... Assemblage du chapiteau avec les jumelles.
- I, II, III, V..... *B*..... Point qui détermine jusqu'en *C* l'épaisseur du fommier *FF*.
- I, II, III..... *D*..... Point qui détermine jusqu'en *E* l'épaisseur des patins des jumelles.
- I, II, III, V..... *E, F*.... Angles des patins qui déterminent leur longueur & leur largeur.
- I, II, XV, XIX..... *G*..... Godet ou entonnoir fermé par un couvercle, servant à introduire l'huile dans les pas de la vis; & par les oreilles duquel passent les deux boulons *n* qui maintiennent l'écrou dans le fommier.
- I, II, III, XV, XVII, XVIII..... *H*..... Angles supérieurs du fommier d'en haut.
- I, II, III, XVI..... *I*..... Angles inférieurs du même fommier.
- I, II, XXI..... *K*..... Barreau avec son manche.
- I, II, XX..... *L*..... Tête de la vis où entre le barreau.
- I, II, III, V, XXIV, XXV, XXVI. *M*..... Coins de la moise. Dans la *figure V* cette lettre indique seulement l'emplacement de la moise.
- II, II, XXII..... *N*..... Angles supérieurs de l'écrou d'en bas.
- I, II, XXII, XXIII..... *O*..... Passages de la vis *m*, *fig. XXII & XXIII*, qui correspondent à autant de pareils trous dans la platine.
- I, II, III..... *P*..... Chevilles de fer vissées dans la jumelle pour porter les balles.
- II, II, III, VI..... *Q*..... Forte pièce de bois qui reçoit l'effort du coffre.

- I, II, III, XXIII..... R.....** Angles de la platine.
I, III, XXVII, XXIX..... S..... Châssis de fer qui renferme le marbre.
I, XXVII, XXIX..... T..... Marbre en cuivre, vu en dessus ;
fig. I & XXVII ; & en dessous ,
fig. XXIX.
I, III, VI..... U..... Manivelle avec sa poignée.
I, III..... X..... Grand tympan.
I, III..... Y..... Fricquette.
I, III..... Z..... Colonne du chevalet du tympan.
I. XII..... AA, BB. Extrémités de la traverse qui assemble celle *NN*, avec le patin *DD* du berceau.
I, III..... CC..... Traverse du devant du berceau.
I, III, XIV..... DD.... Patin du bas du berceau.
I, III, VI..... EE..... Une des trois traverses qui composent le berceau , & dans lesquelles sont enchâssées les coulisses d'acier γ .
VI..... FF..... Platine de cuivre de 6 lignes d'épaisseur , sur laquelle portent les coulisses γ , & qui recouvre la plate-forme *FF**.
I, II, V, VII..... FF*.... Sommier d'en-bas, vu de profil ;
fig. I & II , en dessous dans la *fig. VII* ; la *fig. V* n'en fait qu'indiquer la place.
I, II, VIII..... GG.... Contre - sommier qui soutient le sommier.
I, II, V, IX..... HH.... Plate-forme sur laquelle pose la pièce précédente.
I, II, V..... II..... Contre-fort en bois de bout , qui soutient le contre-sommier & porte sur le plancher.

- I, II..... *KK*.... Plancher de l'encrier avec ses con-
foles.
- I, III..... *LL*.... Colonnes, qui soutiennent la tra-
averse *CC* du devant du berceau ;
& emmanchées dans le patin *DD*.
- I, III, XII..... *MM*.... Colonne qui soutient la traverse *II* ;
où sont assemblées les traver-
ses *EE*, pour les soutenir dans
leur milieu, & qui s'emmanche,
fig. XII, dans la pièce *AA, BB*.
- I, II, V, X..... *NN*.... Traverse qui assemble par-devant
les patins des jumelles.
- V, XI..... *OO*.... Traverse qui assemble par-derrière
les patins des jumelles ; dans la
fig. V, on ne voit que la place
de l'assemblage.
- XVI, XIX..... *PP*.... Écrou d'en haut avec ses deux bou-
lons *n*, & sa plaque portant le
godet *G*, dans lequel est vissé le
bout d'en-haut de la vis.
- I..... *QQ*.... Encrier avec sa molette ou broyon.
- I, III, XXXI..... *RR*.... Charnière du grand tympan, &
déassemblée dans la *fig. XXXI*,
avec sa goupille *f*.
- I, II, III, XIII..... *SS*.... Chapiteau qui couronne & qui af-
semble les jumelles, vu en dessous ;
fig. XIII.
- XX..... *TT*.... Pas d'en-haut de la vis.
- XX..... *UU*.... Pas d'en-bas de la même vis.
- IV..... *XX*.... Faux tympan qui s'applique sur le
grand tympan *X*, & qui y est
lié par 15 boulons.
- I, III..... *a*..... Plaque de fer verni, appliquée sur
une des jumelles pour la préser-
ver du contact des balles.

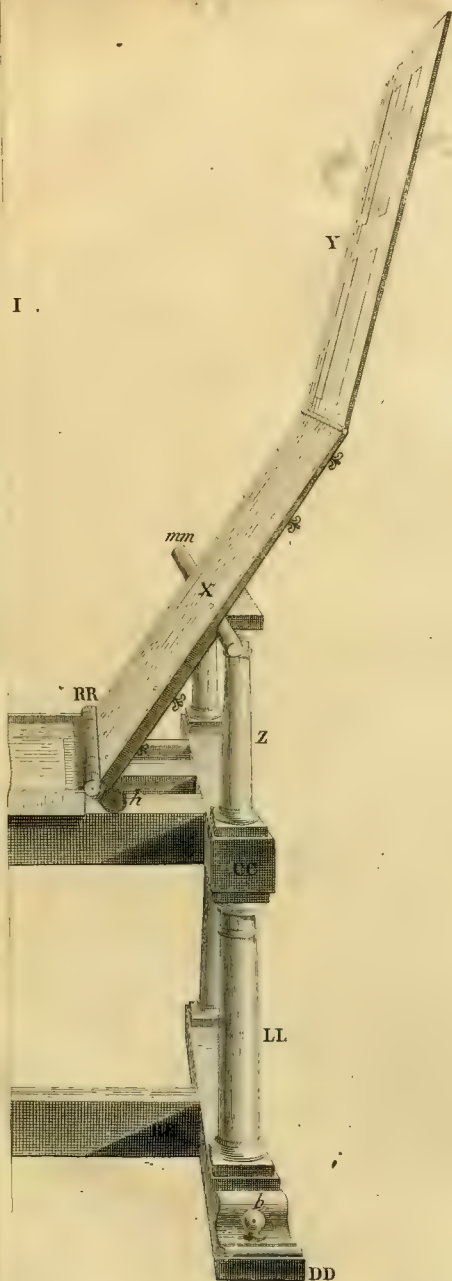
- I, II, III, V..... *b*..... Vis de rappel servant à mettre la presse de niveau.
- I, II, V..... *c*..... Clés de bois qui servent à ferrer en contre-bas les deux parties de la moise ; on n'en voit que l'emplacement, *fig. V*.
- I, II..... *d*..... Cheville pour retenir le barreau.
- I, II, III, V..... *e*..... Vis de pression, qui traversent les jumelles & servent ou à comprimer les corps élastiques du sommier, ou à le rendre immobile.
- I, V..... *f*..... Plaques de cuivre qui arment les mortoises des jumelles, qui reçoivent le sommier.
- I, V..... *g*..... Écrous des vis de pression *e*.
- I, III, XXVII, XXVIII, XXIX... *h*..... Rouleaux à encliquetage, qui servent à bander les cordes qui mènent le coffre.
- VI..... *k**..... Cylindres traversés par l'arbre *p* de la manivelle, & qu'entourent les cordes en sens opposés.
- I, III, XXVII, XXVIII, XXIX... *l*..... Cornières ou cantonnières servant à ferrer & fixer la forme sur le marbre.
- I, II, XXII, XXIII..... *m*..... Vis servant à attacher la platine à l'écrou d'en-bas, & dont on voit le passage, *fig. XXIII*.
- I, II, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX. *n*..... Boulons qui passent dans les oreilles de l'écrou d'en-haut pour le maintenir dans le sommier, & dont on voit le passage, *fig. XVII & XVIII*.
- XXIV, XXV, XXVI..... *o*..... Une des deux parties de la boîte d'acier enchâssée dans la moise, & réunie avec l'autre, *fig. XXIV*.
- I, III, VI..... *p*..... Arbre de la manivelle.

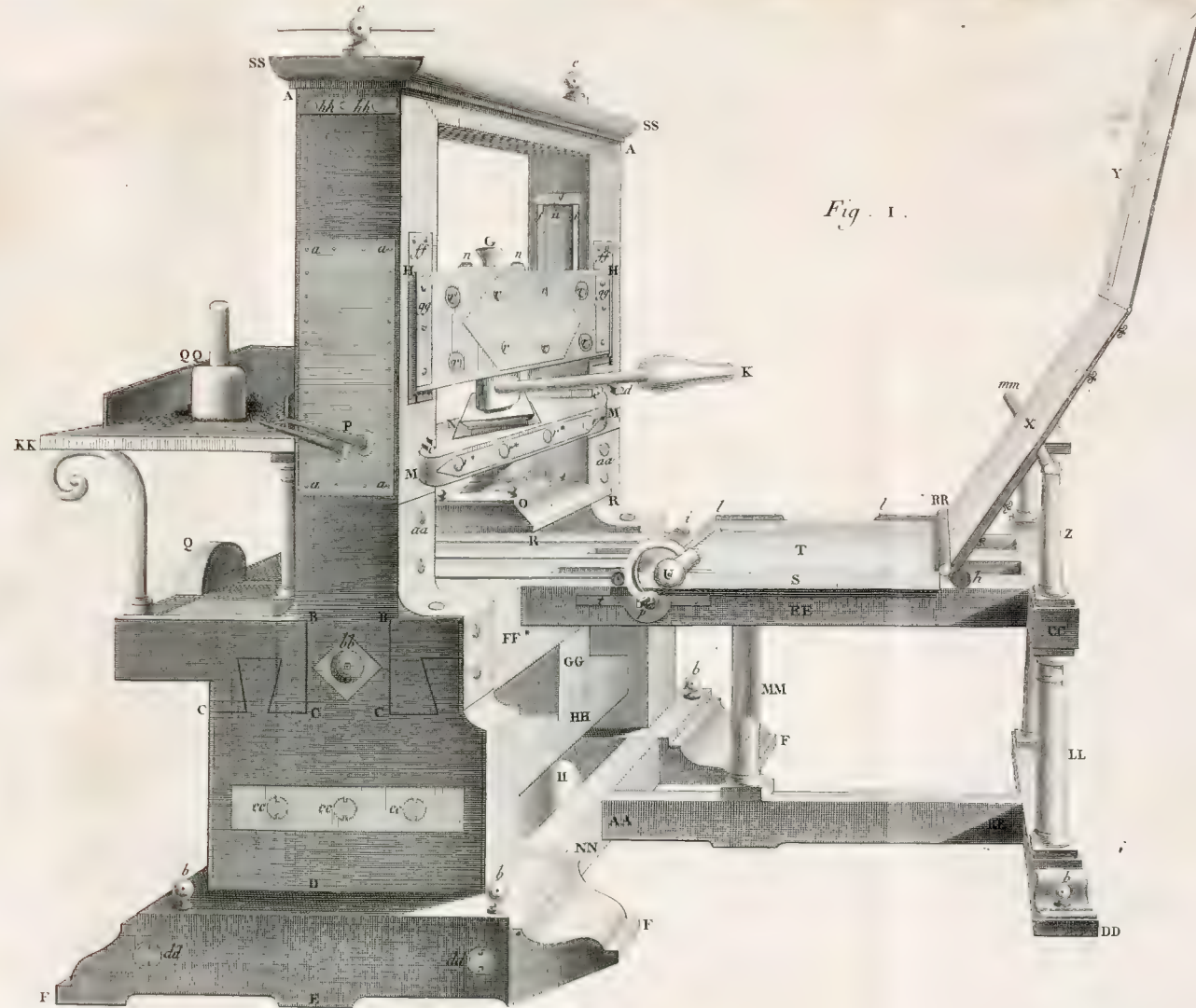
- XVII, XVIII..... *q*..... Clés de bois qui assemblent les deux pièces du sommier ; & leurs mortoises , *fig. XVII*.
- II, XV, XVI, XVII, XVIII..... *r*..... Boulons qui lient les deux parties du sommier , & dont on voit le passage , *fig. XVII & XVIII*.
- I, II, XXIV, XXV, XXVI..... *r**..... Boulons qui assemblent les deux parties de la moise ; leur passage est indiqué , *fig. XXV & XXVI*.
- XXXI..... *f*..... Goupille de la charnière du tympan.
- I, III..... *t*..... Oreilles appliquées sur les traverses du berceau pour soutenir l'arbre du rouleau.
- XXVIII, XXIX, XXX..... *u*..... Tringles de cuivre attachées sous le châssis *S* , évidées en *x* , & auxquelles on a conservé trois parties faillantes *y* , pour servir à les faire glisser dans les coulisses d'acier *z*.
- VI..... *z*..... Coulisses d'acier faisant partie du berceau , & enchaînées dans les traverses *EE* , dans lesquelles glissent les parties faillantes *y* des tringles de cuivre *u*.
- I, II, III..... *a a*..... Equerres de cuivre qui contribuent à maintenir l'assemblage des jumelles.
- I, II, III..... *b b*..... Forts boulons à tête carrée , qui lient chaque jumelle à la plate-forme *FF**.
- I, III..... *c c*..... Boulons qui lient chaque jumelle avec le contre-sommier *HH*.
- I, III..... *d d*..... Boulons qui lient chaque jumelle avec les patins.
- VII..... *e e*..... Passage d'un grand boulon qui ne se voit pas , & qui lie ensemble les pièces *II* , *HH* , *FF*.

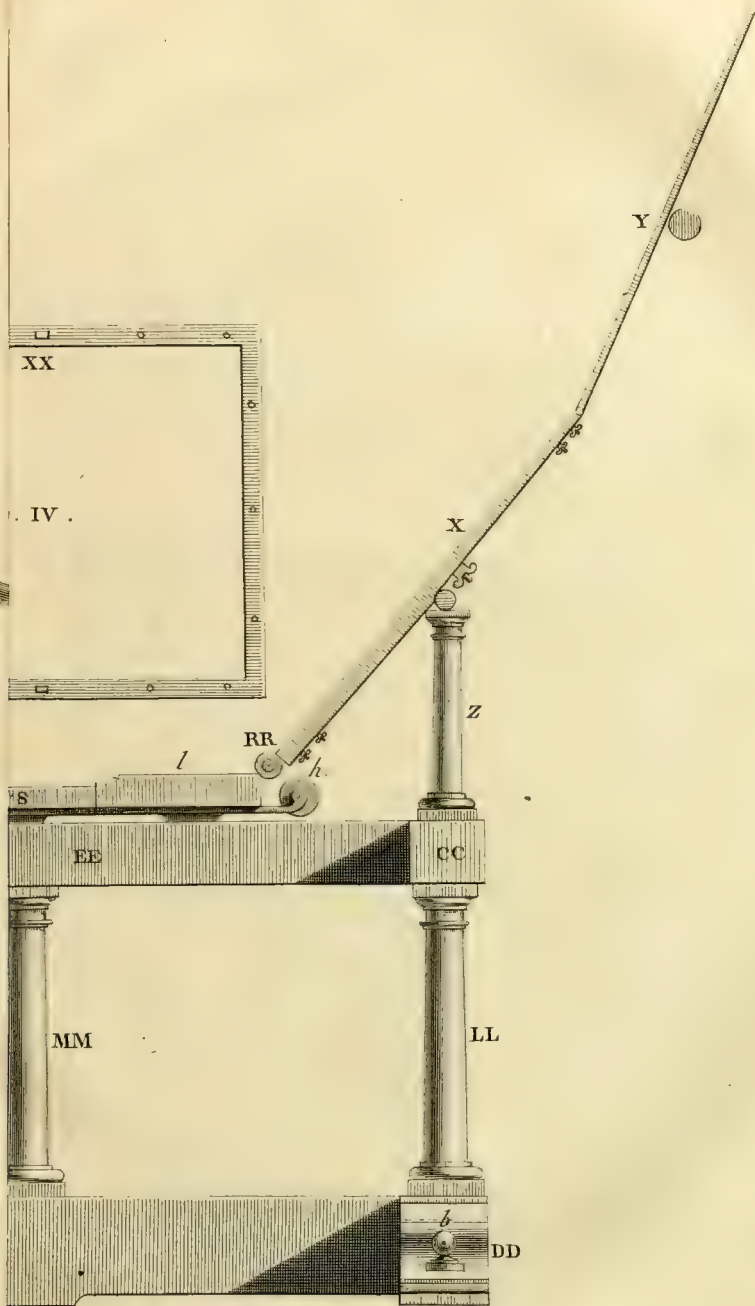
N n n n

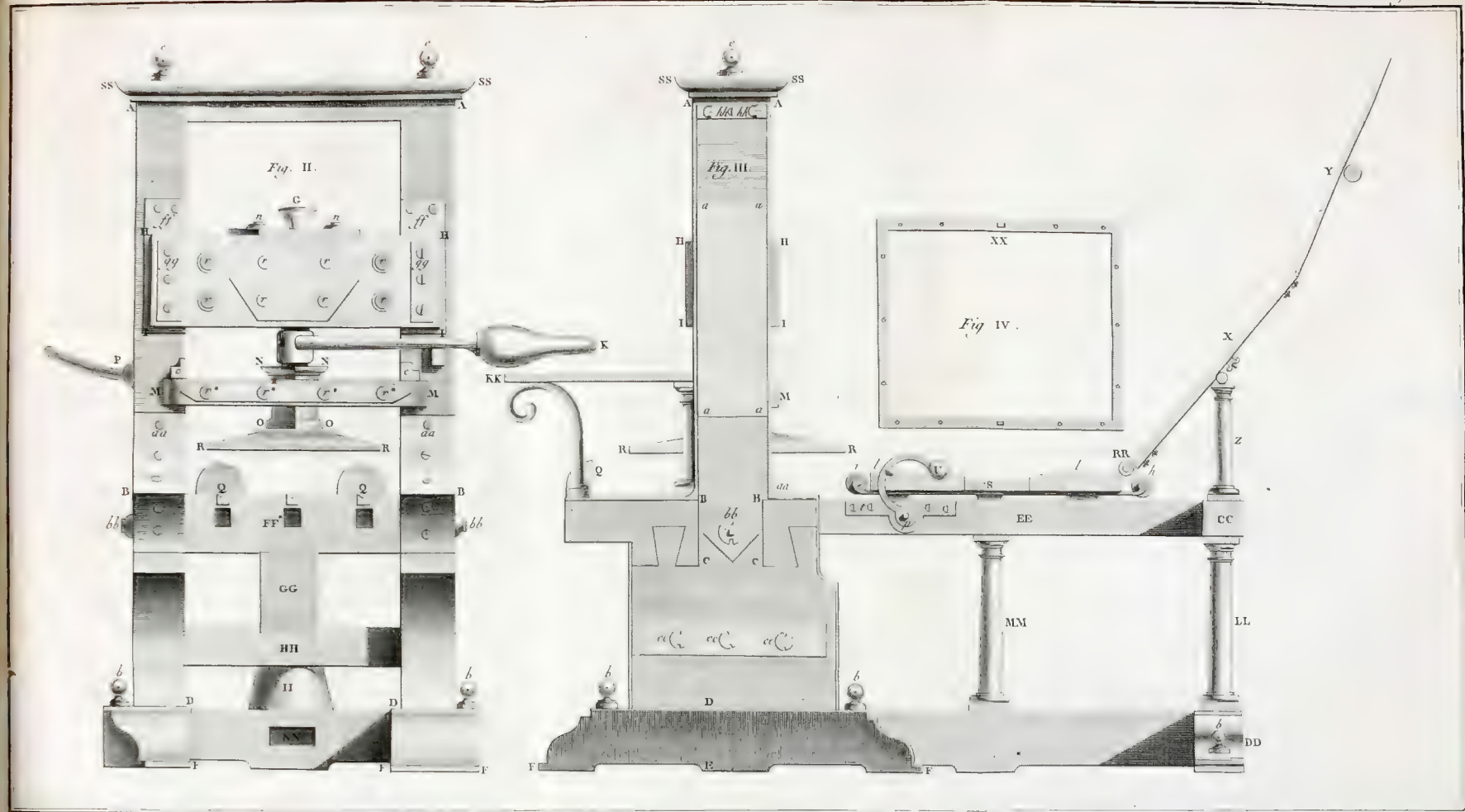
- I, II**..... *ff*..... Plaques de cuivre dont sont armées les jumelles extérieurement, & liées aux plaques d'acier intérieures par des boulons à tête perdue.
- I, II**..... *gg*..... Plaques de cuivre qui arment le sommier en dehors, & qui servent de rondelles aux boulons qui attachent les plaques d'acier sur lesquelles s'opère le frottement du sommier contre les jumelles.
- f, III**..... *hh*..... Boulons qui lient les jumelles avec le chapiteau.
- I, V**..... *ii*..... Talons de cuivre sur lesquels appuient les vis de pression.
- XXIII**..... *kk*..... Trou pratiqué au centre de la platine, où s'introduit le pivot *UU* du bas de la vis.
- VI**..... *ll*..... Traverse de bois qui assemble celles du berceau, & supportée dans son milieu par la colonne *MM*.
- I, VI**..... *mm*..... Chevalet qui supporte le grand tympan.
- XXV, XXVI**..... *nn*..... Clés de bois qui maintiennent les deux parties de la moise; la *fig. XXV* en montre les mortaises.











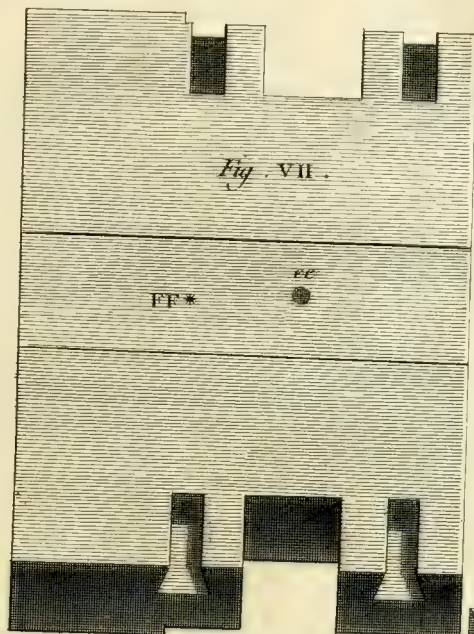
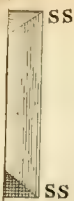


Fig. XII.

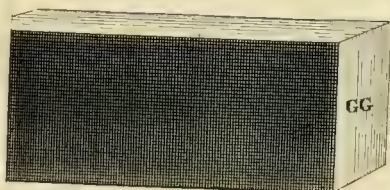
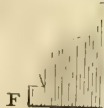


Fig. VIII.



Fig. XIV.



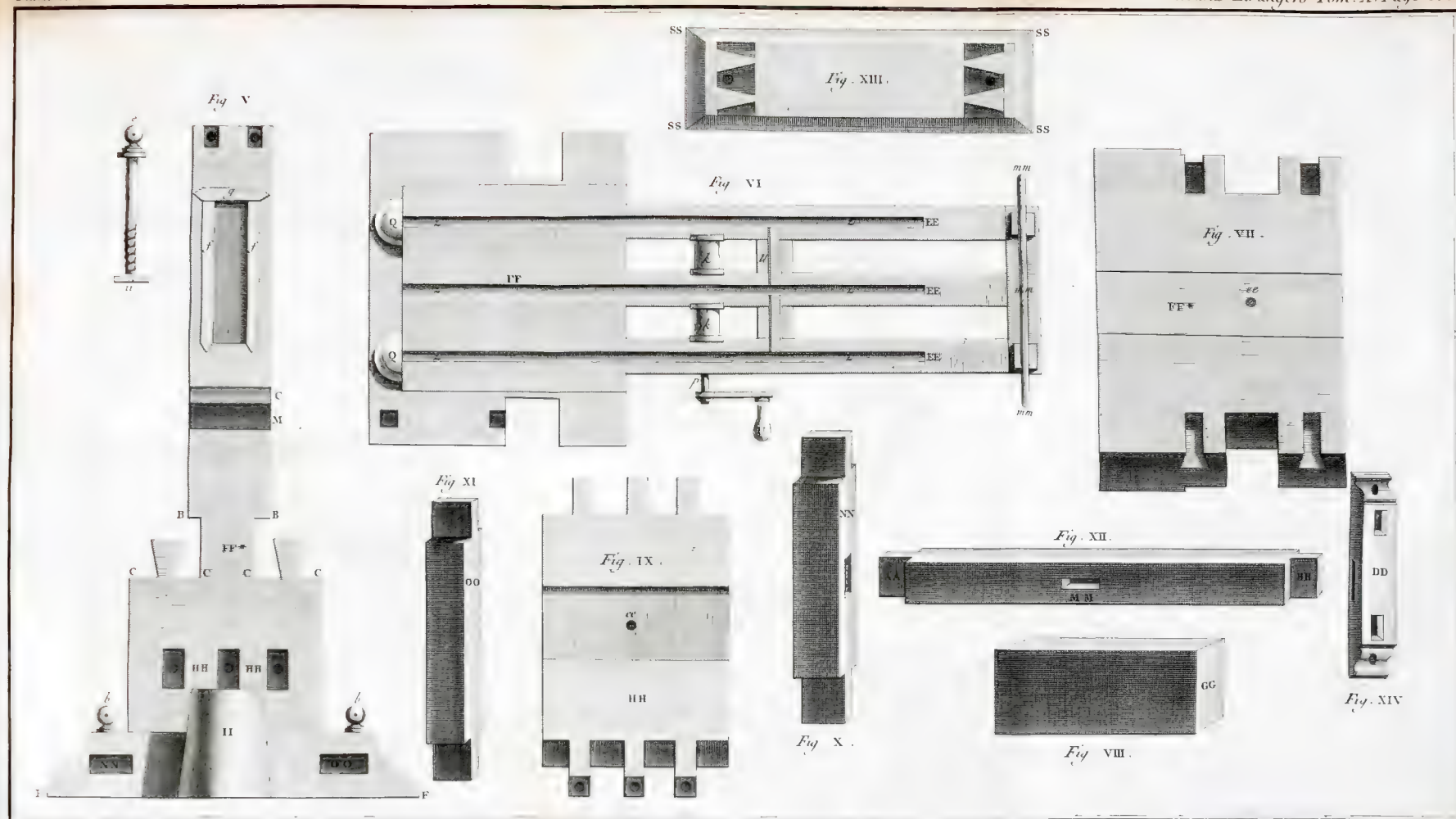


Fig. XV.

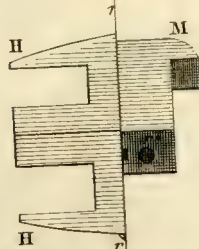


Fig. XVI.



Fig. XVII.



Fig. XVIII.



Fig. XXVI.

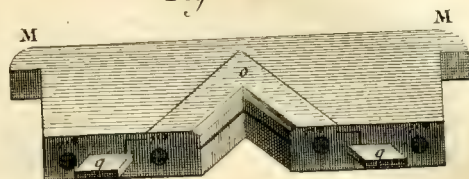


Fig. XXVIII.



Fig. XXVII.

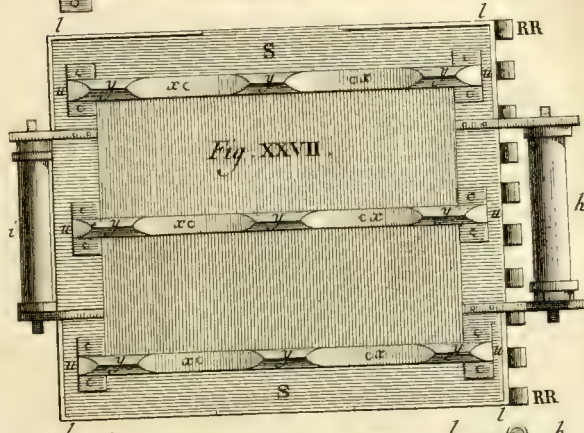


Fig. XXX.

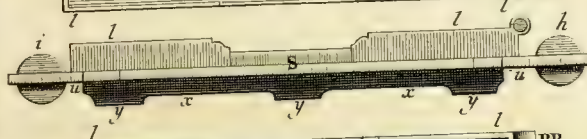
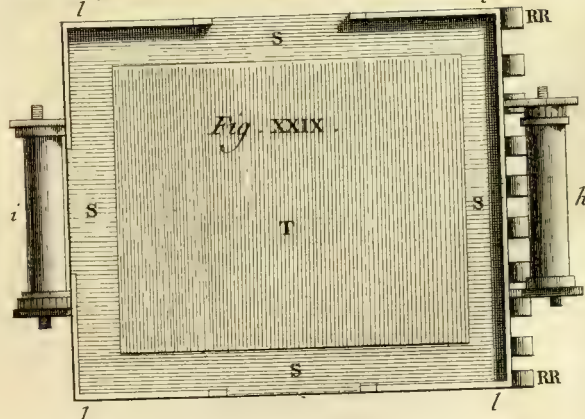


Fig. XXIX.





M É M O I R E
SUR UN NOUVEAU GAS,

O B T E N U

PAR L'ACTION DES SUBSTANCES ALKALINES,

S U R

LE PHOSPHORE DE KUNCKEL.

PAR M. GENGEMBRE.

Lu à l'ACADÉMIE, le 3 Mai 1783.

COMME le phosphore de Kunckel est une substance dont la découverte n'est pas très-ancienne, ses différentes combinaisons avec les autres corps, & les altérations qu'il peut en recevoir, sont encore peu connues : mais ce qu'on fait sur cette matière combustible, suffit pour faire voir que ses propriétés ont un grand rapport avec celles du soufre.

N n n n ij

En effet, le phosphore comme le soufre donne par sa combustion un acide qui lui est particulier.

Il a, comme lui, deux sortes de combustion, l'une tranquille & lente, l'autre rapide & avec décrépitation.

Lorsqu'il brûle lentement, on obtient un acide différent de celui qui provient de sa combustion rapide, & qui paroît être à ce dernier, ce que l'acide sulfureux est à l'acide vitriolique : car cet acide, lorsqu'il est récent, est encore lumineux dans l'obscurité, & retient une légère odeur d'ail.

Quand on l'expose à l'air, il passe, au bout d'un temps plus ou moins long, à l'état d'acide phosphorique proprement dit ; & si, au lieu de le laisser à la simple température de l'atmosphère, on lui applique une plus forte chaleur dans un vaisseau ouvert, il s'en élève de temps en temps de petites flammes, qui sont probablement dues à ce que le phosphore n'est point entièrement brûlé. Ces propriétés peuvent se comparer à celles de l'acide sulfureux.

Le phosphore s'unit aussi à quelques substances métalliques, d'après les expériences de *M. Margraf*, à l'arsenic, au zinc, & au cuivre ; & s'il refuse de se combiner aux autres, c'est peut-être à cause de sa grande volatilité & de son extrême facilité à s'enflammer.

Enfin, le procédé par lequel on le retire de la substance qui le contient, est semblable à celui qu'on emploie pour obtenir le soufre artificiel.

Tous ces faits, qui indiquent entre le soufre & le phosphore une analogie assez marquée, m'ont donné l'idée d'examiner si elle se soutiendrait dans la combinaison du phosphore avec les alkalis, & s'il ne pourroit pas en résulter des espèces de foie de phosphore. Voici le détail de mes expériences.

J'ai mis de l'alkali fixe végétal caustique en digestion sur du phosphore ; au bout de quelques heures, j'ai aperçu une

multitude de bulles, très-petites, qui adhéroient à la surface du phosphore : alors j'ai exposé le tout à une chaleur de 35 à 40 degrés, pour accélérer l'action de l'alkali. A peine le phosphore a-t-il été fondu, qu'il s'est dégagé une odeur insupportable de poisson pourri, & une quantité assez considérable d'un gas particulier, qui s'enflammoit de lui-même & avec explosion, aussi-tôt qu'il avoit le contact de l'air.

Cette première épreuve m'a rendu certain que l'alkali agissoit d'une manière quelconque sur le phosphore ; mais pour connoître cette action & la nature du gas qui se dégageoit, il étoit nécessaire de répéter cette expérience sur des quantités déterminées, & avec un appareil propre à recueillir les fluides aériformes.

Pour cet effet, j'ai pris 1 gros 6,5 grains de phosphore ; que j'ai mis dans un petit matras, dont le col avoit été recourbé à la lampe d'Émailleur ; j'y ai ajouté 2 onces 7 gros 28,3 grains d'alkali végétal caustique en liqueur, qui, sur 12 onces d'eau distillée, contenoit 3 onces 6 gros d'alkali concret.

J'ai chauffé très-doucement ce mélange avec une lampe à esprit de vin ; il s'est fait une légère effervescence, l'alkali a pris une couleur plus foncée, & le gas a commencé à passer, d'abord avec l'odeur putride dont j'ai déjà fait mention, & sans s'enflammer ; mais bientôt après, chaque bulle qui s'échappoit du bec du matras, s'enflammoit avec bruit & produisoit une fumée blanche, qui prenoit la forme d'un anneau exactement rond, bien terminé, & dont le diamètre augmentoit à mesure qu'il s'élevoit dans l'air. Ce singulier phénomène dépend sans doute de la résistance uniforme de l'air. J'en ignore l'explication ; mais je l'avois déjà observé plusieurs fois dans la fumée des pièces d'artillerie.

Dans cette opération, qui a duré environ onze heures & demie, j'ai obtenu 80 pouces cubiques de gas, que j'ai reçus au dessus du mercure, dans cinq cloches différentes.

J'ai fait passer de l'eau distillée dans la première & la cinquième portion ; à l'instant où l'eau a été en contact avec le gas , il s'est élevé dans les cloches un nuage blanc , qui a subsisté pendant deux ou trois minutes ; l'absorption par l'eau a été d'environ un cinquante-sixième du volume du gas.

J'ai introduit ensuite , sous les deux mêmes cloches , quelques bulles d'air commun ; à chaque bulle qui venoit crever à la surface du mercure , le gas s'enflammoit spontanément , & il se formoit des vapeurs jaunâtres , qui se condensoient sur les parois des vaisseaux & dans l'eau qu'on y avoit fait passer (*). Les mêmes phénomènes ont eu lieu avec l'air vital , & d'une manière beaucoup plus marquée. J'ai été curieux de voir combien il faudroit ajouter d'air vital pour faire brûler spontanément toute la portion du gas qui en étoit susceptible ; car il en restoit toujours une grande quantité qui ne s'enflammoit plus d'elle-même. J'ai donc introduit sous une cloche près de six pouces cubiques du gaz dont il s'agit , & j'y ai mêlé peu à peu de l'air vital , jusqu'à ce qu'il n'y ait plus eu d'inflammation spontanée. Le volume de l'air employé s'est trouvé de 300 lignes cubiques , & celui du gas a été diminué d'environ 100 lignes cubiques ; diminution qui est aux 300 lignes d'air vital , comme une quantité donnée de phosphore est à celle de l'air qu'il absorbe pendant sa combustion.

En effet , on verra dans ce Mémoire , que le gas dont nous nous occupons pèse à peu près le double de l'air vital ; les 100 lignes équivalent donc à 200. Ainsi le rapport des deux airs confondus est celui de 2 à 3 , le même que les Chimistes ont reconnu dans la proportion de l'air que le phosphore absorbe en brûlant.

Le gas , qui ne s'enflammoit plus de lui-même , a cependant fait une vive explosion , accompagnée d'une flamme & d'une

(*) Cette expérience n'est pas sans danger ; il faut avoir soin de la faire dans des vases très-épais ; sans cette précaution , leur rupture est inévitable.

fumée blanches, lorsque j'ai présenté à l'orifice du vase qui le contenoit, un papier blanc allumé; mais tout le gas ne s'est point consumé à la fois, il en est resté au fond du vase une portion qui a continué de brûler tranquillement, avec une flamme verte, de même que le papier avec lequel on l'avoit allumé.

Ce gas répandoit, en brûlant, l'odeur du phosphore en déflagration, & laissoit après sa combustion une matière jaunâtre, semblable à celle qui avoit été produite par l'inflammation spontanée. Cette matière étoit en partie lumineuse dans l'obscurité & à l'air libre, ce qui prouve qu'elle contenoit un peu de phosphore.

L'eau, qui en avoit dissous une certaine quantité, étoit manifestement acide au goût, & rougissoit le papier bleu; mais elle ne précipitoit pas sensiblement l'eau de chaux, quoique le gas, restant après l'inflammation spontanée, la précipitât un peu sans diminuer de volume.

Comme on s'est aidé de la chaleur, dans l'opération précédente; il pourroit paroître douteux que ce gas (que j'appellerai *gas phosphorique inflammable*) fût produit par l'action de l'alkali; mais on obtient à froid un gas semblable à celui que je viens de faire connoître, à l'exception qu'il s'enflamme plus difficilement de lui-même, qu'il perd cette propriété au bout d'un espace de temps assez court, & que les premières portions en sont totalement privées; mais cette différence même n'est pas très-considérable, car le gas phosphorique, obtenu à l'aide de la chaleur, devient aussi peu à peu moins capable de s'enflammer spontanément, à mesure qu'il se condense du phosphore sur les parois des vaisseaux. Il paroît d'ailleurs que les premières portions contiennent moins de matière inflammable d'elle-même que les autres, puisque peu d'un mois après l'opération, celles-ci prenoient encore feu très-facilement, aussi-tôt qu'elles étoient mêlées à l'air; tandis que celles là ne jouissoient déjà plus de cette propriété :

peut-être cela dépend-il de la pureté du gas phosphorique ; qui se trouve mélangé lorsqu'il commence à se dégager d'une plus ou moins grande quantité d'acide crayeux dû à l'alkali : car on ne sauroit se flatter d'avoir un alkali fixe si caustique, qu'il ne retienne encore une quantité considérable de cet acide, sur-tout lorsqu'il est aussi concentré que celui dont je me suis servi.

Après avoir examiné les propriétés du gas phosphorique, j'ai pesé la combinaison qui étoit dans le matras ; elle avoit perdu 6,3 grains de son poids, ce qui donne pour pesanteur spécifique du gaz, environ 0,8 de grain le pouce cubique : mais il faut remarquer que cette pesanteur doit être bien moins considérable, car la chaleur avoit volatilisé un peu d'eau, & même un peu de phosphore, puisque l'intérieur des cloches en étoit tapissé.

Pour savoir si l'alkali étoit décomposé, ou s'il tenoit du phosphore en dissolution, je l'ai saturé d'acide vitriolique médiocrement concentré. Il s'est précipité une poudre noirâtre, mais en si petite quantité, qu'il m'a été impossible de la peser exactement. Jetée sur un morceau de fer rouge, elle a brûlé avec la flamme & l'odeur du phosphore.

Il a fallu, pour arriver au point de saturation, 1 once 1 gros 13,2 grains d'acide ; ce qui est, à 1,7 grains près, la quantité d'acide nécessaire pour saturer une dose d'alkali égale à celle que j'avois employée ; erreur trop petite pour qu'on puisse en répondre.

Il me semble qu'on peut conclure de ce dernier fait, que le gas phosphorique est entièrement dû au phosphore, s'il n'est peut-être le phosphore lui-même, à l'état de fluide élastique ou dissous dans un autre gas ; au moins l'odeur qu'il fait sentir en brûlant, & l'acidité manifeste de son résidu, paroissent indiquer la nécessité de choisir entre ces deux opinions. Quelques faits particuliers, qui ne sont point encore suffisamment éclaircis, me font pencher pour la dernière.

L'alkali

L'alkali minéral présente absolument les mêmes phénomènes avec le phosphore.

L'alkali volatil ne l'attaque que très-faiblement ; car si l'on fait digérer de l'alkali volatil sur du phosphore , on n'a que du gas alkalin , qui à la vérité retient une légère odeur phosphorique ; mais il est absorbable en entier par l'eau , & n'est point inflammable.

Le lait de chaux a aussi donné du gas phosphorique par son mélange avec le phosphore ; & il m'a paru que ce gas , quoiqu'en plus petite quantité que dans l'opération où j'avois employé de l'alkali , contenoit proportionnellement plus de matière inflammable d'elle-même.

Tout ce qui précède est très-comparable à la manière dont le soufre se comporte avec les substances alkales.

1°. On a beaucoup plus de peine à combiner le soufre avec l'alkali volatil , qu'avec les deux alkalis fixes , & on est obligé , pour y parvenir , d'employer des procédés particuliers. Peut-être par les mêmes opérations réussiroit-on à faire agir l'alkali volatil sur le phosphore.

2°. Le gas hépatique est évidemment , à l'égard du soufre , ce que le gas phosphorique est à l'égard du phosphore ; tous deux ont une odeur singulièrement fétide , tant qu'ils ne sont point enflammés , mais qui se change , lorsqu'ils brûlent , en une odeur toute différente & semblable à celle de l'acide : que chacune des matières dont ils sont tirés , fournit par sa combustion lente.

3°. Enfin , non seulement le gas hépatique répand en brûlant l'odeur vive & pénétrante de l'acide sulfureux ; mais il dépose même , pendant sa combustion , une poudre jaune qui , lavée par l'eau , lui donne des caractères d'acidité , & dont l'identité avec le soufre est prouvée par la flamme bleuâtre &

658 MÉMOIRE SUR UN NOUVEAU GAS.

l'odeur sulfureuse qui s'en exhalent, lorsqu'on la jette sur des charbons ardens.

Il reste maintenant à connoître plus particulièrement l'état de la combinaison qui s'est formée pendant le dégagement du gas phosphorique, & à déterminer si ce gas est une dissolution de phosphore dans un autre gas, & quelle est la nature de ce dernier. C'est ce que je me propose d'examiner dans un autre Mémoire.

FIN du Tome X des Savans Étrangers.



PLANISPHERE CÉLESTE, CHINOIS.

PAR M. DEGUIGNES le fils.

J'AI dressé ce Planisphère céleste d'après un Ouvrage Chinois, intitulé : FANG-SING-TOU-KIAI, ou *Explication de la Table de toutes les Étoiles*, fait à la Chine en 1711, par le P. Grimaldy. Ce Missionnaire, comme le P. Pardies, a divisé tout le ciel en six Cartes, deux pour les deux poles, & les quatre autres pour les étoiles placées des deux côtés de l'équateur. Il y a tracé l'équateur, l'écliptique, les deux tropiques, les colures & des degrés, ce que les Chinois ne font point sur leurs Cartes. Cet Ouvrage, bon pour un Chinois, parce qu'il y reconnoît toutes ses constellations rangées dans le même ordre qu'il les voit au ciel, n'est d'aucune utilité pour nous autres Européens qui ignorons la forme & les noms que les Chinois leur donnent, parce que ces Cartes célestes ne représentent aucunes de nos figures, de nos signes & de nos constellations. J'avois d'abord copié, avec la plus grande exactitude, les Cartes du P. Pardies ; mais, pour me conformer au désir de l'Académie, j'ai adopté celles de M. de la Hire, en deux feuilles, sur lesquelles j'ai appliqué mon travail ; ainsi,

Tome X. A

ANNÉE 1781.

sur toutes nos figures, on trouvera celles que les Chinois donnent à leurs constellations, en quoi le P. Grimaldy m'a été d'un grand secours. Aucune de ces constellations ne se rapporte aux nôtres; elles sont plus ou moins étendues, en sorte qu'une partie, par exemple, est dans un de nos signes, & le reste dans un autre. J'ai conservé les formes chinoises de ces constellations, & comme les Chinois, j'ai réuni chaque groupe par des lignes; mais j'ai marqué par des lignes doubles celles qui forment leur Zodiaque, qui sont au nombre de vingt-huit constellations. Il est bon d'observer qu'ils donnent à leur Zodiaque plus de largeur que nous n'en donnons au nôtre. Toutes les autres constellations sont tracées en lignes simples. J'ai appliqué les noms à toutes celles qui en portent, soit que ces noms appartiennent à une constellation en général, soit qu'ils servent à désigner chacune des étoiles d'une constellation; car quelquefois les Chinois ont ainsi désigné, par un nom particulier, chaque étoile d'une constellation; mais ils ne l'ont pas toujours fait. Ces noms ont rapport au Gouvernement entier de la Chine, c'est-à-dire que les Chinois ont mis dans le ciel l'Empereur, le Prince héritier, les femmes de l'Empereur, ses fils, ses enfans, les titres de dignités de l'Empire & des Tribunaux, les Tribunaux eux-mêmes; ils ont aussi donné aux étoiles des noms de royaumes, de provinces, de fleuves, de lacs, de villes, de places, &c.; des noms d'animaux, tels que le loup, le bœuf, le chien; des noms de grands Hommes, des noms d'étendards, de tambours, de différens instrumens, tels que l'aune, le boisseau, le panier, le croc, &c. J'ai employé partout les lettres grecques de Bayer; mais pour les étoiles où il ne les a pas mises, je me suis servi du Planisphère de M. l'Abbé de la Caille. Il y a d'autres étoiles auxquelles je n'ai pu mettre de lettres, parce qu'elles ne sont pas sur nos Planisphères, comme il y en a des nôtres qui n'existent pas dans les Planisphères chinois; de même aussi chez eux, il y a des étoiles auxquelles ils n'ont point assigné de nom, & qui ne tiennent à aucunes de leurs constellations; je les ai conservées cependant sur la Carte que je présente.

PLANISPHERE CÉLESTE, CHINOIS.

3

On fera sans doute surpris de trouver au pôle austral plusieurs des noms qui ne sont qu'une traduction de ceux que ces mêmes étoiles portent sur nos Planisphères. Les Chinois ne pouvant voir ces étoiles de chez eux, ne les ont point désignées, ce qui a déterminé le P. Verbiest à remettre sur leurs Planisphères nos constellations méridionales, & les noms que nous leur avons assignés, & les Chinois les ont adoptées depuis ; telles sont :

HO-NIAO , *oiseau de feu*, le phœnix.

HO , *oiseau des bords de la mer*, qui mange les poissons & les serpents, la grue.

NIAO-HOEI , *bec d'oiseau* qui répond au bec du toucart.

CHE-CHEU , *tête de serpent* qui répond à la tête de l'hydre.

CHE-FO , *ventre de serpent* qui répond au ventre de l'hydre.

CHE-OUEY , *queue de serpent* qui répond à la queue de l'hydre.

KIN-YU , *poisson d'or* qui répond à la dorade.

FY-YU , *poisson volant* qui répond au poisson volant.

MA-FO , *ventre de cheval* qui répond au ventre du centaure.

MA-OUEY , *queue de cheval* qui répond à la queue du centaure.

CHE-TSU-KIA , *signe de la croix* qui répond à la croix.

MIE-FUNG , *abeille* qui répond à notre abeille.

SAN-KIO-HING , *figure des trois cornes*, le triangle australe.

Y-TSIO , *petit oiseau admirable* qui répond à l'apus ou avis indica.

KUNG-TSIO , *paon*, c'est la constellation du paon.

PO-SU , *le Persan* qui répond à l'Indien , &c.

J'ai joint à mon Planisphère la Table des vingt-quatre TSIE-KY par lesquels les Chinois divisent leur Zodiaque ; ces divisions de quinze en quinze degrés semblent désigner plutôt la température de l'air que des constellations , de plus, les douze signes célestes qui sont chacun de trente degrés : j'y ai ajouté aussi le cycle de 60 qui sert à compter les jours & les années. Les Chinois , dans leurs observations , indiquent le jour par ce cycle ; ainsi ils disent : Telle comète parut à la première Lune au jour KIA-TSE , c'est-à-dire , au 1 du cycle. Parmi le grand nombre des constellations chinoises , il y en a quelques-unes

qui s'accordent assez bien avec les nôtres, c'est-à-dire qu'elles ont la même situation & la même dénomination ; telles sont celles du Scorpion. Les Chinois ont appelé depuis très-long-temps *SIN* ou le *cœur* les trois étoiles du dos du Scorpion que nous nommons aussi le *cœur* ; de même la queue est désignée par le mot *OUY*, qui , dans leur Langue, signifie également la *queue*. Par quel hasard ces Peup'es si éloignés ont-ils appliqué à ces deux groupes les mêmes noms que nous leur donnons ?

Pour rendre ce Planisphère plus utile , j'y ai joint une Table alphabétique des noms de toutes les constellations & étoiles chinoises, & les lettres qui indiquent la place qu'elles occupent dans nos Planisphères. On y trouvera donc non seulement les noms de chaque groupe ou signe , mais encore ceux de chaque étoile en particulier , lorsque les Chinois leur en ont assigné , selon l'ordre alphabétique.

L'Ouvrage du P. Grimaldy est à la Bibliothèque du Roi , ainsi que celui du P. Noël qui a donné un Catalogue de toutes les étoiles chinoises , avec différentes observations Astronomiques. J'ai comparé mon Catalogue , auquel j'ai ajouté quelques autres étoiles dont il est fait mention dans différens Livres chinois , avec celui du P. Noël. J'ai vu par - là que plusieurs constellations que j'avois , manquoient dans ce dernier ; qu'il y avoit des fautes d'impression dans les noms de plusieurs ; je les ai corrigées : mais afin que ceux qui se sont servi du P. Noël pussent reconnoître les étoiles , j'ai conservé dans ma Table les fautes de ce dernier , en renvoyant à la vraie leçon. Le P. Noël , pour indiquer les étoiles chinoises , a adopté l'ordre de nos constellations , & par - là il s'est trouvé obligé de couper celles des Chinois , parce que plusieurs de celles-ci entrent dans deux & même dans trois de nos constellations : par ce moyen , dans son Catalogue , il semb'e les avoir multipliées , & on est incertain si c'est la même ou une autre constellation , ce qui ôte la facilité de connoître exactement le vrai système chinois ; on le trouvera tout entier & sans cet inconvénient dans mon Planisphère , auquel se rapporte la Table alphabétique. Pour me

conformer au désir de l'Académie, j'ai joint aux constellations & aux étoiles la traduction que le P. Noël en a donnée. On trouve encore à la Bibliothèque du Roi un autre Planisphère d'une grandeur prodigieuse, également dressé par nos Missionnaires, mais si mal imprimé qu'on a beaucoup de peine à reconnoître les noms & le nombre des étoiles de chaque constellation.

C'est à l'instigation de M. le Monnier que j'ai entrepris ce travail, & j'espère qu'il pourra être utile à tous les Astronomes qui voudront se servir des anciennes observations faites à la Chine; la difficulté de reconnoître les noms des étoiles, & la place qu'elles occupent par rapport aux nôtres, a été jusqu'à présent un obstacle presque insurmontable.

TABLE des vingt-quatre TSIEN-KY.

1	LY-TCHUN.....	Commencement du printemps, correspond au	15 ^e d.	du Verseau.
2	YU-CHOUI.....	Eau de pluie,	1 ^{er} d.	des Poissons.
3	KING-TCHE.....	Mouvement des reptiles,	15 ^e d.	des Poissons.
4	TCHUN-FUEN.....	Equinoxe du printemps,	1 ^{er} d.	du Belier.
5	TSING-MING.....	Clarté pure,	15 ^e d.	du Belier.
6	KO-YU.....	Pluie fructifiante,	1 ^{er} d.	du Taureau.
7	LY-HIA.....	Commencement de l'été,	15 ^e d.	du Taureau.
8	SIAO-MUON.....	Petite abondance,	1 ^{er} d.	des Gemeaux.
9	MANG-TCHONG.....	Semence du froment & du riz,	15 ^e d.	des Gemeaux.
10	HIA-TCHI.....	Solstice d'été,	1 ^{er} d.	de l'Écrevisse.
11	SIAO-TCHU.....	Petite chaleur,	15 ^e d.	de l'Écrevisse.
12	TA-TCHU.....	Grande chaleur,	1 ^{er} d.	du Lion.
13	LY-TSIEOU.....	Commencement de l'automne,	15 ^e d.	du Lion.
14	TCHU-TCHU.....	Fin de la chaleur,	1 ^{er} d.	de la Vierge.
15	PE-LOU.....	Rosée blanche,	15 ^e d.	de la Vierge.
16	TSIEOU-FUEN.....	Equinoxe d'automne,	1 ^{er} d.	de la Balance.
17	HAN-LOU.....	Rosée froide,	15 ^e d.	de la Balance.
18	LOU-KIANG.....	Braine tombante,	1 ^{er} d.	du Scorpion.
19	LY-TONG.....	Commencement de l'hiver,	15 ^e d.	du Scorpion.
20	SIAO-SIUE.....	Petite neige,	1 ^{er} d.	du Sagittaire.
21	TA-SIUE.....	Grande neige,	15 ^e d.	du Sagittaire.
22	TONG-TCHI.....	Solstice d'hiver,	1 ^{er} d.	du Capricorne.
23	SIAO-HAN.....	Petit froid,	15 ^e d.	du Capricorne.
24	TA-HAN.....	Grand froid,	1 ^{er} d.	du Verseau.

LES DOUZE SIGNES CÉLESTES DES CHINOIS.

Ces Signes ont , comme les nôtres , chacun trente degrés.

<i>Les douze Signes du Zodiaque du temps des HAN , tirés du P. Gaubil.</i>	
HAI-KONG.....correspond aux Poissons.	KIANG-LEOU..... au Belier.
SU-KONG..... au Belier.	TA-LEANG..... au Taureau.
YEOU-KONG..... au Taureau.	CHESTCHIN..... aux Gemeaux.
CHIN-KONG..... aux Gemeaux.	CHUN-CHEOU..... à l'Ecrevisse.
OUI-KONG..... à l'Ecrevisse.	CHUN-HO..... au Lion.
OU-KONG..... au Lion.	CHUN-OUEI..... à la Vierge.
SU-KONG..... à la Vierge.	CHEOU-SING..... à la Balance.
CHIN-KONG..... à la Balance.	TA-HO..... au Scorpion.
MAO-KONG..... au Scorpion.	SI-MOU..... au Sagittaire.
YN-KONG..... au Sagittaire.	SING-KI..... au Capricorne.
CHEOU-KONG..... au Capricorne.	HIUEN-HIAO..... au Verseau.
TSE-KONG..... au Verseau.	TSIU-TSU ou TSEOU-TSE..... aux Poissons.

Les Chinois divisent encore le ciel en quatre régions ou parties , dans chacune desquelles ils mettent sept constellations ; ainsi dans ce qu'ils appellent la région Orientale du ciel , sont les constellations KIO , KANG , TY , FANG , SIN , OUEI , KI.

La partie Septentrionale comprend les constellations TEOU ou NAN-TEOU , NIEOU , NIU , HIU , GOEY , CHE , PIE.

La partie Occidentale comprend les constellations KUEY , LEOU , GUEY , MAO , PY , TSU & TSAN.

La partie Méridionale comprend les constellations TSING , KUEY , LIEOU , SING , TCHANG , YE , TCHIN.

LE CYCLE de 60, dont les Chinois se servent pour compter les années & les jours.

PLANISPHERE CÉLESTE, CHINOIS.

7

1 KIA-TSE.	11 KIA-SU.	21 KIA-CHIN.	31 KIA-OU.	41 KIA-CHTN.	51 KIA-IN.
2 Y-TCHEOU.	12 Y-HAY.	22 Y-YEOU.	32 Y-OU.	42 Y-SE.	52 Y-MAO.
3 PING-IN.	13 PING-TSE.	23 PING-SU.	33 PING-CHIN.	43 PING-OU.	53 PING-CHIN.
4 TING-MAO.	14 TING-TCHEOU.	24 TING-HAI.	34 TING-YEOU.	44 TING-OU.	54 TING-SE.
5 YOU-CHIN.	15 YOU-IN.	25 YOU-TSE.	35 YOU-SU.	45 YOU-CHIN.	55 YOU-OU.
6 KY-SE.	16 KI-MAO.	26 KI-TCHEOU.	36 KI-HAI.	46 KI-YEOU.	56 KI-OU.
7 KENG-OU.	17 KENG-CHIN.	27 KENG-YN.	37 KENG-TSE.	47 KENG-SU.	57 KENG-CHIN.
8 SIN-OU.	18 SIN-SE.	28 SIN-MAO.	38 TSIN-TCHEOU.	48 SIN-HAY.	58 SIN-YEOU.
9 GIN-CHIN.	19 GIN-OU.	29 GIN-CHIN.	39 GIN-IN.	49 GIN-TSE.	59 GIN-SU.
10 KUEY-YEU.	20 KUEY-OU.	30 KUEY-SE.	40 KUEY-MAO.	50 KUEY-TCHEOU.	60 KUEY-HAI.

OBSERVATIONS sur l'Orthographe Chinoise.

C doit se prononcer comme *ts*.

Ch doit se prononcer comme *tch* ; en conséquence , j'ai rangé sous le *Ç* le *ts* & *tch* ; par exemple , *çan* , lisez *TSAN* ; *çao* , lisez *TSAO* ; *chang* , lisez *TCHANG* ; *chu* , lisez *TCHU* ; *chong* , lisez *TCHONG*.

Ch de nos Missionnaires François doit être prononcé sans *t* comme dans *chameau* , il est rangé dans l'*x*.

I ou *Y*. Les Chinois n'ont qu'un *i* , ainsi ces deux lettres sont placées ensemble.

K est le même que *Q* ; quelques Missionnaires se sont servi de *Q* comme *QUANG*, *QUON* ; on trouve ces mots dans le *K*, *KUANG* , *KUON*.

M à la fin des mots est la même chose que *ng* ; ainsi *mim* est le même que *MING* ; de même *mam* ou *MANG* , *vam* ou *VANG*.

T, le *ts* & le *tch* des Missionnaires François sont placés sous le *Ç* & le *Ch*.

V & *u* est souvent prononcé *ou*.

X. Les Missionnaires Portugais & Espagnols se sont servi de cette lettre pour exprimer le *ch* prononcé comme dans *chameau* , *cheval* , &c. Ce *ch* doit être par conséquent distingué du *ch* qui est prononcé *tch* ; en conséquence , je l'ai placé dans l'*x* ; ainsi *xang* , voyez *CHANG* ; *xy* , voyez *CHI* ; *xe* , voyez *CHE* ; *xouy* , voyez *CHOUI*.



T A B L E

DE TOUTES LES CONSTELLATIONS ET ÉTOILES CHINOISES.

Ç ou Ts.

TSAN, *trois*, une des vingt-huit constellations, composée de dix étoiles α , γ , ξ , ϵ , δ , κ , β , ι , θ , C d'Orion.

TSAN-KY, *drapeau peint de dragons qu'on met dans les chars*, constellation composée de neuf étoiles, 1 & 2 de O, G, 1 & 2 de π , 1 & 2 de ζ , & deux autres petites d'Orion.

TSAO-FU, *nom d'homme*, constellation composée de six étoiles, μ , ξ , ϵ , δ , λ , ν , de la tête de Céphée.

TSE, *livre*, étoile γ de Cassiopée.

TSE-OUEY-KONG, *palais*, le même que TSU VI-KONG.

TSY, *pays*, étoile du rameau d'Hercule.

TSY, *pays*, étoile ω du Capricorne.

TSIE, *amas*, deux étoiles devant le front du Scorpion sur l'écliptique. Cette constellation du P. Noël n'est pas dans le Planisphere du P. Grimaldy.

TSIE-CHI, *amas de cadavres*, étoile π de la tête de Méduse.

TSIE-CHI-KY, *vapeurs que répandent les cadavres*, étoile ϵ ou nébuleuse du Cancer.

TSIE-CHOU, *amas d'eau*, étoile A de Persée.

TSIE KONG, *les sept Princes*, constellation composée de sept étoiles τ , ϕ , χ , ψ une petite d'Hercule, & μ , χ du Bouvier.

10 PLANISPHERE CÉLESTE, CHINOIS.

TSIE-SIN, *assemblage de bois*, étoile α des Gémeaux.

TSIE-SO, *soldats assemblés*, deux étoiles μ , ν du Loup.

TSIEN, *monnaie de cuivre*, étoile qui est dans le pied de devant des Gémeaux. Cette étoile n'est pas dans le Planisphere du P. Grimaldy.

TSIEN-TAY, *nom d'une tour*, constellation composée de quatre étoiles ι , δ , γ , β de la Lire.

TSIEOU-KY, *vasé à mettre du vin*, constellation composée de trois étoiles \downarrow , ξ , ω du Lion.

TSIN, *pays*, étoile δ du Serpentaire.

TSIN, *pays*, α d'Hercule.

TSIN, *pays*, β du Capricorne.

TSIN, *pays*, θ du Capricorne.

TSIN-HIEN, *produire un fœtus*, κ de la Vierge.

TSING, *puits*, une des vingt-huit constellations, composée de huit étoiles ϵ , D , ξ , λ , μ , ν , ζ , η des Gémeaux.

TSING-KIEOU, *colline d'azur*, constellation composée de trois étoiles β , ξ , σ de l'Hydre femelle.

TSO-CHI-FA, *Président du Tribunal de la gauche*, étoile η de la Vierge.

TSO-HIA, *crochet de la gauche que l'on met à l'effieu*, étoile η du Corbeau.

TSO-KENG, *soldats de la veille de la gauche*, constellation composée de cinq étoiles ν , μ , π , σ , δ du Belier.

TSO-KY, *étendard de la gauche*, constellation composée de huit étoiles dont α , β , γ , δ , ζ , χ , γ de la Flèche, & ρ de l'Aigle.

PLANISPHERE CÉLESTE, CHINOIS. 11

Tso-KY , *étendard du trône* , constellation composée de quatre étoiles dans le fouet du Cocher.

Tso-TCHE-TI ou Tso-NIE-TI , *levée de la gauche* , constellation composée de trois étoiles α , π , ζ du Bouvier.

Tso-TCHU , *gond des portes de la gauche* , étoile ι du Dragon.

Tsong-JIN , *homme honorable* , constellation composée de quatre étoiles P , O , N , K près le bras du Serpenteaire.

Tsong-KUON , *Préfet subalterne* , petite étoile du Lion.

Tsong-KUON , *les Affecteurs des Magistrats* , constellation composée de deux étoiles λ , γ du Loup.

Tsong-SING , *étoile de l'Empereur Tsong* , constellation composée de deux étoiles du rameau d'Hercule.

Tsong-TCHING , *le Président de la Cour de l'Empereur* , constellation composée de deux étoiles β , γ du Serpenteaire.

Tsu , *pays* , étoile A de la constellation du Capricorne.

Tsu , *cornes de Hibou* , le même que TSUY. Le P. Noël a traduit *Levres*.

Tsu , *fil* , constellation composée de β , γ de la Colombe.

Tsu , *latrine* , constellation composée de quatre étoiles α , β , δ , γ de la constellation du Lievre.

Tsu , *pays* ϵ du Serpenteaire.

Tsu-SIANG , *le second Conseiller de l'Empereur* , étoile δ de la Vierge.

Tsu-SIANG , *le second Conseiller* , étoile θ du Lion.

Tsu-TCHOUY , le même que TSUY.

Tsu-TSAO , *nattes* , constellation composée de six étoiles σ , ϵ , ρ , deux petites de la Baleine , & σ de l'Eridan.

TSU-TSIANG , *le second Général*, ϵ de la Vierge.

TSU-TSIANG , *le second Général*, ι du Lion.

TSU-KONG-YUEN , *murailles du palais Tfu*. Ce sont quinze étoiles qui entourent ce palais; d'un côté α , κ , λ du Dragon, & trois autres dans la Giraffe; de l'autre côté, ι , θ , η , ζ , χ du Dragon κ , γ de Céphée, & une petite dans la Renne.

TSU-VI-KONG, *palais Tfu-vi*, le même que TSE-OUEI-KONG. Ce palais est déterminé par le cercle de perpétuelle apparition des étoiles, ainsi les étoiles de ce palais ne se couchent pas. Il contient la grande & la petite Ourse, la Renne, une partie de Céphée, de Cassiopée, de la Giraffe & du Bouvier.

TSUY ou TSU , *les levres*, une des vingt-huit constellations, composée de trois étoiles χ & 1 & 2 de ϕ d'Orion.

CH ou TCH.

TCHANG , *ouverture*, une des vingt-huit constellations, composée de six étoiles ϕ , μ , λ , κ , & deux petites de l'Hydre femelle.

TCHANG-CHA , *nom de ville*, ζ du Corbeau.

TCHANG-GIN , *soldat*, constellation composée de α , ϵ de la Colombe.

TCHANG-YUEN , *grand mur*, constellation composée de quatre étoiles K, L, & deux petites du Lion.

TCHANG-TCHIN , *Préfet du palais*, constellation composée de trois étoiles dans les Chiens de chasse.

TCHAO , *pays*, petite étoile du Capricorne.

TCHAO , *pays*, étoile λ d'Hercule.

TCHAO-YAO , *qui appelle avec la main*, étoile γ du Bouvier.

Tche-fu , *lieu où l'on met les chars* , constellation composée de quatre étoiles ξ , ρ , A , G de la queue du Cygne & d'une petite du Lézard marin.

Tche - ki , *les cavaliers des chars* , constellation composée de trois étoiles ξ , ρ , β du Loup.

Tche - niu , *la fileuse* , constellation composée de trois étoiles α , ϵ , ζ du Vautour tombant.

Tche - su , *suite de chars* , constellation composée de deux étoiles σ , ν du Serpent , appelée par le P. Noël Kiu-su.

Tche-ti , voyez Tso-tche-ti & Yeu-tche-ti.

Tche-tao , *voie rouge* , l'Equateur.

Tcheou ou Tcheu , *pays* , étoile η du Capricorne.

Tcheou , *pays* , étoile β du Serpent.

Tcheou-ting , *trépied des Teheou* , constellation composée de trois étoiles de la chevelure de Bérénice.

Tchin , *timon* , une des vingt-huit constellations , composée de quatre étoiles β , γ , δ , ϵ du Corbeau.

Tchin-kiu , *chars de guerre* , trois étoiles du Scorpion ; elles n'existent pas dans le P. Grimaldy.

Tchin-tche , *voie des Chariots* γ du Scorpion.

Tching , *pays* , γ du Serpent.

Tching , *pays* , petite étoile du Capricorne.

Tcho , le même que Pi ou Pie , Taureau.

Tchong-chan , *pays* σ d'Hercule.

Tchong-tay , *Président du milieu* , étoile λ , μ de la grande Ourse.

14 PLANISPHERE CÉLESTE, CHINOIS.

TCHU ou TCHOU , *colonne*, constellation composée de trois étoiles α L, & une du Centaure.

TCHU , *colonne*, constellation composée de G , K, I du Centaure.

TCHU , *colonne*, constellation composée de η , σ , ζ du Loup.

TCHU , *colonne*, constellation composée de trois étoiles χ , N, & une petite du Centaure.

TCHU , *colonne*, constellation composée de κ , ι , τ du Loup.

TCHU , *pilon*, étoile π de Pégase.

TCHU , *colonne*, constellation composée de ν , τ , ν du Cocher.

TCHU , *colonne*, constellation composée de χ & deux petites du Cocher.

TCHU , *colonne*, constellation composée de ϵ , η , ζ du Cocher.

TCHU , *pilon*, constellation composée de α , σ de l'Autel.

TCHU-SU , *l'Historigraphe de l'Empereur*, ϕ du Dragon.

TCHU-VANG , *tous les Rois*, constellation composée de six étoiles, dont trois entre la jambe gauche du Cocher & l'Ecliptique, τ & deux petites sur le front du Taureau.

TCHUEN-CHE , *les demeures des Coureurs*, constellation composée de cinq étoiles; les deux premières 1 & 2 de A de Cassiopée; la troisième ω de Cassiopée; la quatrième entre le pied de Cassiopée & le bras de Persée; la cinquième dans la Giraffe.

F.

FA , *punir*, constellation composée de ϕ , χ & une petite du Scorpion.

FA , *faute dans le P. Noël*, voyez TAY.

FA , *armes offensives*, constellation faisant partie de la grande constellation TSAN, l'une des vingt-huit, composée de C, θ , ι d'Orion.

FANG, *maison*, l'une des vingt-huit constellations, composée de quatre étoiles β , δ , π , ρ du Scorpion.

FI-YU, *poisson volant*, constellation composée de sept étoiles α , β , γ , δ , ϵ , ζ , η du Poisson volant.

FU-YUE, *nom d'homme*, nébuleuse proche la queue du Scorpion.

FU-YUE, *hache*, trois constellations composées chacune de trois étoiles; la première 1, & 2 de A & I; la seconde 1, 2, 3 de B; la troisième 1, 2, 3 de G du Verseau.

FU-KUANG, *porteur de paniers*, constellation composée de cinq étoiles B, C, D, o, & une petite du Dragon.

FU-LOU, *chemin*, étoile ζ de Cassiopée.

FU-PE, *blancheur attachée*, constellation composée de deux étoiles ν de l'Hydre de M. de la Caille, & γ de la Montagne de la Table, ou l'Hydre de M. de la Hire.

FU-SING, *étoile qui secoure*, G de la grande Ourse.

FU-TCHE, *hache*, constellation composée de cinq étoiles sur le ventre de la Baleine.

FU-ULH, *attaché à l'oreille*, σ du Taureau.

FUEN-MU, *sépulcre*, constellation composée de γ , η , ζ , π du Verseau.

G ou J.

GE, *le Soleil*, étoile λ de la Balance.

GIN-SING, *l'étoile de l'homme*, constellation composée de trois étoiles E, F, G, au dessus du petit Cheval.

GOEY, *pays*, étoile δ d'Hercule.

GOEY, *pays*, étoile χ du Capricorne.

GOEY, *danger*, l'une des vingt-huit constellations, composée de trois étoiles α du Verseau, & θ , ϵ de Pégase.

GOEY , *l'estomac* , une des vingt - huit constellations , composée de trois étoiles de la Fleur-de-lis.

H.

HAI-CHAN , *montagne maritime* , constellation composée de six étoiles dans le Rocher.

HAI-CHE , *Rocher de la mer* , constellation composée de cinq étoiles dans le Rocher , au bas du vaisseau.

HAN , *pays* , étoile ϕ du Capricorne.

HAN , *pays* , étoile ζ du Serpenteaire.

HENG , *Balance* , constellation composée de quatre étoiles τ , ν , ϕ , M du Centaure.

HEU ou HEOU , *dignité* , étoile α du Serpenteaire.

HEU-KONG , *palais de la Reine* , B de la petite Ourse.

HI - TCHONG , *nom d'homme* , constellation composée de quatre étoiles θ , ι , κ , ω du Cygne.

HIA-KIAI , étoile supérieure , ou ν de HIA-TAY.

HIA-TAY , *le troisième Président* , étoile ν , ξ de la constellation de la grande Ourse.

HIEN-YUEN , *nom d'homme* , constellation composée de seize étoiles ρ , α , σ , ζ , η , γ , λ , μ , ϵ , M , κ du Lion F , & une petite du petit Lion , & quatre autres du Linx.

HING-TCHIN , *faveur des Ministres* , petite étoile de la queue du Lion.

HIU , *vuide* , l'une des vingt-huit constellations , composée de deux étoiles α du petit Cheval , & β du Verseau.

HIU-LEANG , *porte ouverte de la cataracte* , constellation composée de quatre étoiles de κ du Verseau.

HIUEN-

HIUEN-KO, *lance bleue*, étoile λ du Bouvier.

HO, *oiseau qui mange les serpents & les poissons*, constellation composée de onze étoiles α , β , δ , ϵ , ξ , θ , ι , κ , μ , π de la Grue, & γ du Toucan.

HO, *espece de mesure*, constellation composée de trois étoiles; dont I, K de la massue d'Hercule & κ du Serpentaire.

HO-CHU, nom des étoiles NAN-HO & PE-HO.

HO-KIEN, *nom de ville*, étoile γ d'Hercule.

HO-KU, *tambour du fleuve Hoang-Ho*, constellation composée de trois étoiles α , β , γ de l'Aigle.

HO-NIAO, *oiseau de feu*, constellation composée de dix étoiles β , ρ , ι & 2 de λ , μ , κ , ϵ , θ , ι du Phœnix, & β du Sculpteur.

HO-TCHONG, *fleuve du milieu*, β d'Hercule.

HOA-KAI, *parasol, belle couverture*, constellation composée de quatre étoiles dans la Renne.

HOAN-TCHE, *Eunuque*, constellation composée de quatre étoiles L d'Hercule E, F, & une petite du Serpentaire.

HOANG-TAO, *voie jaune*, l'Ecliptique.

HU-CHE ou HOU-CHE, *qui tire des fleches*, constellation composée de dix étoiles ι , ξ , \omicron , κ , λ , γ du Vaisseau, & η , δ , ϵ , κ de Sirius.

HU-FEN, *gardes de l'Empereur*, étoile du petit Lion.

HU-KUA, *concombre*, constellation composée des quatre étoiles α , β , γ , δ du Dauphin.

HU-KUON, *souverain chasseur*, faute dans le P. Noël, voyez HU-FEN.

I ou Y.

Y-TSIO , *oiseau admirable* , constellation composée de dix étoiles, desquelles ζ , ι , β , α , ϵ , η de l'Apus, & ρ , π , κ , δ de l'Ostans.

YANG-MOEN , *porte du Yang*, constellation composée de deux étoiles π , ρ du Centaure.

YAO-KUANG , *agitation de la lumière* , étoile η de la constellation de la grande Ourse.

YE , *aile* , une des vingt-huit constellations, composée de vingt-deux étoiles α , β , δ , ϵ , ζ , η , θ , ι , λ , ν , cinq autres petites étoiles de la coupe χ du corps de l'Hydre femelle, & cinq autres en dehors.

YE-KY , *faisan* , constellation composée de cinq étoiles β , ν , ξ , deux petites de Sirius.

YE-TCHE , *hôte qui visite* , étoile C de la Vierge.

YEN , *pays* , étoile ζ du Capricorne.

YEN , *pays* , étoile ν du Serpenteaire.

YEU-CHI-FA , *règle des conditions de la droite* , (*espece de tribunal*) étoile β de la Vierge.

YEU-HIA , *crochet de la droite que l'on met à l'effieu* , étoile α du Corbeau.

YEU-KENG , *soldats de la veille de la droite* , constellation composée de cinq étoiles ρ , η , π , σ , & d'une petite des liens des Poissons.

YEU-KY , *étendard de la droite* , constellation composée de sept étoiles δ , μ , ν de l'Aigle, & ι , κ , σ , F d'Antinoüs.

YEU-TCHE-TI ou YEU-NIE-TI, *levée de la droite*, constellation composée des trois étoiles η , τ , ν du Bouvier.

YEU-TCHU, *le gond des portes de la droite*, étoile α de la constellation du Dragon.

YN-TE, *repos de la vertu*, deux petites étoiles proche la queue du Dragon.

ING-CHE, le même que CHE, voyez CHE.

YO-HENG, *tube pour regarder les Astres*, ϵ de la grande Ourse.

YO-HENG, voyez CHO du PE-TEU.

YO-TSING, *puits des pierres précieuses*, constellation de quatre étoiles β , \downarrow de l'Eridon, & de τ , λ d'Orion.

YU, *poisson*, étoile du pied du Serpenteaire.

YU-LIN-KIUN, *l'armée d'Yu-lin*, constellation composée de quatre étoiles χ , & 1, 2, 3 de \downarrow du Verseau.

YU-NIU, *filie impériale*, étoile π du Lion.

YU-SING, *faute dans le P. Noël*, voyez KIEN-SING.

YUE, *pays*, étoile \downarrow du Capricorne.

YUE, *la Lune*, étoile A du Taureau.

YUE, *la hache*, étoile η des Gemeaux.

YUN-YU, *les nues & la pluie*, constellation composée de quatre étoiles λ , κ des poissons, & de deux autres petites sur l'Ecliptique.

K ou Q.

KAY-YANG, *l'ouverture du Yang*, ζ de la grande Ourse.

KAY-OUO, *qui couvre les maisons*, étoile \circ de la constellation du Verseau.

KANG , *paille* , étoile proche le γ du Sagittaire.

KANG , *cour antérieure* , une des vingt-huit constellations , composée de quatre étoiles ν , ι , κ , λ de la Vierge.

KANG-PI , voyez KANG du Sagittaire.

KANG-TCHI , *étang profond* , constellation composée des quatre petites étoiles au dessus du TA-KIO du Bouvier.

KE-SING , *étoile des trois hôtes* , étoile nouvelle qui parut en 1572 , dans Cassiopée.

KENG - HO , *le fleuve Keng* , constellation composée de trois étoiles ρ , σ , ϵ du Bouvier.

KIU , *chien* , constellation composée de deux étoiles χ , H du Sagittaire.

KEU - KOUE , *royaume de Keu* , constellation composée de quatre étoiles A , B , C , ω du Sagittaire.

KLU-LING , *fennette du Harpon* , étoile ω du Scorpion.

KEU-TCHIN , *nom de femme* , constellation composée de six étoiles , dont η , ϵ , δ , α de la petite Ourse , une autre dans la Renne , & l'autre dans la jambe de Céphée.

KY , *crible* , une des vingt-huit constellations , composée de quatre étoiles δ , γ , ϵ , η du Sagittaire.

KY-KUON , *le Préfet de la Cavalerie* , constellation composée de trois étoiles θ , π , \circ du Loup.

KY-TCHIN-TSIANG-KIUN , *le Général de la Cavalerie* , étoile σ du Loup.

KIA-PE , *blancheur resserrée* , constellation composée de deux étoiles η , β du grand Nuage.

KIE , *son* , constellation composée de θ , & d'une petite du Verseau.

KIEN-PI , *Serrurier* , étoile ν du Scorpion.

KIEN-SING , *étoile du Tambour céleste* , constellation composée de six étoiles υ , ρ , D , σ , π , ξ du Sagittaire.

KIEU , *mortier* , constellation composée de trois étoiles ι , κ , μ du Pégase.

KIEU-HO , *nom de fleuve* , étoile μ d'Hercule.

KIEU-YEU , *gland des drapeaux des Vice-Rois* , constellation composée de huit étoiles μ , ω , & d'une petite de l'Eridan , plus cinq autres plus bas.

KIEU - KAN , *les neuf Kan* , constellation composée de quatre étoiles dans le Microscope.

KIEU-KING , *les six Tribunaux de la Cour suprême* , constellation composée de trois étoiles ρ , ι & κ de D de la Vierge.

KIEU-TCHEU-TCHU-YU , *les limites des provinces* , constellation composée de cinq étoiles υ , ξ , A , & d'une petite de l'Eridan.

KIN-YU , *poisson d'or* , constellation composée de quatre étoiles α , β , δ , ν de la Dorade.

KIO , *la corne* , une des vingt-huit constellations , composée de deux étoiles α , ζ , de la Vierge.

KIO de la gauche est le TIEN-TIEN.

KIU-KI , voyez TCHE-KI.

KIU-SU , le même que TCHE-SU.

KIUE-KIEU , faute dans le P. Noël , lisez KIUE-PING.

KIUE-PING , *soldats des passages* , constellation composée de deux petites étoiles sur le col de la Licorne.

KIEN-CHE , *langue embarrassée* , constellation composée de six étoiles ν , ϵ , ξ , ζ , σ , O de la constellation de Persée.

22 PLANISPHERE CÉLESTE, CHINOIS.

KIUN-CHI, *marché du camp*, β du *Syrius*.

KIUN-NAN-MOEN, *le Général de l'armée du Midi*, étoile ϕ d'Andromède.

KIUN-TSING, *puits des camps*, constellation composée de quatre étoiles ν , ι , κ , λ du *Lievre*.

KO, *pleurs*, constellation composée de deux étoiles E du *Verseau*, & μ du *Capricorne*.

KO-TAO, *nom d'un Tribunal*, constellation composée de sept étoiles ι , ϵ , δ , ϕ , μ , ν , σ de *Cassiopee*.

KONG-TSIO, *paon*, constellation composée de dix étoiles α , γ , ϵ , ξ , η , π , ν , λ , κ , δ , υ du *Paon*.

KOU-LEU, *aire du magasin*, constellation composée de huit étoiles θ , ψ , κ , λ , μ , O, G, P du *Centaure*.

KUEY du PE-TEU, les quatre premières étoiles α , β , γ , δ de la grande *Ourse*.

KUEY, *fondement*, une des vingt-huit constellations, composée de seize étoiles β , μ , ν , π , δ , ϵ , ζ , η , I d'Andromède, la deuxième de σ , G, L, υ , ϕ , ψ , & la première de ψ des *Poissons*.

KUEY, *tortue*, constellation composée de trois étoiles β , γ , ζ de l'*Autel*.

KUEY, *fantôme*, une des vingt-huit constellations, composée de quatre étoiles γ , η , θ , δ du *Cancer*.

KUON, *fanal*, constellation composée de quatre étoiles ψ des *Gemeaux*, & ϕ , λ , ω du *Cancer*.

KUON-SO, *collier*, constellation composée de neuf étoiles ρ , ι , δ , ϵ , γ , α , β , θ , & d'une petite de la *Couronne boréale*.

L.

LANG-GOEY, *une dignité*, constellation composée de neuf étoiles A, B, C, E, F, 2 de G, H, K de la chevelure de Bérénice.

LANG-SING, *étoile du Loup*, α de Syrius.

LANG-TSIANG, *Général de la Milice*, étoile de la chevelure de Bérénice.

LAY-PE, *faute dans le P. Noël*; voyez KIA-PE.

LAO-JIN, *l'homme vieux*, étoile α de l'Argo.

LEANG, *pays*, étoile δ du Serpent.

LEOU, *récolte des fruits*, une des vingt-huit constellations, composée de trois étoiles α , β , γ du Belier.

LY-CHE, *pièce de côs*, constellation composée de quatre étoiles ψ , χ , P, & d'une petite du Taureau.

LY-YU, *lyre de pierre précieuse*, constellation composée de deux étoiles du Microscope.

LY-KUNG, *palais séparés*, trois constellations composées chacune de deux étoiles; la première η , θ sur la jambe gauche de Pégase; la seconde λ , μ sur la cuisse droite; la troisième ν , τ sur le poitrail.

LIE-SU, *marchandises arrangées*, constellation composée de deux étoiles λ d'Hercule, & σ du Serpent.

LIEN-TAO, *voie des chars*, constellation composée de quatre étoiles π , η , θ , & d'une petite du Vautour.

LIEU, *saule*, une des vingt-huit constellations, composée de huit étoiles θ , ω , ζ , ϵ , δ , η , ρ , σ de l'Hydre femelle.

24 PLANISPHERE CÉLESTE , CHINOIS.

LING-TAY , *tour de l'intelligence* , constellation composée de trois étoiles X , C , D du Lion.

LO-YEN , *cataraëte du fleuve Lo* , constellation composée de deux étoiles τ , ν du Capricorne.

LO-KIA , *les six kia du cycle* , étoile dans la Giraffe.

LUY-PIE-TCHIN , *enceinte du camp* , constellation composée de douze étoiles γ , δ , ϵ , κ du Capricorne , ι , σ , λ , ϕ du Verseau , & de quatre autres petites.

LUY-TIEN , *éclair* , constellation composée de six étoiles ζ , ξ , σ , trois de Q , de Pégase.

M.

M_{A-FO} , *ventre de cheval* , constellation composée de trois étoiles B , γ , δ du Centaure.

MA-OUEY , *queue de cheval* , constellation composée de quatre étoiles β , η , E , D du Centaure.

MAO , *soutien des choses de la nature* , une des vingt-huit constellations , composée de sept étoiles des Pléiades.

MAO-TEU , le même que MAO , les Pléiades.

MIE-FUNG , *abeille* , constellation composée de quatre étoiles α , β , γ , δ de l'Abeille ou de la Mouche.

MING-TANG , *cour de l'Empereur , qui servoit autrefois à recevoir les Vice-Rois* , constellation composée de trois étoiles τ , ν , E du Lion.



NAN-HAY ;

N.

NAN-HAY , *mer méridionale* , étoile ξ du Serpent.

NAN-HO , *fleuve du Midi* , constellation composée de deux étoiles α , β de Procyon.

NAN-MOEN , *porte du Midi* , constellation composée de α , & A du Centaure.

NAN-TCHUEN , *vaisseau austral* , constellation composée de cinq étoiles β , ω , θ , P , p du chêne de Charles II , ou constellation dans le Rocher.

NAN-TEU , voyez TEU dans le Sagittaire.

NIAO-HOEY , *bec d'oiseau* , constellation composée de six étoiles du Toucan α , δ , η , β , ξ , & d'une petite.

NIAO-TCHO , faute dans le P. Noël , lisez NIAO-HOEY.

NIEN-TAO , faute dans le P. Noël , lisez LIEN-TAO.

NIEU , *bœuf* , l'une des vingt-huit constellations , composée de cinq étoiles α , ξ , β , ρ , π du Capricorne.

NIU , *la Vierge* , l'une des vingt-huit constellations , composée de quatre étoiles μ , ϵ du Verseau , & de deux autres dans la fleche d'Antinoüs.

NIU-SU , *filles qui écrit l'Histoire* , étoile \downarrow de la constellation du Dragon.

NIU-TCHOUANG , *le lit d'une fille* , constellation composée de trois étoiles ρ , π , E d'Hercule.

NUY-KIAY , *degrés intérieurs* , constellation composée de six étoiles A , π , τ , B , C , o de la grande Ourse.

NUY-OU-TCHU-HEU , cinq étoiles à l'occident de KIEU-KING ;

dans la Vierge. Cette constellation ne se trouve ni dans le P. Noël, ni dans le P. Grimaldy.

NUY-PING, *mur qui est devant la porte du palais*, constellation composée de quatre étoiles α , τ , ν , ξ de la Vierge.

NUY - PING, *paix intérieure*, constellation composée de quatre étoiles dans la tête du petit Lion.

O.

O U, *faute*, dans le P. Noël, lisez OU-YUE.

OU-YUE, *pays*, étoile ζ de l'Aigle.

OU-TCHE, *les cinq chars*, constellation composée de six étoiles ; les cinq premières sont α , β , θ , ι , une petite du Cocher ; la sixième est β du Taureau.

OU-TCHOU-HEU, *les cinq vassaux*, constellation composée de cinq étoiles θ , τ , ι , α , φ des Gemeaux.

OU-TI-TSO, *le trône des cinq Empereurs*, constellation composée de cinq étoiles β , α , & de trois petites de la queue du Lion.

OUËY, *la queue*, l'une des vingt-huit constellations, composée de neuf étoiles ϵ , μ , ζ , η , θ , ι , κ , λ , ν du Scorpion.

P.

P A, *pays*, étoile ϵ du Serpent.

PA-KO, *huit espèces de fruits*, constellation composée de neuf étoiles ξ , δ du Cocher, deux dans les cornes de la Chevre, une dans la Girafe, & quatre autres petites.

PAY-KIEOU, *qui renverse les mortiers*, constellation composée de deux étoiles λ , γ de la Grue.

PAY-KOUA, *qui disperse les concombres*, constellation composée de quatre étoiles η , θ , ι , κ du Dauphin.

PE-HO, *fleuve du Nord*, constellation composée de trois étoiles α , β , ρ des Gemeaux.

PE-KI ou PE-KIE ou PE-TCHIN, *pole boréal*, nom des cinq étoiles γ , β , A, B, de la petite Ourse, & d'une petite dans la Girafe.

PE-LOU-SE-MOEN, *Préfet des armes de la contrée boréale*, étoile α du Poisson du Midi.

PE-TEOU, *boisseau du Nord*, nom des sept étoiles α , β , γ , δ , ϵ , ζ , η de la grande Ourse.

PE-TOU, *mesure pour les marchandises*, constellation composée de deux étoiles du Rameau.

PIE, *petit filet avec un long manche*, l'une des vingt-huit constellations, composée de neuf étoiles λ , γ , δ , ϵ , θ , α , σ , & de deux petites du Taureau.

PIE, *muraille*, une des vingt-huit constellations, composée de l'étoile α d'Andromède, & de γ de Pégase.

PIE, *tortue*, constellation composée de quatorze étoiles μ , ν , ι , κ , λ , α , ϵ , ζ , β , η , ξ , θ , γ , δ de la Couronne australe.

PIE-LIE, *la foudre*, constellation composée de cinq étoiles β , γ , θ , ι , ω des Poissons.

PIE-TCHIN-LOUI, voyez LOUI-PIE-TCHIN.

PING-SING, *mur en face de la porte*, constellation composée de deux étoiles μ , ϵ du Lievre.

PING-SING, *étoile de la paix*, constellation composée de deux étoiles γ , π de l'Hydre femelle.

PING-TAO, *voie droite*, constellation composée de deux étoiles M, θ de la Vierge.

PO-SU , *le Persan* , constellation composée de onze étoiles α , λ , θ , δ , μ , ι , η , & trois autres petites, de la constellation de l'Indien.

S.

SAN-KIO-HING , *figure des trois cornes* , constellation composée de trois étoiles α , β , γ du Triangle austral.

SAN-KONG , *les trois Rois* , constellation composée de trois petites étoiles sur le sein de la Vierge.

SAN-KONG , *les trois Rois* , trois petites étoiles dans la tête des Lévriers.

SAN-SU ou SAN-SE , *les trois Présidens* , constellation composée de trois étoiles D , σ , ρ de la grande Ourse.

SAN-TAY , *les trois Tay* , voyez CHANG-TAY , TCHONG-TAY , & HIA-TAY. On les appelle encore TAY-KIAI ou TIEN-KIAI.

SI-HIEN , *colline de l'Occident* , constellation composée de quatre étoiles η , θ , ψ de la Balance , & ξ du Scorpion.

SIANG , *Ministre* , constellation composée de trois petites étoiles au dessous de ϵ de la grande Ourse.

SIAO-TEOU , *petit boisseau* , constellation composée de huit étoiles β , ϵ , δ , γ , ζ , η , θ , α du Caméléon.

SIN , *le cœur* , une des vingt-huit constellations , composée de trois étoiles α , σ , τ du Scorpion.

SIN-TCHIN , voyez HING-TCHIN.

SING , *étoile* , une des vingt-huit constellations , composée de sept étoiles 1 , 1 & 2 de τ , α , & trois autres petites de l'Hydre femelle.

SIV , *nom d'une ville* , étoile θ du Serpent.

SIUEN-KY , voyez KUEY du PE-TEOU.

SONG , *pays* , η du Serpenteaire.

SU-FI ou SE-FY , *qui veille contre les vices* , constellation composée de deux étoiles δ , γ du petit Cheval.

SU - FO , *les quatre Conseillers* , constellation composée de quatre étoiles dans la Giraffe.

SU-GOEI , *qui préside aux malheurs* , constellation composée de β du petit Cheval.

SU - KUAY , *qui préside aux cas extraordinaires* , constellation composée de quatre étoiles 1 & 2 de χ de la massue d'Orion , & de deux autres petites étoiles au dessus.

SU-LO ou SE-LOU , *qui préside aux dignités* , constellation composée de deux étoiles du Verseau D , & une petite.

SU - MING , *qui préside à la vie* , constellation composée de deux étoiles du Verseau.

SU-TO , *des quatre fleuves* , constellation composée de quatre étoiles E des Gemeaux , & de trois autres étoiles du Monoceros.

SUN , *neveu* , constellation composée de deux étoiles π , θ de la Colombe.

T.

TA - CHIN , le même que SIN.

TA-KIO , *la grande corne* , étoile α du Bouvier.

TAY , *pays* , ι du Capricorne.

TAY-Y , *première unité* , petite étoile entre α & π du Dragon.

TAY-YANG-CHEOU , *le Gouverneur de la ville Tay-yang* , étoile χ de la grande Ourse.

TAY-LING , *colline pour la sépulture des Empereurs*, constellation composée de huit étoiles ; les quatre premières sont χ , τ , ι , κ de Persée ; les quatre autres β , ρ , P, Q de la tête de Méduse.

TAY-OUEI-KONG-YUEN , *muraille du palais Tay-ouei*, dix étoiles, d'un côté, δ , θ , ι , σ , β du Lion ; de l'autre côté, η , γ , δ , ϵ , & une petite de la Vierge.

TAI-OUEI-KONG , le même que TAY-VI-KONG. Ce palais est renfermé entre TSE-OUEI & l'Equateur ; il contient les pattes de derrière, la queue & le dos du Lion, la partie orientale du petit Lion, les chiens de chasse, la chevelure de Bérénice, une partie du Bouvier, & la plus grande partie de la Vierge.

TAY-TSU , *le Prince héritier de l'Empire*, étoile γ de la petite Ourse.

TAY-TSU , *Prince héritier de l'Empire*, petite étoile du Lion.

TAY-TSUN , *grand vase*, étoile \downarrow de la grande Ourse.

TAY-VI-KONG , *palais*, voyez TAI-OUEI-KONG.

TE-YN suivant le P. Noël, voyez YN-TE.

TENG - CHE , *serpent qui provoque les nuées*, constellation composée de seize étoiles, dont trois σ , ρ , τ de Cassiopée, une autre petite proche le bras de Céphée, sept autres proche la queue du Cygne, plus une autre petite dans le Léopard marin, & quatre autres étoiles λ , \downarrow , N, dans la main d'Andromède.

TEU , *boisseau*, constellation composée de cinq étoiles ω , P, H, O, N de la massue d'Hercule.

TIU , *boisseau*, une des vingt-huit constellations, composée de six étoiles ζ , τ , σ , ϕ , λ , μ du Sagittaire. On l'appelle aussi NAN-TEU , *boisseau méridional*.

TY , suivant le P. Noël, voyez TY-VANG.

TY, *fin*, une des vingt-huit constellations, composée de quatre étoiles α , β , γ , δ de la Balance.

TI-TSO, *le trône de l'Empereur*, étoile α d'Hercule.

TI-VANG, *Roi des Empereurs*, β de la petite Ourse.

TIE-SO, *faute dans le P. Noël*, lisez FU-TCHE.

TIE-TSIEN, *faute du P. Noël*, lisez FU-YUE.

TIEN-CHE, *rocher de la mer*, mal traduit dans le P. Noël, lisez *autel du ciel*, constellation composée de six étoiles dans l'Argo.

TIEN-CHE ou TIEN-CHI, *marché céleste*. Ce marché est borné au Nord par le Palais TSE-OUÉI, & au Sud par l'Equateur : de l'Ouest à l'Est il s'étend depuis le palais TAY-OUÉI jusque vers le colure des Solstices, renferme la Couronne boréale, presque tout Hercule, & la partie boréale du Serpentaire & du Serpent.

TIEN-CHI-YUEN, *murailles du Tien-chi*, vingt-quatre étoiles ; d'un côté ζ , ν , ϵ , δ du Serpentaire ϵ , α , δ , β , ν du Serpent κ , ν , β d'Hercule ; de l'autre côté δ , λ , μ , ξ , σ , & une petite d'Hercule ; ζ de l'Aigle ; θ , d , η du Serpent ; τ , υ du Serpentaire ; ξ du Serpent, & η du Serpentaire.

TIEN-FEU, *bâton du ciel pour frapper les tambours*, constellation composée de deux étoiles η , θ d'Antinoüs.

TIEN-FEU, suivant le P. Noël, lisez TIEN-PANG.

TIEN-FO, *axe du ciel*, constellation composée de deux étoiles δ , ϵ de la constellation du Loup.

TIEN-HAN, *le fleuve Han du ciel*, la voie lactée.

TIEN-HO, *fleuve céleste*, la voie lactée.

TIEN-HOANG, *étang du ciel*, constellation composée de quatre étoiles ρ , λ , μ , σ , & une petite du Cocher.

32 PLANISPHERE CÉLESTE , CHINOIS.

TIEN-HOANG-TA-TI , *le souverain Empereur du ciel* , étoile de la constellation de Céphée.

TIEN-HOEN , *faute dans le P. Noël* , lisez TIEN-KIUN.

TIEN-HOEN , *latrines du ciel* , constellation composée de quatre étoiles de ϕ de la Baleine.

TIEN-Y , *le premier ciel* , étoile ι du Dragon.

TIEN-YN , *repos du ciel* , constellation composée de cinq étoiles ζ , δ , τ du Belier , & de deux autres petites étoiles.

TIEN-JU , *lait du ciel* , étoile A de la constellation du Serpent.

TIEN-YU , *mesure céleste* , constellation composée de trois étoiles dans le Fourneau.

TIEN-YUEN , *étang du ciel* , constellation composée de quatre étoiles α , β , θ , ι du Sagittaire.

TIEN-YUEN , *ménagerie du ciel* , constellation composée de treize étoiles ι & 2 de ν , ξ , D , G , F , H , θ , S , κ , ϕ , χ de l'Eridan , & δ du Phœnix.

TIEN-YUEN , *ménagerie du ciel* , constellation composée de dix-sept étoiles π , τ de la Baleine , γ , π , δ , ϵ , ζ , η , K , L , M , N , & de quatre autres petites dans l'Eridan.

TIEN-KANG , *filet du ciel* , δ de la tête du Poisson du Midi. (Le P. Noël a mal lu TIEN-VANG).

TIEN-KAO , *hauteur du ciel* , constellation composée de quatre étoiles N , L , I , ι du Taureau.

TIEN-KEOU , *chien du ciel* , constellation composée de sept étoiles dans l'Argo.

TIEN-KEOU , *croc du ciel* , constellation composée de quatre étoiles η , α , ι , ϕ de Céphée.

TIEN-KI , *pierre précieuse du ciel* , γ de la grande Ourse.

TIEN-KI , *période du ciel* , étoile dans le Vaisseau.

TIEN-KI ,

TIEN-KI , *annales du ciel* , constellation composée de cinq étoiles θ , w , v , ϵ , ξ , & de quatre autres d'Hercule.

TIEN-KI , *poule du ciel* , constellation composée de deux étoiles E , F du Sagittaire.

TIEN-KIAI , *place du ciel* , constellation composée de deux étoiles π , ω du Taureau.

TIEN-KIANG , *fleuve du ciel* , constellation composée de trois étoiles B , π , A du Serpentaire.

TIEN-KIEOU , *étable du ciel* , constellation composée de trois étoiles θ , ρ , σ du bras droit d'Andromède.

TIEN - KIUN , *grenier du ciel* , constellation composée de treize étoiles G , λ , μ , ξ , ν , δ , α , γ , σ , & quatre autres étoiles de la Baleine.

TIEN-KIUVEN , *le poids de la balance du ciel* , étoile δ de la grande Ourse.

TIEN-KUAN , *défilé du ciel* , étoile ζ du Taureau.

TIEN-LAO , *prison du ciel* , étoile ω de la grande Ourse.

TIEN-LANG , *loup du ciel* , voyez LANG-SING.

TIEN-LY , *raison du ciel* , constellation composée de quatre étoiles sur le dos de la grande Ourse.

TIEN-LIN , *grenier du ciel* , constellation composée de quatre étoiles F , S , ξ , σ du Taureau.

TIEN-LOUI-TCHING , *murailles du ciel* , constellation composée de cinq étoiles ξ du Verseau , 1 & 2 de C , & 1 & 2 de λ du Capricorne.

TIEN-MUVEN , *porte du ciel* , constellation composée de deux petites étoiles au dessous de α de la Vierge.

TIEN-O , *faveur du ciel* , étoile près la Fleur-de-lis.

34 PLANISPHERE CÉLESTE , CHINOIS.

TIEN-PANG , *font du ciel* , constellation composée de cinq étoiles ; la première , dans la constellation d'Hercule ; les quatre autres sont γ , β , ν , ξ du Dragon.

TIEN-PIEN , *chapeau du ciel* , constellation composée de neuf étoiles G , H , λ I d'Antinoïs , K , L , N , M , O de l'écu de Sobiesky.

TIEN-SIANG , *secours du ciel* , constellation composée de trois étoiles dans le Sextant.

TIEN-SIUVEN , *pietre précieuse du ciel* , β de la grande Ourse.

TIEN-TA-TSIANG-KIUN , *le suprême Général du ciel* , constellation composée de onze étoiles ; les sept premières sont C , A , χ , ν , H , τ , & une petite d'Andromède ; les trois autres sont β , γ , δ du Triangle boréal.

TIEN-TCHU , *axe du ciel* , α de la grande Ourse.

TIEN-TCHU , *axe du ciel* , étoile dans la Giraffe ; c'est la polaire chez les Chinois.

TIEN-TCHU , *cuisine du ciel* , constellation composée de quatre étoiles π , δ , ϵ , ρ du Dragon.

TIEN-TCHUEN , *vaisseau du ciel* , constellation composée de neuf étoiles η , α , γ , δ , C , μ , B de Persée , plus une petite dans la Giraffe.

TIEN TIEN , *champs du ciel* , constellation composée de deux étoiles τ , σ de la Vierge.

TIEN-TSAN , *colère du ciel* , étoile N de Persée.

TIEN-TSANG , *grenier du ciel* , constellation composée de sept étoiles ν , τ , ζ , θ , η , i , & d'une petite de la Baleine.

TIEN-TSIANG , *lance du ciel* , constellation composée de trois étoiles θ , i , κ du Bouvier.

TIEN-TSIE , *ordre du ciel* , constellation composée de sept étoiles ρ , π , H , B , C , D , R du Taureau.

TIEN - TSIEN, *monnoie du ciel*, constellation composée de quatre étoiles ι , θ , η , μ du poisson du Midi.

TIEN - TSIN, *pont du ciel*, constellation composée de neuf étoiles du Cygne α , δ , ν , σ , υ , ζ , ϵ , η , & d'une petite.

TIEN-TSUN, *vase du ciel*, constellation composée de trois étoiles A, δ , ω des Gemeaux.

TIEN-VANG, voyez TIEN-KANG.

TONG-HAY, *pays*, η du Serpent.

TONG-HIEN, *colline de l'Orient*, constellation composée de quatre étoiles ϕ , χ , ψ , ρ du Serpenteaire.

TU-KONG, *le kong de la Terre*, constellation composée de deux étoiles D, c des Poissons.

TU-KONG-LI, le même que TU-KONG-SU, *l'Officier du kong de la Terre*, étoile de Pégase.

TU - SU, *boucherie*, constellation composée de deux étoiles dans le Rameau.

TU-SU-KONG, *l'Officier qui veille aux ouvrages publics*, étoile β de la Baleine.

TUN-HANG, *armes défensives*, constellation composée de α , & d'une petite du Loup.

TUN-VAN, faite dans le P. Noël, voyez TUN-HANG.

TUON-MOEN, c'est l'espace entre Tso-CHI-FA & YEU-CHI-FA.

*V*U, le même que OU.

*V*AY-PING, *face extérieure du mur qui est opposé aux portes*, constellation composée de sept étoiles α , ξ , ν , μ , ζ , ϵ , δ des liens des Poissons.

VAY-TCHU, *cuisine extérieure*, constellation composée de cinq étoiles, deux dans la croupe de la Licorne, & trois au dessus.

VANG-LEANG, *Roi bon*, constellation composée de cinq étoiles β , λ , α , η , κ de la constellation de Cassiopée.

VEN-TCHANG, *composition élégante*, constellation composée de six étoiles H, ν , ϕ , θ , F, E de la constellation de la grande Ourse.

VY, prononcez OUEI, la sixième étoile des vingt-huit constellations.

X ou CH.

CHANG-CHOU, *le Président du suprême Tribunal*, constellation composée de cinq étoiles G, F, H, A, & d'une petite, du Dragon.

CHANG-FU, *le grand Président de la Cour*, étoile λ du Dragon.

CHANG-GOEI, *celui qui est chargé des appartemens de l'Empereur*, étoile dans la Giraffe.

CHANG-GOEI, *celui qui est chargé du soin des appartemens de l'Empereur*, étoile κ de Céphée.

CHANG-KIAI, étoile supérieure ou ι de CHANG-TAY.

CHANG-PIE, *premier Ministre de l'Empereur*, étoile ζ du Dragon.

CHANG-SIANG, *le premier Colao*, étoile δ de la constellation du Lion.

CHANG-SIANG, *le premier Ministre*, étoile γ de la Vierge.

CHANG-TAY, *le souverain Président des troupes*, étoiles ι , κ de la grande Ourse.

CHANG-TSAY, *le Gouverneur de la Cour*, étoile θ de la constellation du Dragon.

CHANG-TSIANG, *le grand Général des Troupes*, étoile au dessus de la Vierge.

CHANG-TSIANG, *le grand Général de l'armée*, étoile σ de la constellation du Lion.

CHANG-TCHING, *le premier Préfet de la Cour*, étoile dans la Giraffe.

CHAO-FU, *l'Adjudant du grand Préfet de la Cour*, étoile près la queue de la constellation du Dragon.

CHAO-GOEY, *celui qui a le soin des appartemens de l'Empereur*, étoile γ de Céphée.

CHAO-GOEY, *l'Adjudant du Président de la Cour*, étoile κ du Dragon.

CHAO-GOEY, *celui qui soigne les appartemens de l'Empereur*, étoile dans la Giraffe.

CHAO-PIE, *le second Ministre de l'Empereur*, étoile χ dans le Dragon.

CHAO - TCHING, *le second Préfet de la Cour*, étoile dans la constellation de la Renne.

CHAO-TSAY, *l'Adjudant du Gouverneur de la Cour*, étoile η de la constellation du Dragon.

CHAO-VI, *le second Maître du Prince héritier*, constellation composée de quatre étoiles, une sur le dos du Lion, & trois dans le petit Lion.

CHE, *chambre*, constellation, l'une des vingt-huit, composée de deux étoiles α , β de la constellation de Pégase.

CHE - CHEU, *la tête du serpent*, étoile α de l'Hydre, γ de l'horloge de M. l'Abbé de la Caille, ζ , ϵ , π de l'Hydre.

CHE-FO, *ventre de serpent*, une petite étoile du Toucan; & L, β de la constellation de l'Hydre.

CHE-VY ou CHE-OUFI, *queue de serpent*, étoile β de l'Hydre; plus ν , α , μ , λ , ν , τ de l'Octant de M. l'Abbé de la Caille.

CHE-TSU-KIA, *signe de la Croix*, constellation composée de quatre étoiles λ , δ , ι , η de la Croix.

CHI, *orlure*, étoile λ de la constellation de la Colombe.

CHI-LEU, *maison où l'on met des marchandises*, étoile μ du Serpente.

CHIN-KONG, *le Palais par excellence*, étoile ζ du Scorpion.

CHO-du-PE-TEU, les trois dernières étoiles ϵ , ζ , η de la grande Ourse.

CHO, *pays*, étoile α de la constellation du Serpent.

CHU-TSU ou CHOU-TSOU, *filz de la seconde femme*, étoile A de la constellation de la petite Ourse.

CHUI-FOU ou CHOU I-FU, *piscine*, constellation composée de quatre étoiles ι & de 2 F, ν , ξ de la constellation d'Orion.

CHOU-GOEI ou CHUI-GOFI, *lien où il y a de l'eau*, constellation composée de quatre étoiles ζ du Cancer, & de trois autres petites étoiles au dessus de la constellation de Procyon.

CHOU-GOEI ou CHUI-GOFI, *fontaine d'eau*, constellation composée de α de l'Eridan, & de η , ζ de la constellation du Phénix.



CATALOGUE

DES COMETES

CONNUES ET OBSERVÉES PAR LES CHINOIS.

TOUTES les Comètes que je rapporte dans ce Mémoire, sont tirées de l'Ouvrage Chinois de MA-TUON-LIN, intitulé VEN-HIEN-TONG-KAO. Cet Ecrivain les a rassemblées toutes dans le deux cent quatre-vingt-sixième Livre avec beaucoup de soin, d'après les différens Auteurs ou Historiens de sa Nation qui les ont décrites. Je n'ai pu descendre plus bas que l'an 1222 de J. C., parce que c'est le temps où vivoit cet Ecrivain.

DYNASTIE DES TCHEOU.

613 ans avant J. C.

La quatorzième année du règne de VEN-KONG, Prince de LOU, dans l'automne, à la septième lune, il y eut une comète qui entra dans le PE-TEOU.

532.

La dixième année de TCHAO-KONG, Prince de LOU, dans l'hiver, il y eut une comète dans TA-CHIN.

482.

La treizième année de GNAY-KONG, dans l'hiver, à la onzième lune, il y eut une comète dans la partie orientale. Ces trois comètes sont tirées du TCHUN-TSIEOU de Confucius.

467.

La deuxième année de TCHING-TING-VANG, on vit une comète.

433.

La huitième année de KAO-VANG, on vit une comète.

305 avant J. C.

La dixième année de NAN-VANG, on vit une comète:

303.

La douzième année du même Prince, on vit une comète.

296.

La dix-neuvième année du même Prince, on vit une comète.

DYNASTIE DES TSIN.

240.

La septième année de CHI-HOANG-TI, une comète sortit de la partie orientale; elle parut dans la contrée septentrionale: à la cinquième lune, on la vit dans la contrée occidentale pendant seize jours.

238.

La neuvième année, il parut une étoile à l'horizon; à la quatrième lune, elle parut dans la partie occidentale, ensuite on la vit dans la partie septentrionale: elle employa quatre-vingts jours à venir depuis le TEOU jusqu'au Midi.

234.

La treizième année, à la première lune, il parut une comète dans la partie orientale.

214.

La trente-troisième année du même Prince, il parut une étoile qui sortit de la partie occidentale.

DYNASTIE DES HAN.

204.

La troisième année de KAO-TI, à la septième lune, il y eut une comète dans TA-KIO: sa durée fut d'environ 10 jours, ensuite elle disparut.

La

157 ans avant J. C.

La septième des années HEU de VEN-TI, il y eut une comète dans la partie occidentale ; sa base étoit à l'extrémité d'OUEI & de KI, tendant vers HUI & GOEY : elle avoit plusieurs Tchang (mesure de 10 pieds), elle parvint dans le TIEN-HAN ; au bout de seize jours on ne la vit plus.

155.

La deuxième année de HIAO-KING-TI, il parut une comète qui sortit du sud-ouest.

148.

La troisième des années TCHONG, à la troisième lune, au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, une comète parut au nord ouest : sa couleur étoit blanche, sa longueur d'un Tchang (mesure de 10 pieds), elle étoit dans TSU-CHOUY ; elle s'éloigna un peu, & après quinze jours on ne la vit plus.

138.

La troisième des années KIEN-YUEN de HIAO-VOU-TI, à la deuxième lune, il y eut une comète dans le fond de TCHANG ; elle traversa le TAY-OUEY, vint au TSE-KONG, & parvint ensuite jusqu'à TIEN-HAN.

La troisième année du même Prince, à la quatrième lune, il y eut une comète dans le TIEN-KY, qui vint jusqu'à TCHE-NU.

135.

La sixième année, à la sixième lune, il y eut une comète dans la partie occidentale.

A la huitième lune, il y eut une grande étoile qui parut dans la partie orientale ; sa longueur terminoit le ciel ; au bout de trente jours elle s'en alla.

Tome X.

F

42 CATALOGUE DES COMETES.

119 ans avant J. C.

La quatrième des années YUEN-CHEU, à la quatrième lune, une grande étoile fortit du nord-ouest.

110.

La première des années YUEN-FONG, à la cinquième lune, une comète parut dans le TSING oriental; on en vit une autre aussi dans le SAN-TAY.

109.

La deuxième des années YUEN-FONG, une comète parut dans HO-CHOU.

103, 102.

Au milieu des années TAY-TSO (TAY-TSO commence l'an 104, dure quatre ans, c'est-à-dire 104, 103, 102, 101), une comète parut dans TCHAO-YAO.

69.

La première des années TY-TSIE de SIUEN-TI, à la première lune, il y eut une comète dans la partie occidentale; elle n'étoit éloignée de TAY-PE que de deux Tchang.

44.

La cinquième des années TSO-YUEN de YUEN-TI, une comète fortit vers le nord-ouest; elle étoit d'une couleur rouge-jaune, sa longueur de huit Che (pied chinois); après plusieurs jours elle devint longue de plusieurs Tchang, se dirigeant vers le nord-est, & occupoit une portion de TSAN.

32.

La première des années KIEN-CHI de TCHING-TI, à la première lune, il y eut une comète dans ING-CHE; sa couleur étoit bleuâtre, sa longueur de six à sept Tchang, sa largeur de plusieurs pieds.

12 ans avant J. C.

La première des années YUEN-YEN, à la septième lune, au jour Sin-oui, 8 *du cycle*, il y eut une comète dans le TSING oriental; elle traversa les QU-TCHOU-HEOU, sortit de HO-CHOU, dirigea sa course vers le nord, & alla dans HIEN-YUEN & TAY-OUEI. Le jour suivant, elle s'étoit avancée de 6 degrés; le matin elle se leva dans la contrée orientale: le treizième jour au soir, elle parut dans la contrée occidentale.

5.

La deuxième des années KIEN-PING de NGAI-TI, à la deuxième lune, une comète parut dans KIEN-NIEOU ou NIEOU pendant soixante-dix jours.

22 ans après J. C.

La troisième des années TY-HOANG de l'Empereur VANG-MANG, à la onzième lune, il y eut une comète dans TCHANG: elle alla vers le sud-est; après cinq jours on ne la vit plus.

39.

La quinzième des années KIEN-VOU de KUANG-VOU-TI, à la première lune, au jour Ting-oui, 44 *du cycle*, il y eut une comète dans MAO; elle tourna peu à peu vers le nord-ouest, & entra dans CHE. Elle s'approcha de LY-KONG; à la troisième lune, au jour Y-oui, 32 *du cycle*, la comète vint dans PIE où elle périt; elle fut visible pendant quarante-neuf jours.

54.

La trentième année, à la lune intercalaire, au jour Kia-ou, 31 *du cycle*, l'étoile de Mercure étant au vingtième degré du TSING oriental, il parut une vapeur blanche qui alloit vers l'orient. Elle étoit enflammée, & longue de cinq Che (pieds), c'étoit une comète; elle s'avança ensuite vers le

nord-est , parvint jusqu'au dessus des limites occidentales du TSE-KONG : au jour Kia-tse , 1 *du cycle* , elle ne parut plus ; cette comète fut visible pendant trente-un jours.

60 ans après J. C.

La troisième des années YUNG-PING de HIAO - MING - TI , à la sixième lune , au jour Ting-mao , 4 *du cycle* , il parut une comète au nord de TIEN-CHUEN ; elle étoit longue de deux Che. La comète tourna peu à peu vers le nord , & parvint au midi de KANG ; elle fut visible pendant cent trente-cinq jours , & disparut.

65.

La huitième année , à la sixième lune , une grande étoile sortit de LIEOU , & du trente-septième degré de TCHANG ; elle s'approcha de HIEN - YUEN , traversa le TIEN-TCHUEN , & parvint au TAY - OUEI : cette vapeur dura en tout cinquante-six jours.

75.

La dix-huitième année , à la sixième lune , au jour Ki-oui , 56 *du cycle* , il parut une comète dans TCHANG , longue de trois Che. Elle alla de là au midi de LANG-TSIANG , & entra dans le TAY-OUEI.

76.

La première des années KIEN-TCHANG de HIAO-TCHANG-TI , à la huitième lune , au jour Keng-yn , 27 *du cycle* , il parut une comète dans le TIEN-CHI , longue de deux Che. Sa marche étoit lente ; elle entra dans le troisième degré de KIEN-NIEU : cette comète subsista pendant quarante jours , & disparut.

A la douzième lune , au jour Vou-in , 15 *du cycle* , une comète sortit dans le troisième degré de LEOU. Elle étoit longue de huit à neuf Che ; peu à peu la comète entra dans le TSE-KONG ; elle avoit paru pendant cent six jours.

109 ans après J. C.

La troisième des années YONG-TSO de HIAO-NGAN-TI, à la douzième lune, il s'éleva une comète au midi de TIEN-YUEN : elle alloit vers le nord-est ; sa longueur étoit de six à sept Che.

132.

La sixième des années YONG-KIEN de HIAO-CHUN-TI, il sortit une comète dans le TEOU & le KIEN-NIEOU ; elle s'éteignit dans HIU & GOEY.

A la deuxième lune, au jour Ting-se, 54 *du cycle*, il parut une comète dans la contrée orientale, longue de six à sept Che. Elle indiquoit le sud-ouest de ING-CHE, & parvint à FUEN-MU. Au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle*, une comète ou la comète (l'Auteur Chinois ne dit pas si c'est la même) étoit au premier degré de KUEY ; elle étoit longue de six à sept Che. Au jour Kuey-oui, 20 *du cycle*, le soir la comète parut aller vers le nord-ouest ; elle traversa MAO & PI. Au jour Kia-chin, 21 *du cycle*, la comète étoit dans TSING, ensuite elle traversa HIEU, SING & TCHANG ; elle étoit très-enflammée, elle vint au SAN-TAY, & s'avança au milieu d'HIEN-YUEN où elle périt.

147, 149 *suivant les Annales Chinoises.*

La première des années KIEN-HO de HIAO-HUON-TI, à la huitième lune, au jour Y-tcheou, 2 *du cycle*, il y eut une comète chevelue, longue de cinq Che. Elle parut au milieu du TIEN-CHI, allant vers le sud-est ; sa couleur étoit jaunâtre. A la neuvième lune, au jour Vou-chin, 5 *du cycle*, elle disparut.

161.

La quatrième des années YEN-HI, à la cinquième lune, au jour Sin-yeou, 58 *du cycle*, il y eut une étoile hôte dans ING-CHE ; elle tendoit vers l'occident ; ses rayons étoient longs

de cinq Che; parvenue au premier degré de SIN, elle devint comète.

178 ans après J. C.

La première des années KUANG-HO d'HIAO-LING-TI, à la huitième lune, il y eut une comète au nord de KANG; elle entra au milieu du TIEN-CHI; elle étoit longue de quelques Che; elle s'étendit ensuite jusqu'à cinq ou six Tchang, elle étoit rouge; la comète traversa dix constellations, & après quatre-vingts jours, elle s'éteignit peu à peu au milieu de TIEN-YUEN.

180.

La troisième année, dans l'hiver, une comète sortit à l'orient de LANG & de HOU-CHE; elle parvint jusqu'à TCHANG où elle disparut.

A la septième lune, il y eut une comète qui sortit au bas du SANTAY; elle alloit vers l'orient, elle entra ensuite dans le palais TAY-OUEY, parvint au TAY-TSU & HING-TCHIN; au bout de vingt jours elle s'éteignit.

182.

La cinquième des années KUANG-HO, à la deuxième lune; une comète sortit de KUEY, elle tendoit vers l'orient. La comète entra dans le palais TSE-OUEI, d'où elle sortit après trois jours, & au bout de soixante jours elle s'éteignit.

192.

La troisième des années TSO-PING, d'HIEN-TI, à la neuvième lune, l'étendard de TCHI-YEU (grande comète) parut long de plus de dix Tchang: sa couleur étoit blanche; il sortit au midi de KIO & de KANG.

193.

La quatrième année, à la dixième lune, il parut une comète entre les deux KIO, allant vers le nord-est; elle entra au milieu du TIEN-CHI où elle disparut.

200 ans après J. C.

La cinquième des années KIEN-NGAN, à la dixième lune, au jour Sin-hay, 48 *du cycle*, une comète parut dans TA-LEANG.

204.

La neuvième année, à la onzième lune (les Annales mettent dixième lune), il y eut une comète dans le TSING oriental & le YU-KUEY; elle entra dans HIEN-YUEN & le TAY-OUY.

206.

La onzième année, à la première lune, il y eut une comète dans le PE-TEOU. Sa tête étoit au milieu du PE-TEOU, sa queue remplissoit le palais TSE-OUEI; elle parvint jusqu'au PE-TCHIN.

207.

La douzième année, à la dixième lune, au jour Sin-mao, 8 *du cycle*, il y eut une comète dans CHUN-OUEI.

212.

La dix-septième année, à la douzième lune, il y eut une comète dans OU-TCHU-HEOU.

218.

La vingt-troisième année, à la troisième lune, il y eut une comète qui parut dans la contrée orientale. Au bout de vingt jours, le soir, elle sortit de la contrée occidentale, passa près d'OU-TCHE, du TSING oriental, d'OU-TCHU-HEOU, de VEN-TCHANG, d'HIEN-YUEN, & du palais TSE-OUEY; sa pointe étoit enflammée: elle parut ensuite au TI-TSO.

DYNASTIE DES GUEY.

225.

La sixième des années HOANG-TSO de VEN-TI, à la dixième lune, au jour Y-oui, 32 *du cycle*, il y eut une comète dans CHAO-OUEI; elle traversa HIEN-YUEN.

232 ans après J. C.

La sixième des années TAY-HO de MING-TI, à la onzième lune, au jour Ping-in, 3 *du cycle*, il y eut une comète dans YE; elle s'approcha de TAY-OUEY & de CHANG-TSIANG.

236.

La quatrième des années TSING-LUNG, à la dixième lune, au jour Kia-chin, 21 *du cycle*, il y eut une comète dans le TA-CHIN; elle étoit longue de trois Che.

Au jour Y-yeou, 22 *du cycle*, il y eut une comète dans la partie orientale.

A la onzième lune, au jour Y-hay, 12 *du cycle*, une comète parut; elle s'approcha d'HOAN-TCHE & de TIEN-KY.

238.

La deuxième des années KING-TSO, à la huitième lune, une comète parut dans TCHANG. Sa longueur étoit de trois Che; elle alloit vers l'orient : au bout de quarante-un jours elle disparut.

240.

La première des années TCHING - CHY de CHAO-TI, à la dixième lune, au jour Y-yeou, 22 *du cycle*, une comète parut dans la contrée occidentale; elle étoit dans OUEY, sa longueur de deux Tchang : elle passa par NIEOU, s'approcha de TAY-PE (Vénus). A la onzième lune, au jour Kia-tse, 1 *du cycle*, la comète s'approcha d'YU-LIN.

245.

La sixième année, à la huitième lune, au jour Vou - ou; 55 *du cycle*, une comète parut dans les TIE-SING; elle étoit longue de deux Che, elle étoit blanche; elle s'avança vers TCHANG, & après vingt-trois jours elle fut détruite.

La

246 après J. C.

La septième année, à la onzième lune, au jour Kuey-hay, 60 *du cycle*, il y eut une comète dans TCHIN; elle étoit longue d'un Che : après cinquante-six jours elle disparut.

248.

La neuvième année, à la troisième lune, une comète parut dans MAO; elle étoit longue de six Che, sa couleur étoit d'un violet pâle, ses rayons tendoient vers le sud-ouest. A la septième lune, la comète parut dans YE; elle étoit longue de deux Che : elle s'avança jusqu'à TCHIN, subsista pendant quarante-deux jours, & fut détruite.

251.

La troisième des années KIA-PING, à la onzième lune, au jour Kuey-hay, 60 *du cycle*, il y eut une comète dans YNG-CHE, elle alloit à l'ouest; après quatre-vingt-dix jours elle disparut.

252.

La quatrième année, à la deuxième lune, au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, une comète parut dans la contrée occidentale, étant dans GUEY, longue de cinq ou six Tchang; elle étoit blanche, ses rayons tendoient vers le midi : elle traversa TSAN, & après vingt jours elle disparut.

253.

La cinquième année, à la onzième lune, il y eut une comète dans TCHIN; elle étoit longue de cinq Tchang : la comète étoit dans le TAY-OUEY & TSO-CHI-FA, elle tendoit vers le sud-ouest; après cent quatre-vingt-dix jours elle disparut.

254.

La première des années TCHING-YUEN de KAO-KUEY-YANG-KONG, à la onzième lune, une vapeur blanche sortit à côté

du NANTEOU ; elle étoit large de plusieurs Tchang , s'étendant à l'horizon. VANG-SO dit que c'est l'étendard de TCHI-YEOU.

255 ans après J. C.

La deuxième année , à la première lune , une comète parut au nord-ouest ; elle étoit à l'horizon :

257.

La deuxième des années KAN-LOU , à la onzième lune , une comète parut dans KIO ; elle étoit blanche.

262. -

La troisième des années KING-YUEN de YUEN-TI , à la onzième lune , au jour Gin-in , 39 *du cycle* , une comète parut dans KANG ; elle étoit blanche , & longue de cinq Tsün (Tsün = 0 , 1 du pied chinois) , elle tendoit vers le nord ; après quarante-cinq jours elle disparut.

265.

La deuxième des années HIEN-HI , à la cinquième lune , il parut une comète dans VANG-LEANG , longue d'un Tchang ; elle étoit blanche , elle tendoit vers le sud-est ; après douze jours elle disparut.

DYNASTIE DES TÇIN.

268.

La quatrième des années TAY-CHY de VOU-TI , à la première lune , au jour Ping-su , 23 *du cycle* , une comète parut dans TCHIN ; elle étoit d'une couleur bien pâle , elle alloit vers le nord , ensuite elle tourna vers l'est.

269.

La cinquième année , à la neuvième lune , il y eut une comète dans le TSU-KONG.

274 ans après J. C.

La dixième année, à la douzième lune, il y eut une comète dans TCHIN:

276.

La deuxième des années HIEN-NING, à la sixième lune, au jour Kia-su, 11 du cycle, une comète parut dans TY.

A la septième lune, une comète parut dans TA-KIO.

A la huitième lune, une comète parut dans le TAY-OUEI; elle parvint à la constellation YE, au PE-TEOU, & au SAN-TAI.

277.

La troisième année à la première lune, il y eut une comète dans la partie occidentale.

A la troisième lune, il y eut une comète dans GOEY.

A la quatrième lune, une comète parut dans YU-NIU.

A la cinquième lune, il y eut une comète dans la partie orientale.

A la septième lune, il parut une comète dans le TSE-KONG.

278.

La quatrième année, à la quatrième lune, l'étendard de TCHI-YEU, parut dans le Tsing oriental; après l'année elle fut détruite.

279.

La cinquième année, à la troisième lune, une comète parut dans LIEOU.

A la quatrième lune, il y eut une comète dans YU-NIU: à la septième lune, la comète ou une comète étoit dans le TSE-OUEY.

281.

La deuxième des années, TAY-KANG, à la huitième lune, il y eut une comète dans TCHANG.

A la cinquième lune , il y eut une comète dans HIEN-YUEN.

283 ans après J. C.

La quatrième année , à la troisième lune , au jour Vou-chin ,
45 du cycle , il y eut une comète dans le sud-ouest.

287.

La huitième année , à la neuvième lune , il y eut une comète
dans le NAN-TEOU , longue de dix Tchang ; après dix jours
elle disparut.

290.

La première des années TAI-HI , à la quatrième lune , une
étoile hôte parut dans le TSE-KONG.

295.

La cinquième des années de YUEN - KANG de HOEY - TI , à la
quatrième lune , une comète parut dans KUEY ; elle parvint
au HIEN - YUEN & au TAI-OUY , traversa les étoiles SAN-
TAY & TA-LING.

300.

La première des années YUNG-KANG , à la douzième lune , une
comète sortit à l'ouest de NIEOU , elle tendoit vers le TIEN-
CHI.

301.

La deuxième année , à la quatrième lune , une comète parut
dans une partie de Tsy.

302.

La deuxième des années , TAY-NGAN , à la quatrième lune ,
une comète parut le matin.

303.

La deuxième année , à la troisième lune , une comète parut
dans la contrée orientale ; elle indiquoit le SAN-TAY.

305 ans après J. C.

La deuxième des années YUNG-HING, à la huitième lune, une comète parut dans MAO & PI.

A la dixième lune, au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle*, il y eut une comète dans le SIUEN-KI du PE-TEOU.

329.

La quatrième des années HIEN-HO de TCHING-TI, à la septième lune, il y eut une comète au nord-ouest; elle s'approcha de TEOU : au bout de vingt-trois jours elle disparut.

336.

La deuxième des années HIEN-KANG, à la deuxième lune, au jour Sin-fe, 18 *du cycle*, le soir, il parut une comète dans la contrée occidentale, étant dans KUEY (les Annales ajoutent LEOU).

340.

La sixième année, à la deuxième lune, au jour King-chin, 17 *du cycle*, il y eut une comète dans le TAY-OUEI.

343.

La première des années KIEN-YUEN de KANG-TI, à la onzième lune, le sixième jour, une comète parut dans KANG; elle étoit longue de sept Che, & de couleur blanche.

349.

La cinquième des années YUNG-HO de MO-TI, à la onzième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, une comète parut dans KANG; sa chevelure terminoit l'ouest, étoit blanche, & longue d'un Tchang.

350.

La sixième année, à la première lune, au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle*, une comète parut dans KANG.

358 ans après J. C.

La deuxième des années TSING-PING, à la cinquième lune, au jour Ting-hai, 24 *du cycle*, une comète parut; elle sortit de TIEN-TCHUEN, & s'arrêta dans GOEY.

363.

La première des années HING-NING de NGAY-TI, à la huitième lune, il y eut une comète dans KIO & KANG; elle entra ensuite dans le TIEN-CHI.

373.

La première des années NING-KANG de HIAO-VOU-TI, à la première lune, au jour Ting-se, 54 *du cycle*, il y eut une comète dans NIU & HIU; elle traversa les constellations TY, KANG, KIO, TCHIN, YE, TCHANG.

A la deuxième lune, au jour Ping-su, 23 *du cycle*, une comète parut dans TY.

A la neuvième lune, au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle*, il y eut une comète dans le TIEN-CHI.

390.

La quinzième des années TAY-YUEN, à la septième lune, au jour Gin-chin, 9 *du cycle*, il y eut une comète dans PE-HO: après avoir traversé le TAY-OUEI, les SAN-TAY & VEN-TCHANG, elle entra dans le PE-TEOU; elle étoit blanche, longue de dix Tchang. A la huitième lune au jour Vou-su, 35 *du cycle*, la comète entra dans le TSE-OUEY, ensuite elle disparut.

400.

La quatrième des années LONG-GAN de GAN-TI, à la deuxième lune, au jour Ki-tcheou, 26 *du cycle*, une comète parut dans KUEY; elle étoit longue de trois Tchang. La

CATALOGUE DES COMETES. 55

comète monta dans KO-TAO & la partie occidentale du TSE-KONG, entra dans le KUEY du PE-TEOU, & parvint aux SAN-TAY. A la troisième lune, la comète se dirigea vers le TAY-OUEI, l'OU-TI-TSO & le TUON-MOEN.

A la douzième lune, au jour Vou-in 15 *du cycle*, il y eut une comète dans KUON-SO, le TIEN-CHI & le TIEN-TSIN.

415 ans après J. C.

La onzième des années Y-HY, à la cinquième lune, au jour Kia-chin, 21 *du cycle*, il y eut deux comètes qui sortirent du TIENCHI; elles passèrent par TI-TSO, & s'arrêtèrent au nord de FANG & de SIN.

416.

La première des années TAY-TCHANG de MING-YUEN-TI des HEU-GOEY, à la cinquième lune, au jour Kia-chin, 21 *du cycle*, deux comètes parurent.

418.

La quatorzième année, à la cinquième lune, au jour Keng-se, 37 *du cycle*, il y eut une comète au milieu du KUEY du PE-TEOU.

A la septième lune, au jour Kuey-hay, il sortit une comète à l'ouest du TAY-OUEI, elle se leva au dessous de l'étoile CHANG-SIANG. Sa chevelure, petite d'abord, s'accrut jusqu'à la longueur de plus de dix Tchang; elle passa par le PE-TEOU, le TSE-OUEI & le TCHONG-TAY.

419.

La première des années YUEN-Y de KONG-TI, à la première lune, au jour Vou-fu 35 *du cycle*, il parut une comète dans le TAY-OUEI, à l'ouest.

DYNASTIE DES SONG.

422 ans après J. C.

La troisième des années YONG-TSO de VOU-TI, à la deuxième lune, au jour Ping-fu, 23 *du cycle*, une comète parut dans HIU & GOEI.

A la onzième lune, au jour Vou-ou, 55 *du cycle*, il y eut une comète dans YNG-CHE.

423.

La première des années KING-PING de CHAO-TI (ou TCHOU-Y-FOU, ou YNG-YANG-VANG), à la onzième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, il y eut une comète dans TONG-PIE.

La dixième lune, au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, il y eut une comète dans TY.

432.

La première des années YEN-HO de TAY-VOU-TI des YUEN-GOEI, il parut une comète dans HIEN-YUEN; elle entra dans TAY-OUEI, & parvint jusqu'au TA-KIO, où elle périt.

442.

La dix-neuvième des années YUEN-KIA de VEN-TI, à la neuvième lune, au jour Ping-chin, 53 *du cycle*, il y eut une étoile hôte dans le PE-TEOU; elle devint comète, entra dans VEN-TCHANG, traversa OU-TCHE, TIEN-TSIE, TIEN-YUEN, & disparut dans l'hiver.

449.

La vingt-troisième année, à la dixième lune, au jour Kuey-mao, 40 *du cycle*, une comète parut dans le TAY-OUEY.

451.

La vingt-huitième année, à la quatrième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, une comète parut dans MAO. A la sixième lune,

CATALOGUE DES COMETES. 57

lune , au jour Gin-tsé , 49 *du cycle* ; elle parut au milieu de TAY-OUEI en opposition avec TI-TSO.

DYNASTIE DES TSY.

500 & 501 *ans après J. C.*

La troisième des années YONG-YUEN de TONG-HOEN-HEOU , à la première lune , au jour Y-se , 42 *du cycle* , une grande étoile parut à l'horizon.

A la deuxième lune , au jour Gin-su , 59 *du cycle* , l'étendard de TCHI-YEU parut.

501.

La première des années TCHONG-HING de HO-TI , à la troisième lune , au jour Y-se , 42 *du cycle* , une comète parut à l'horizon.

DYNASTIE DES LEANG.

533.

La cinquième des années TCHONG-TA-TONG de VOURI , à la première lune , au jour Ky-yeou , 46 *du cycle* , une grande étoile parut.

539.

La cinquième des années TA-TONG , à la dixième lune , au jour Sin-tcheou , 38 *du cycle* , une comète sortit du NAN-TEOU ; elle étoit longue d'un Che , & tendoit vers la partie méridionale ; peu à peu elle devint longue d'un Tchang. A la onzième lune , au jour Y-mao , 52 *du cycle* , la comète parvint à LEOU , & elle disparut.

DYNASTIE DES TCHIN.

560.

La première des années TIEN-KIA de VEN-TI , à la neuvième lune , au jour Kuey-tcheou , 50 *du cycle* , une comète

Tome X. H

parut ; elle étoit longue de quatre Che ; sa chevelure tenoit vers le sud-ouest.

565 ans après J. C.

La quatrième des années HO-TSING de VOU-TCHING-TI des PERTSY , à la troisième lune , il parut une comète.

La cinquième des années PAO-TING de VOU-TI , à la sixième lune , au jour King-chin , *57 du cycle* , une comète sortit du SAN-TAY , entra dans VEN-TCHANG , fut en opposition avec TU-TSIANG ; elle traversa ensuite les murailles occidentales du TSE-OUEI , & entra dans GOEY. La comète étoit grande d'un Tchang , elle indiquoit CHE & PI. Après cent jours & plus , sa longueur se réduisit à deux Che cinq pouces ; elle vint jusqu'à HIU & GOEY où elle périt.

La sixième des années TIEN-KIA de VEN-TI des TCHIN , au jour Sin-Yeou , *58 du cycle* , il y eut une comète longue de plusieurs Tchang , qui parut dans le CHANG-TAY.

La première des années TIEN-TONG de HEOU-TCHOU des TCHIN , à la sixième lune , au jour Gin-fu , *59 du cycle* , une comète sortit au nord-est de VEN-TCHANG ; elle étoit longue de la main , & parvint ensuite jusqu'à plusieurs Tchang ; au bout de cent jours la comète disparut.

568.

La quatrième des années TIEN-TONG de HEOU-TCHOU des TCHIN , une comète parut dans le TSING oriental.

La troisième des années TIEN-HO de VOU-TI des TCHEOU , à la sixième lune , au jour Kia-fu , *11 du cycle* , il y eut une comète dans le TSING oriental , longue d'un Tchang ; en haut , elle étoit blanche ; dans la partie inférieure , elle étoit de couleur de chair. La comète étoit brillante & alloit vers l'orient : parvenue à la septième lune , au jour Kuey-mao , *40 du cycle* , elle s'arrêta à huit pouces au nord de KUEY , ensuite elle disparut.

La deuxième des années KUANG-TA de FY-TI des TCHIN ; à la sixième lune , au jour Ting-hay , 24 *du cycle* , il y eut une comète.

574 ans après J. C.

La troisième des années KIEN-TE de VOU-TI des TCHOU , à la quatrième lune , au jour Y-mao , 52 *du cycle* , il y eut une comète hors des murailles du TSEKONG ; elle étoit grosse comme le poing , elle étoit rougeâtre , indiquoit l'Ou-TI-TSO , tendant peu à peu vers le sud-est : elle s'accrut ensuite jusqu'à un Tchang cinq Che. A la cinquième lune , au jour Kia-tse , 1 *du cycle* , la comète s'arrêta au nord de CHANG-TAY , & disparut.

575.

La septième des années TA-KIEN de SIUEN-TI des TCHIN ; à la quatrième lune , au jour Ping - fu , 23 *du cycle* , une comète parut dans TA-KIO.

580.

La douzième des années TA-KIEN de SIUEN-TI des TCHIN , à la douzième lune , au jour Sin-fe , 18 *du cycle* , une comète parut au sud-ouest.

DYNASTIE DES SOUY.

588.

La huitième des années KAY-HOANG de VEN-TI , à la dixième lune , au jour KIA-TSE , 1 *du cycle* , il y eut une comète dans NIEOU.

594.

La quatorzième année , à la onzième lune , au jour Kuey - oui , 20 *du cycle* , il y eut une comète dans HIO & GOEY ; elle parvint ensuite à KUEY & LEOU.

Hij

607 ans après J. C.

La troisième des années TA-NIE de YANG-TI, à la deuxième lune, au jour Ki-tcheou, 26 *du cycle*, il y eut une comète qui parut dans le TSING oriental, & VEN-TCHANG; elle traversa TAY-LING, OU-TCHE, PE-HO, entra dans le TAY-OUEI, & passa par l'étoile TI-TSO. Après cent jours elle s'arrêta.

A la troisième lune, au jour Sin-hay, 48 *du cycle*, une grande étoile parut à l'horizon dans la contrée occidentale; elle traversa KUEY, LEOU, KIO, KANG, & disparut. A la neuvième lune, au jour Sin-oui, 8 *du cycle*, elle reparut dans la contrée méridionale à l'horizon; elle vint dans KIO & KANG, passa par le TAY-OUEI & TI-TSO. La comète s'approcha de plusieurs constellations; seulement elle ne vint pas jusqu'à TSAN & TSING, elle passa à côté de SOUY (Jupiter), & disparut.

608.

La quatrième année, il sortit une comète de OU-TCHE; elle traversa VEN-TCHANG, parvint jusqu'à FANG, où elle disparut.

615.

La onzième année, à la sixième lune, il y eut une comète au sud-est de VEN-TCHANG; elle étoit longue de cinq ou six pouces, d'une couleur noire & pointue. Pendant la nuit elle étoit beaucoup agitée; elle tendit pendant plusieurs jours vers le nord-ouest, parvint à VEN-TCHANG, s'approcha du palais sans y entrer, ensuite elle rétrograda, & périt.

617.

La treizième année, à la sixième lune, une comète parut dans le TAY-OUI & OU TI-TSO; elle étoit jaunâtre, longue de trois ou quatre Che: après plusieurs jours elle périt.

A la neuvième lune, il parut une comète dans YNG-CHE.

DYNASTIE DES TANG.

626 ans après J. C.

La neuvième des années VOÜ-TE de KAO-TSU, à la deuxième lune, au jour Gin-ou, 19 *du cycle*, il y eut une comète entre GOEY & MAO, au jour Ting-hai, 24 *du cycle*; elle étoit dans KIÜEN-CHE.

634.

La huitième des années TCHIN-KUON de TAY-TSONG, à la huitième lune, au jour Kia-tse, 1 *du cycle*, il y eut une comète dans HIU & GOEY; elle passa par HIÜEN-HIAO: au jour Y-hay, 12 *du cycle*, elle ne parut plus.

639.

La treizième année, à la troisième lune, au jour Y-tcheou, 2 *du cycle*, il y eut une comète dans MAO & PI.

641.

La quinzième année, à la sixième lune, au jour Ky-yeou, 46 *du cycle*, il y eut une comète dans le TAY-OUEI; elle s'approcha de LANG-GOEI: à la septième lune, au jour Kia-su, 11 *du cycle*, elle ne parut plus.

663.

La troisième des années LONG-SO de KAO-TSONG, à la huitième lune, au jour Kuey-mao, 40 *du cycle*, il y eut une comète dans TSO-NIE-TI; elle étoit longue de deux Che; au jour Y-fe, 42 *du cycle*, on ne la vit plus.

667.

La deuxième des années KIEN-FONG, à la quatrième lune, au jour Ping-chin, 53 *du cycle*, il y eut une comète au

62 CATALOGUE DES COMETES.

nord-est ; elle étoit dans OU-TCHE , entre MAO & PI : au jour Y-hai , 12 *du cycle* , elle disparut.

675 ans après J. C.

La deuxième des années CHANG-YUEN , à la douzième lune ; au jour Gin-ou , 19 *du cycle* , il y eut une comète dans le midi de KIO & de KANG ; sa longueur de cinq Che.

676.

La troisième année , à la septième lune , au jour Ting hay ; 24 *du cycle* , il y eut une comète dans TSING ; elle indiquoit PE-HO , elle avoit trois Tchang de long. La comète alloit vers le nord-est ; sa chevelure étoit brillante , & alloit en augmentant , sa longueur trois Tchang ; elle indiquoit TCHONG-TAY & VEN-TCHANG : à la neuvième lune , au jour Y-yeou , 22 *du cycle* , on ne la vit plus.

681.

La première des années KAY-YAO , à la neuvième lune , au jour Ping-chin , 23 *du cycle* , il y eut une comète au milieu du TIEN-CHI ; elle étoit longue de cinq Tchang , & tendoit vers l'orient. La comète parvint jusqu'à HO-KOU : au jour Kuei-tcheou , 50 *du cycle* , elle disparut.

683.

La deuxième des années YONG-TCHONG , à la troisième lune ; au jour Ping-ou , 43 *du cycle* , il y eut une comète dans le nord de OU-TCHE : à la quatrième lune , au jour Sin-oui , 8 *du cycle* , on ne la vit plus.

684.

La première des années KUANG-TSE de TCHONG-TSONG , à la neuvième lune , au jour Ting-tcheou , 14 *du cycle* ; il y eut une étoile qui ressembloit à une demi-lune ; elle parut dans la contrée occidentale.

La première des années VEN-MING , à la septième lune , au

CATALOGUE DES COMETES. 63

jour Sin-oui, 8 *du cycle*, il y eut le soir une comète dans la contrée occidentale; elle étoit longue d'un Tchang : à la huitième lune, au jour Kia-chin, 41 *du cycle*, on ne la vit plus.

707. ans après J. C.

La première des années KING-LONG, à la dixième lune; au jour Gin-ou, 19 *du cycle*, il y eut une comète dans la contrée occidentale : à la onzième lune, au jour Kia-in, 51 *du cycle*, on ne la vit plus.

708.

La deuxième année, à la deuxième lune, au jour Ting-yeou; 34 *du cycle*, il y eut une comète entre MAO & GOEY.

A la huitième lune, au jour Gin-chin, 29 *du cycle*, il y eut une comète dans le TSE-KONG.

730.

La dix-huitième des années KAY-YUEN de HIUEN-TSONG, à la sixième lune, au jour Kia-tse, 1 *du cycle*, il y eut une comète dans OU-TCHE.

Au jour Kuey-yeou, 10 *du cycle*, il y eut une comète dans PI & MAO.

738.

La vingt-sixième année, à la troisième lune, au jour Ping-tse, 13 *du cycle*, il y eut une comète dans les murailles du TSE-OUËI; elle traversa le KUEY de PE-TEOU : au bout de dix jours & plus, les nuages empêchèrent de la voir.

760.

La troisième des années KIEN-YUEN de SO-TSONG, à la quatrième lune, au jour Ting-se, 54 *du cycle*, il y eut une comète dans la contrée orientale; elle étoit entre GOEY & LEOU : sa couleur étoit blanche, longue de quatre Che.

Elle alloit avec vitesse vers la contrée orientale , traversa MAO , PI , TSOUI , TSAN , TSING , KUEY , LIEOU , HIEN-YUEN , parvint à l'ouest d'YEU-CHI-FA ; après cinquante jours on ne la vit plus.

Au jour Sin-yeou , 58 *du cycle* , premier de la lune intercalaire , il y eut une comète dans la contrée occidentale , sa longueur de plusieurs Tchang ; parvenue à la cinquième lune , elle disparut.

766 ans après J. C.

La première des années TA-LIE de TAY-TSONG , à la douzième lune , au jour Ki-hai , 36 *du cycle* , il y eut une comète dans PAY-KUA , sa longueur d'un Che : après vingt jours elle périt.

770.

La cinquième année , à la quatrième lune , au jour Ki-oui ; 56 *du cycle* , il y eut une comète dans OU-TCHE ; sa chevelure étoit brillante , & longue de trois Tchang.

A la cinquième lune , au jour Ki-mao , 16 *du cycle* , il y eut une comète qui parut dans la contrée septentrionale ; elle étoit blanche. Au jour Kuci-oui , 20 *du cycle* , la comète alloit vers l'est ; elle s'approcha de PA-KO. A la sixième lune , au jour KUEI-MAO , 40 *du cycle* , elle fut près des SAN-KONG : au jour Ki-oui , 56 *du cycle* , on ne la vit plus.

772.

La septième année , à la douzième lune ; au jour Ping-in , 3 *du cycle* , il y eut une grande étoile au bas de TSAN.

815.

La dixième des années YUEN-HO de HIEN-TSONG , à la troisième lune , il y eut une grande étoile au bas du TAY-OUEI ; elle parvint jusqu'à HIEN-YUEN.

La

817 ans après J. C.

La douzième année, à la première lune, au jour Vou-tse, 25 *du cycle*, il y eut une comète dans PIE.

821.

La première des années CHANG-KING de MO-TSONG, à la première lune, au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, il y eut une comète dans YE. A la deuxième lune, au jour Ting-mao, 4 *du cycle*, la comète étoit à l'ouest de TAY-OUEI-KONG, dans CHANG-TSIANG.

A la sixième lune, il y eut une comète dans MAO; elle étoit longue d'un Tchang : après dix jours, on ne la vit plus.

828.

La deuxième des années TAY-HO de VEN-TSONG, à la septième lune, au jour Kia-chin, 41 *du cycle*, il y eut une comète dans le sud de YEU-TCHE-TY; elle étoit longue de deux Che.

834.

La huitième année, à la neuvième lune, au jour Sin-hay, 48 *du cycle*, il y eut une comète dans le TAY-OUEI, sa longueur étoit d'un Tchang; elle alloit au nord-ouest. Elle alla au delà de LANG-GOEI : le jour Keng-chin, 17 *du cycle*, on ne la vit plus.

837.

La deuxième des années KAY-TCHING, à la troisième lune, au jour Ping-ou, 43 *du cycle*, il y eut une comète dans GOEY, longue de sept Che; elle indiquoit l'ouest du NAN-TEOU : au jour Vou-chin, 45 *du cycle*, elle étoit au sud-ouest de GOEY; sa chevelure étoit très-brillante : au jour Kuei-tcheou, 50 *du cycle*, la comète étoit dans HUI : au jour Siu-yeou, 58 *du cycle*, elle avoit un Tchang de longueur, elle alloit lentement vers l'ouest, indiquant le sud : au jour Gin-fu, 59 *du cycle*, elle étoit dans NIU; elle avoit alors deux Tchang de long, & trois Che de large : au jour Kuei-hai, 60.

Tome X.

I

du cycle, sa longueur alloit toujours en augmentant : à la troisième lune, au jour Kia-tse, 1 *du cycle*, la comète étoit dans le NAN-TELOU : au jour Y-tcheou, 2 *du cycle*, elle étoit longue de cinq Tchang, son extrémité se partageoit en deux ; l'une indiquoit TY, l'autre couvroit FANG : au jour Ping-in, 3 *du cycle*, elle étoit longue de six Tchang ; elle n'étoit plus partagée, elle indiquoit le nord, & étoit au septième degré de KANG : au jour Ting-mao, 4 *du cycle*, la comète alloit au nord-ouest, indiquant l'est : au jour Ky-se, cinq *du cycle*, sa longueur de huit Tchang ; elle étoit dans TCHANG : au jour Kuei-oui, 20 *du cycle*, sa longueur trois Che ; elle étoit à la droite d'HIEY-YUEN ; alors on ne la vit plus.

A la huitième lune, au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, il y eut une comète dans HIEU & GOEY.

838 ans après J. C.

La troisième année, à la dixième lune, au jour Y-se, 42 *du cycle*, il y eut une comète dans la principale étoile de TCHIN ; elle étoit longue de deux Tchang ; peu à peu elle indiquoit l'ouest.

A la onzième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, il y eut une comète dans la contrée orientale ; elle étoit dans KY & OUEY, elle s'étendoit dans le ciel est & ouest : à la douzième lune, au jour Gin-tchin, 29 *du cycle*, on ne la vit plus.

839.

La quatrième année, à la première lune, au jour Kuey-yeou, 10 *du cycle*, il y eut une comète dans YU-LIN.

A la lune intercalaire, au jour Ping-ou, 43 *du cycle*, il y eut une comète au nord-ouest de KIYEN-CHE : à la deuxième lune, au jour Ki-mao, 16 *du cycle*, on ne la vit plus.

840.

La cinquième année, à la deuxième lune, au jour Keng-chin,

CATALOGUE DES COMETES. 67

57 *du cycle*, il y eut une comète entre ING-CHE & TUNG-PI; après vingt jours elle disparut.

A la onzième lune, au jour Vou-in, 15 *du cycle*, il y eut une comète dans la contrée orientale.

841 ans après J. C.

La première des années HOEI-TCHANG de VOU-TSONG, à la septième lune, il y eut une comète dans YU-LIN, entre YNG-CHE & TUNG-PY.

A la onzième lune, au jour Gin-in, 39 *du cycle*, il y eut une comète dans PE-LOU-SE-MOEN; elle étoit dans YNG-CHE; elle entra dans le TSE-OUEI : à la douzième lune, au jour Sin-mao, 28 *du cycle*, on ne la vit plus.

852.

La sixième des années TA-TCHONG de SIUEN-TSONG, à la troisième lune, il y eut une comète dans TSOUY & TSAN.

857.

La onzième année, à la neuvième lune, au jour Y-oui, 32 *du cycle*, il y eut une comète dans F'ANG; elle étoit longue de trois Che.

864.

La cinquième des années HIEN-TONG de HI-TSONG, à la cinquième lune, au jour Ky-hai, 36 *du cycle*, pendant la nuit, le LEOU (clepsydre) n'avoit pas encore rempli un Ke (Ke 0, 01 de jour); une comète sortit de la contrée orientale; elle étoit jaunâtre, longue de trois Che, & étoit dans LEOU.

868.

La neuvième année, à la première lune, il y eut une comète dans LEOU & GUEY.

869.

La dixième année, à la huitième lune, il y eut une comète dans TA-LING; elle alloit vers le nord-est.

877 ans après J. C.

La quatrième des années KIEN-FU de HY-TSONG, à la cinquième lune, il y eut une comète.

885.

La première des années KOUANG-KY, il y eut une comète entre TSIE-CHOUÏ & TSIE-SIN.

886.

La deuxième année, à la cinquième lune, au jour Ping-fu, 23 *du cycle*, il y eut une comète dans OUEÏ & KY; elle traversa le PE-TEOU & le NIE-TI.

891.

La deuxième des années TA-CHUN de TCHAO-TSONG, à la quatrième lune, au jour Keng-chin, 17 *du cycle*, il y eut une comète dans SAN-TAY; elle alloit vers l'est, entra dans le TAY-OUEÏ, traversa TA-KIO & le TIEN-CHI; elle étoit longue de dix Tchang : à la cinquième lune, au jour Kia-fu, 11 *du cycle*, on ne la vit plus.

892.

La première des années KING-FO, à la cinquième lune, l'étendard de TCHI-YEU parut. Il avoit la figure d'une comète blanche, semblable à une chevelure; il étoit long de deux Che.

A la onzième lune, il y eut une comète dans TEOU & NIEOU.

A la douzième lune, au jour Ping-tse, 13 *du cycle*, une comète appelée TIEN-TSAN, sortit du sud-ouest. Au jour Ki-mao, 16 *du cycle*, le temps couvert ne permit plus de l'observer.

893.

La deuxième année, à la troisième lune, le temps fut couvert jusqu'à la quatrième lune : au jour Y-yeou, 22 *du cycle*,

CATALOGUE DES COMETES. 69

les nuages se dissipèrent peu à peu pendant la nuit ; on vit alors une comète dans CHANG-TAY, longue de dix Tchang ; elle alloit vers l'orient , & entra dans le TAY-OUEI. La comète traversa TA-KIO , entra dans le TIEN-CHI , & dura trente-sept jours : sa grandeur alla jusqu'à vingt Tchang ; mais les nuages l'ayant cachée , on ne la vit plus.

894 ans après J. C.

La première des années KIEN-NING , à la première lune , il y eut une comète dans CHUN-CHEOU.

905.

La deuxième des années TIEN-YEU , à la quatrième lune , au jour Kia-chin , 41 *du cycle* , une comète parut au nord du fleuve ; elle traversa VEN-TCHANG , sa longueur de trois Tchang. La comète alla au delà TCHUNG-TAY & de HIA-TAY : à la cinquième lune , au jour Y-tcheou , 2 *du cycle* , elle sortit pendant la nuit d'HIEU-YUEN & du KIO de la gauche , & parvint aux murailles occidentales du TIEN-CHI ; sa chevelure étoit brillante , elle avoit l'air irrité ; sa longueur s'étendoit dans le ciel : au jour Ping-in , 3 *du cycle* , les nuages l'obscurcirent : au jour Sin-oui , 8 *du cycle* , les nuages s'étant dissipés , on ne la vit plus.

DYNASTIE DES LEANG.

912.

La deuxième des années KIEN-HOA de TAY-TSU , à la quatrième lune , au jour Gin-chin , 9 *du cycle* , une comète sortit de TCHANG.

Au jour Kia-su , 11 *du cycle* , une comète sortit de LING-TAY.

DYNASTIE DES HEU-TANG.

928.

La troisième des années TIEN-TCHING de MING-TSONG , à la dixième lune , au jour Keng-ou , 7 *du cycle* , une comète

sortit du sud-ouest ; elle étoit longue d'un Tchang, & indiquoit le sud-est. La comète étoit à cinq degrés de NIEOU : après trois soirées, on ne la vit plus.

936 ans après J. C.

La troisième des années TSING-TAI de MOU-VANG, à la neuvième lune, au jour Ki-tcheou, 26 *du cycle*, une comète sortit de HIU & de GOEY, sa longueur d'un Che ; sa figure étoit mince, elle traversa TIEN-LOUY-TCHING & KO.

DYNASTIE DES HEU-TSIN.

941.

La sixième des années TIEN-FO de KAO-TSU, à la neuvième lune, au jour Gin-tse, 49 *du cycle*, une comète sortit de la contrée occidentale ; elle parcourut les murailles du TIEN-CHI ; elle étoit longue d'un Tchang.

943.

La huitième année, à la dixième lune, au jour Keng-fu, 47 *du cycle*, une comète parut dans la contrée orientale ; elle indiquoit l'ouest : le vestige de sa queue étoit long d'un Che. La comète étoit à 9 degrés de KIO.

DYNASTIE DES TCHEOU.

956.

La troisième des années HIEN-TE de CHI-TSONG, à la première lune, au jour Gin-fu, 59 *du cycle*, il y eut pendant la nuit une comète dans TSAN ; sa chevelure indiquoit le sud-est.

DYNASTIE DES SONG.

975.

La huitième des années KAY-PAO de TAY-TSU-HOANG-TI, à la sixième lune, au jour Kia-tse, 1 *du cycle*, une comète sortit de LIEOU, longue de quatre Tchang : le matin, elle

parut dans la contrée orientale; elle indiquoit le sud-ouest. La comète passa par YU-KUEY, & parvint jusqu'à TONG-PIE, ce qui fait onze CHE (constellations); après quatre-vingt-trois jours elle disparut.

989 ans après J. C.

La deuxième des années TUON-KONG de TAI-TSONG, à la sixième lune (les Annales mettent à la septième lune), au jour Vou-tse, 25 *du cycle*, une comète sortit du Tsing oriental, à l'ouest de TSIE-CHOU; elle étoit bleuâtre, elle avoit une chevelure brillante qui s'agrandissoit peu à peu. Le matin, la comète parut au nord-est; au bout de dix jours, le soir, elle parut au nord-ouest, traversa YEU-TCHE-TI: après trente jours, elle vint à KANG, où elle périt

998.

La première des années HIEN-PING de TCHIN-TSONG, à la première lune, au jour KIA-CHIN, 21 *du cycle*, une comète sortit au nord de YNG-CHE; sa chevelure étoit brillante, & longue d'un Che: parvenue au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, au bout de quatorze jours elle disparut.

1003.

La sixième année, à la onzième lune, au jour Sin-hai, 48 *du cycle*, l'étoile MAO-TEOU fut en opposition avec YU-KUEY.

Au jour Kia-in, 51 *du cycle*, il y eut une comète dans TSING & KUEY; elle étoit grande comme un vase, d'une couleur bleuâtre; elle avoit une chevelure brillante, longue de quatre Che. La comète s'approcha de très-près de OU-TCHU-HEOU, passa par OU-TCHE, & entra dans TSAN; après trente jours elle disparut.

1018.

La deuxième des années TIEN-HY, à la sixième lune, au jour Sin-hay, 48 *du cycle*, une comète sortit au nord-est de la seconde étoile du KUEY du PE-TEOU; elle étoit longue de trois Che, elle alloit vers le nord avec la première étoile

du PE-TEOU. La comète traversa TIEN-LAO, VEN-TCHANG, sa longueur trois Tchang; elle passa par le TSE-OUEI, les SAN-TAY & HIEN-YUEN: elle alla ensuite, en s'éloignant vers l'ouest, jusqu'à TSIE-SING; après trente-sept jours elle disparut.

1033 ans après J. C.

La deuxième des années MING-TAO de GIN-SONG, à la deuxième lune, au jour Vou-fu, 35 *du cycle*, l'étoile HAN-YU (comète) parut à l'est de la contrée septentrionale; elle étoit d'une couleur rougeâtre, avoit une chevelure brillante, longue de deux Che.

1035.

La deuxième des années KING-YEOU, à la huitième lune, au jour Gin-fu, 59 *du cycle*, il y eut une comète dans TCHANG & YE; elle étoit longue de sept Che, cinq Tsun (pouces); au bout de douze jours elle disparut.

A la douzième lune, au jour Ki oui, 56 *du cycle*, il y eut une étoile qui sortit pendant la nuit de VAY-PING; elle avoit une chevelure très-foible.

1049.

La première des années HOANG-YEOU, à la deuxième lune; au jour Ting-mao, 4 *du cycle*, une comète sortit de HOU. Le matin elle parut dans la contrée orientale, indiquant le sud-ouest; elle traversa le TSE-OUEI, parvint jusqu'à LEOU, & après cent quatorze jours elle disparut.

1056.

La première des années KIA-YEOU, à la septième lune, une comète sortit du TSE-OUEI, & traversa les TSIE-TSING; elle étoit blanche, & longue d'un Tchang: parvenue à la huitième lune, au jour Kuey-hay, 60 *du cycle*, elle périt.

1066.

La troisième des années TCHI-PING de YNG-TSONG, à la troisième

sième lune, au jour Ky-oui, 56 *du cycle*, une comète sortit de YNG-CHE. Le matin elle parut dans la contrée orientale, sa longueur de sept Che; elle indiquoit le sud-ouest, étant entre GOEY & FUEN-MOU. Peu à peu elle s'éloigna en allant vers l'orient, s'approcha du soleil qui la cacha: parvenue au jour Sin fe, 8 *du cycle*, le soir, elle parut dans le nord-ouest; il y eut une étoile sans chevelure. La comète alloit vers l'orient; il y eut aussi une vapeur blanche, longue de trois Che: elle traversa le haut du palais de TSE-OUEI; l'étoile étoit dans FANG. Sa tête & sa queue entrèrent dans Pi; elle alloit vers l'est, elle traversa VEN-TCHANG, PE-TEOU, elle traversa OUEI: parvenue au jour Gin-ou, 19 *du cycle*, l'étoile eut de nouveau une chevelure; la comète, longue d'un Tchang trois Che, indiquant le nord-est, elle traversa OU-TCHE. La vapeur blanche étoit divisée & en travers du ciel; elle traversa PE-HO, OU-TCHU-HEOU, HIEN-YUEN, le TAY-OUEI, OU-TI-TSO, NOUY-OU-TCHU-HEOU, & vint dans KIO, KANG, TY, FANG. Au jour Kuey-oui, 20 *du cycle*, la comète étoit longue d'un Tchang cinq Che, elle étoit comme un boisseau; elle traversa ING-CHE, & vint jusqu'au nord de TCHANG, ce qui fait quatorze constellations: au bout de soixante-sept jours, l'étoile & la comète furent détruites.

1075 ans après J. C.

La huitième des années HY-NING, à la dixième lune, au jour Y-oui, 32 *du cycle*, une étoile sortit du sud-est, au milieu de TCHING; elle ressembloit à celle de Saturne, elle étoit d'un bleu pâle: au jour Ping-chin, 33 *du cycle*, il lui naquit des cornes brillantes, longues de trois Che. La comète étoit inclinée, & indiquoit TCHIN: au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, la comète avoit des cornes très-brillantes, longues de cinq Che: au jour Vou-fu, 35 *du cycle*, elles étoient longues de sept Che; la comète étoit inclinée, & indiquoit l'étoile Tso-HIA: parvenue au jour Ting-oui, 44 *du cycle*, elle entra dans TCHO, & ne parut plus.

1080 ans après J. C.

La troisième des années YUEN-FONG de CHIN-TSONG, à la septième lune, au jour Kuey-oui, 20 *du cycle*, une comète sortit au nord-ouest des murailles du TAY-OUEI, au midi de LANG-GOEI. C'étoit une vapeur blanche, longue d'un Tchang; elle étoit inclinée, & indiquoit le sud-est : la comète étoit au milieu de TCHIN. Au jour Ping-fu, 23 *du cycle*, elle tenoit au devant de l'ouest de la contrée septentrionale; elle étoit au milieu de YE. Au jour Vou-fu, 25 *du cycle*; sa longueur trois Che; elle étoit inclinée, & elle pénétra dans LANG-GOEI. Au jour Kuey-mao, 40 *du cycle*, la comète passa très-près d'HIEN-YUEN : au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, elle entra dans TCHO, & disparut : au jour King-tse, 37 *du cycle*, le matin elle reparut au milieu de TCHANG jusqu'au jour Vou-ou, 55 *du cycle*, en tout trente-six jours, & elle disparut.

1097.

La quatrième des années CHAO-CHING de TCHE-TSONG, à la huitième lune, au jour Ki-yeou, 46 *du cycle*, une comète sortit au milieu des degrés de TY; elle ressembloit à Saturne; elle avoit une chevelure, sa couleur étoit brillante; c'étoit une vapeur blanche, longue de trois Che : elle étoit inclinée, & regardoit les murailles du TIEN-CHI. A la neuvième lune, au jour Gin-tse, 49 *du cycle*, elle avoit une chevelure brillante, longue de cinq Che; elle entra dans les murailles du TIEN-CHI. Au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, elle s'approcha de très-près du TIEN-CHI : au jour Keng-chin, 57 *du cycle*, elle passa très-près de TI-TSO & des murailles du TIEN-CHI : au jour Vou-chin, 5 *du cycle*, on ne la vit plus.

1106

La cinquième des années TSONG-NING de OUEI-TSONG, à la première lune, au jour Vou-fu, 35 *du cycle*, une comète sortit de la contrée occidentale; elle ressembloit à la bouche d'un petit vase; sa chevelure étoit brillante & éparse; elle

fortit comme *SUY-SING* (espèce de comète); elle avoit six Tchang trois Che de long : au commencement elle indiquoit le nord-est ; depuis *KUEY* elle traversa *LEOU*, *GOEY*, *MAO* & *PI*. Après être entrée dans *TCHO*, on ne la vit plus.

1110 ans après J. C.

La quatrième des années *TA-KUON*, à la cinquième lune, au jour *Ting-oui*, 44 *du cycle*, une comète fortit de *KUEY* & de *LEOU*; elle avoit une chevelure brillante, longue de six Che. La comète alloit au nord ; elle entra dans les murailles du *TSE-OUEI* : parvenue au nord-ouest, elle entra dans *TCHO*, & disparut.

1126.

La première des années *TSING-KANG* de *KIN-TSONG*, à la sixième lune, au jour *Gin-fu*, 59 *du cycle*, une comète fortit des murailles du *TSE-OUEI*.

A la onzième lune intercalaire, on vit une comète à l'horizon.

1131.

La première des années *CHAO-HING* de *KAO-TSONG*, à la neuvième lune, une grande étoile parut.

A la douzième lune, au jour *Vou-in*, 15 *du cycle*, il parut une comète.

1132.

La deuxième année, à la huitième lune, au jour *Kia-in*, 51 *du cycle*, une comète parut dans *GUEY* : parvenue à la neuvième lune, au jour *Kia-fu*, 11 *du cycle*, elle disparut.

1145.

La quinzième année, à la quatrième lune, au jour *Vou-in*, 15 *du cycle*, une comète fortit au milieu des constellations de la contrée orientale, & après cinquante jours elle dis-

parut : au jour Ping-chin , 33 *du cycle* , elle reparut dans TSAN ; après quinze jours elle périt.

A la cinquième lune , au jour Ting-se , 54 *du cycle* , il parut une comète ; c'étoit une étoile hôte ; elle étoit d'une couleur bleuâtre.

1146 ans après J. C.

La seizième année , à la douzième lune , au jour Vou-su , 35 *du cycle* , une comète sortit au sud-ouest , de GOEY.

1147.

La dix-septième année , à la première lune , au jour Y-hai , 12 *du cycle* , il sortit une comète au nord-est , de NIU : le deuxième jour de la deuxième lune elle disparut.

1152.

La vingt-deuxième année , à la septième lune , au jour Ping-ou , 43 *du cycle* , une comète parut au nord-est , au milieu de TSING : au jour Ting-oui , 44 *du cycle* , elle ressembloit à Jupiter ; elle avoit une chevelure longue de deux Che.

Au jour Kuey-tcheou , 50 *du cycle* , pendant la nuit , une comète s'approcha très-près de OU-TCHU-HEOU.

1174.

La deuxième des années CHONG-HY de HIAO-TSONG , à la septième lune , au jour Sin-tcheou , 38 *du cycle* , une petite étoile étoit au dehors des murailles du TSE-OUEI , au dessus des étoiles TSIE-KONG ; elle étoit petite comme Mars.

1222.

La quinzième des années KIA-TING de NING-TSONG à la huitième lune , au jour Kia-ou , 31 *du cycle* , une comète sortit de YEU-TCHE-TI ; sa chevelure étoit brillante d'environ trois Tchang. La comète étoit petite comme Jupiter ; elle subsista pendant deux mois , traversa TY , FANG , SIN , & elle périt.

F I N.



